Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

47. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Ljutomer, 28. 3. 2009

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Na dnu morja je potopljena ladja z maso ena tona. Na površje bi jo lahko dvignili tako, da bi jo napolnili z žogicami za namizni tenis. Polmer žogice je 20 mm, masa pa 2,7 g. Kolikšno prostornino znotraj ladje moramo zapolniti z žogicami, če zlagamo žogice v najgostejši sklad, kjer zavzamejo $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 74\%$ prostornine, ostalo pa je voda? Gostota vode je $1\,\mathrm{kg/dm^3}$.

2. Po deževju se pešec sprehaja po pločniku ob cesti, na kateri je majhna luža. Ko je vzporedno z lužo, pripelje po cesti osebni avto. Izpod koles pljuskne voda na pločnik. Pešec se pljusku ne more umakniti, zato se ustavi, pravočasno navpično skoči in se na ta način izogne pljusku. Pešec ima takoj po odskoku iztegnjene noge.

   Voda pljuskne izpod koles avtomobila s hitrostjo 4 m/s pod kotom 30° glede na tla in v prečni smeri glede na smer vožnje avtomobila. Razdalja med lužo in pešcem je 70 cm. Razdalja med sprednjimi in zadnjimi kolesi je 4 m, avto vozi s hitrostjo 10 m/s.

   a) Najmanj kako visoko mora skočiti pešec, da ga ne zmoči pljusk izpod prednjega kolesa?

   b) Najmanj kako visoko pa mora skočiti pešec, da se izogne prvemu in drugemu pljusku?

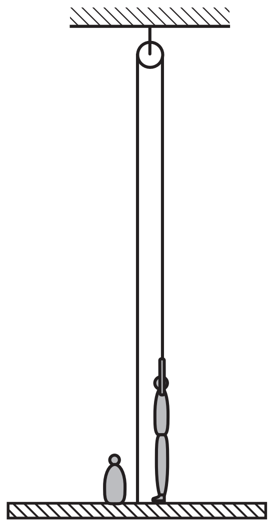
3. Pri preskusu trkov zaletijo avtomobil pri hitrosti 60 km/h z enakim pritrjenim avtomobilom tako, da po trku obmirujeta. Kolikšna naj bo *relativna* hitrost avtomobilov, da dobimo enak učinek (enako deformacijsko energijo), v primeru:

   a) ko mirujoči avtomobil ni pritrjen;

   b) ko se avtomobila gibljeta v isti smeri in ima avtomobil, ki vozi za drugim, dvakrat večjo hitrost od drugega.

   V vseh treh primerih je trk centralen in avtomobila ostaneta po trku sprijeta (se ne odbijeta).

4. Tarzan si je za dostop do svoje drevesne hiške domislil dvigalo. Na vrh drevesa je obesil lahek škripec in prek njega napeljal lahko neraztegljivo vrv. Vrv je dovolj dolga, da sega do tal na obeh krajiščih. Na enem krajišču je pritrdil ploščad z maso 60 kg, drugo krajišče pa je prosto, tako da si z njim lahko pomaga pri vlečenju dvigala navzgor (glej sliko). Na ploščadi sedi opica z maso 40 kg. Tarzanova masa je 80 kg.

   Tarzan se odloči, da bo splezal po prostem krajišču vrvi navzgor. Opica ga posnema in začne istočasno plezati po drugem krajišču vrvi s pospeškom 1 m/s^2 glede na dvigalo. Kolikšna je po 2 s razlika višin med opico in Tarzanom, če Tarzan pleza navzgor s pospeškom 0,5 m/s^2 za opazovalca na tleh?

47. *FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE*

Državno tekmovanje, Ljutomer, 28. 3. 2009

Skupina II

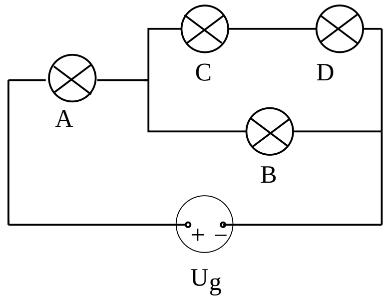
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

1. Štiri žarnice priključimo na napetost 9 V, kot kaže slika. Če žarnico A priključimo na napetost 6 V, sveti z močjo 6 W, vsaka od žarnic B, C in D, priključena na napetost 6 V, pa z močjo 4 W. Privzamemo, da je upor žarnice neodvisen od toka, ki teče skoznjo.

   a) Katera žarnica sveti najmočneje?

   b) Žarnico D odvijemo iz njenega ležišča. Za koliko se spremeni moč žarnice A?

   c) Bo v primeru b) še vedno najbolj svetila ista žarnica kot pri a)?



2. Stanovanjski „trojček“ je sestavljen iz treh pritličnih stanovanj v obliki kvadra z višino 6 m, širino 6 m in dolžino (globino) 9 m. Krajnji stanovanji ogrevamo tako, da je temperatura v levem 24 °C in v desnem 20 °C. Zunanja temperatura je 0 °C.

   a) S kolikšno močjo moramo segrevati srednje stanovanje, da je v njem temperatura 22 °C?

   b) Lastnik srednjega stanovanja se odloči, da stanovanja ne bo več ogreval. Kolišna je temperatura v tem primeru, če ostaneta temperaturi v drugih dveh stanovanjih nespremenjeni?

   Debelina betonskih sten med stanovanji je 20 cm, debelina betonskih zunanjih sten 30 cm, toplotna prevodnost betona pa 0,6 W/mK. Toplotni tok skozi streho in tla je zanemarljiv. Toplotni tok, ki teče skozi okna in vrata, je enak toplotnemu toku, ki bi tekel skozi enako velik izsek betonske stene. (Lahko torej računamo, kot da je hiša brez oken in vrat.)

3. V verigi otokov so štirje sosednji majhni otočki, na katerih prebiva po en prebivalec, ki ima kovinsko kroglo na dolgi neprevodni palici. Na prvem otočku ima prebivalec kroglo s polmerom 1 m, nabito z nabojem +1 mAs. Na vsakem naslednjem zaporednem otočku ima prebivalec nenabito kroglo, ki pa ima za 20 % večji polmer kot krogla na predhodnem otočku.

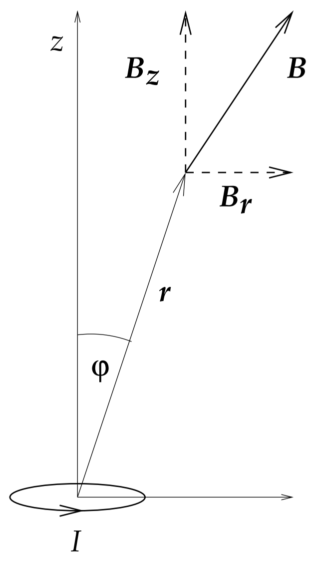
   a) Koliko naboja bo na krogli na zadnjem otočku, če ga prebivalci prenesejo s prvega otočka na ta način, da prebivalca sosednjih otočkov stakneta krogli?

   b) V kolikšnem času se napetost na krogli na zadnjem otočku zmanjša za 1000 V, če prebivalec poveže kroglo z zemljo preko upornika za 1 MΩ?

   Pojasnilo: Napetost krogle z radijem r ter nabojem e proti neskončnosti je $U = e/4\pi\varepsilon_0 r$. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

4. Magnetno polje zanke, po kateri teče tok I, je osno simetrično in je odvisno od koordinate z in razdalje do osi. Pri dovolj dovolj velikih razdaljah od središča zanke r ga lahko zapišemo s komponentama (glej sliko)

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\left(\frac{3\cos^2\varphi - 1}{r^3}\right), \qquad B_r = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}\right),$$



pri čemer je B_z komponenta v smeri osi z in B_r komponenta v radialni smeri; φ je kot med osjo z in vektorjem $\vec{r}$. Tu je $p_m = IS$ magnetni moment zanke in S ploščina zanke; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

Enako zanko, po kateri teče tok v isti smeri kot v prvotni zanki, postavimo tako, da je njeno središče na osi z in sta središči zank na oddaljenosti l.

a) Določi smer in velikost sile na drugo zanko, če je radij zanke $r_0 = 10$ mm, $l = 10$ cm, $I = 10$ A.

b) Kako je sila odvisna od razdalje l ob predpostavki $r_0 \ll l$? (Za majhne kote je $\cos\varphi \approx 1$ in $\sin\varphi \approx \tan\varphi$.)

47. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Ljutomer, 28. 3. 2009

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Dva enako težka drsalca se približujeta drug drugemu po vzporednih premicah s hitrostma v_1 in v_2. Razdaljo med premicama je d. Ko sta drsalca na najmanjši razdalji drug od drugega, se primeta za roki in začneta vrteti okrog skupnega težišča. Med vrtenjem se razdalja med njima ne spreminja. V kateri smeri (glede na prvotno smer) potujeta in kolikšni sta njuni hitrosti potem, ko se spustita, če se spustita potem, ko naredita

   a) en cel obrat (360°)? b) pol obrata (180°)? c) četrt obrata (90°)?

2. Na podstrešju smo našli starinsko stensko uro. V njej je kot nihalo uporabljena lahka, točno 1 m dolga palica. Palica je vrtljivo obešena na zgornjem krajišču, na spodnjem krajišču palice pa je kilogramska utež. Žal pa ura ni dovolj natančna, saj vsak dan zaostane za 6 min. Uro popravimo tako, da na palico pritrdimo točkasto telo z maso 50 g. Kako daleč od osi moramo pritrditi to telo, da bo ura natančna?

3. Dve podmornici se pod vodo gibljeta po isti premici premo enakomerno. Prva podmornica se giblje s hitrostjo 8,0 m/s glede na vodo. Posadka prve želi določiti hitrost druge, zato istočasno pošlje dva zvočna signala s frekvencama $\nu_1 = 1000$ Hz in $\nu_2 = 1001$ Hz. Oba signala se od drugega plovila odbijeta in posadka na prvem to zazna kot utripanje. Čas utripa je 977 ms. S kolikšno hitrostjo glede na vodo in v kakšni smeri (proti ali stran od prve podmornice) se giblje druga podmornica? Hitrost zvoka v vodi je 1500 m/s.

4. V magnetnem polju se nabiti delci odklanjajo zaradi magnetne sile. V nalogi nas zanima gibanje protona v magnetnem polju za nekaj različnih primerov. V vseh primerih ima magnetno polje smer navpično navzgor. Naboj protona je $1,6022 \cdot 10^{-19}$ As, masa protona je $1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

   a) Izračunaj polmer in obhodni čas kroženja protona, ki prileti v vodoravni ravnini s hitrostjo 300 km/s v homogeno magnetno polje z gostoto $B_z = B_0 = 10$ mT, ki je usmerjeno navpično navzgor.

   b) V tem delu opazujemo gibanje istega protona v nekoliko drugačnem magnetnem polju. Prostor je z navpično ravnino yz razdeljen na dva polprostora. Navpično magnetno polje v polprostoru, ki vsebuje pozitivno os x, je $B_z = B_0 + \Delta B$, v polprostoru, ki vsebuje negativno os x, pa $B_z = B_0 - \Delta B$, kjer je ΔB veliko manjši od B_0. Končne rezultate izračunaj za $\Delta B = 0,01$ mT.

      Ko je proton v ravnini yz, ima hitrost 300 km/s v smeri osi x. Ugotovi, v katero smer in za koliko se premakne proton v enem obhodu.

   c) Protoni, ki priletijo s Sonca, se v magnetnem polju Zemlje gibljejo podobno, kot proton v *b*) delu te naloge. Razlika je predvsem v tem, da se magnetno polje Zemlje spreminja zvezno in ne skokoma, kot smo zapisali v delu *b*) naloge. Tir protona v nehomogenem magnetnem polju je približno krožnica, katere središče pa ni pri miru, temveč se premika.

      Pri enaki postavitvi in hitrosti protona kot v *b*) delu naloge sedaj predpostavi, da se magnetno polje vzdolž osi x spreminja kot $B_z = B_0 + ax$, kjer je konstanta a dovolj majhna, da je največja sprememba magnetnega polja $\Delta B_{\max} = ax_{\max}$ veliko manjša od B_0. Končne rezultate izračunaj za $a = 1 \cdot 10^{-5}$ T/m.

      Na podlagi rezultata pri *b*) ugotovi, v kateri smeri se giblje in oceni povprečno hitrost protona v tej smeri.

Državno tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2009

Ljutomer, 28. marec 2009

Kazalo

Skupina I – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $m_l = 1$ tona, $r = 20$ mm, $m_1 = 2{,}7$ g, $\eta = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = 74\%$, $\rho = 1$ kg/dm^3.

   Prostornina žogice je
   $$V_1 = \frac{4\pi r_0^3}{3} = 33{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3\,. \qquad [1\ \mathrm{t.}]$$
   Iz ravnovesja vzgona in teže ladje in žogic sledi
   $$NV_1\rho g = (Nm_1 + m_l)g\,, \qquad [4\ \mathrm{t.}]$$
   dd koder dobimo število žogic:
   $$N = \frac{m_l}{V_q g - m_1} = 32\,460\,. \qquad [2\ \mathrm{t.}]$$
   Prostornina, ki jo zavzemajo pa je
   $$V = \frac{NV_1}{\eta} = 1{,}47\ \mathrm{m}^3\,. \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

2. *Podatki:* $v_0 = 4$ m/s, $\alpha = 30°$, $s = 70$ cm, $v_a = 4$ m, $l = 10$ m/s.

   a) Pljusk za razdajo s porabi
   $$t = \frac{s}{v_0 \cos\alpha} = 0,202\ \mathrm{s}$$
   in se v tem času dvigne za
   $$h = v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 20\ \mathrm{cm}\,.$$
   Pešec mora skočiti najmanj 20 cm visoko. [4 t.]

   b) Pljuska si sledita v intervalu
   $$\Delta t = \frac{l}{v_a} = 0{,}4\ \mathrm{s}\,.$$
   V optimalnem primeru mora pešec doseči največjo višino h' po času $\frac{1}{2}\Delta t$ od trenutka, ko se je dvignil nad prvi pljusk. V tem trenutku je njegova hitrost 0. Nato prosto pada in po $\frac{1}{2}\Delta t$ od trenutka, ko je dosegel višino h', je na višini h, tako da se ravno še izogne drugemu pljusku. Za prosti pad za višinsko razliko $h' - h$ velja
   $$h' - h = \tfrac{1}{2}g(\tfrac{1}{2}\Delta t)^2\,, \qquad h' = h + \frac{gl^2}{8v_a^2} = 40\ \mathrm{cm}\,.$$
   Skočiti mora vsaj 40 cm visoko. [6 t.]

3. *Podatki:* $v_0 = 60$ km/h

Pri preskusu gre vsa kinetična energija v deformacijsko:

$$W_d = W_k = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \,.$$

a) Relativna hitrost je kar hitrost gibajočega se avtomobila v. Po trku se ohrani gibalna količina in hitrost sprimka je

$$v' = \frac{mv}{2m} = \tfrac{1}{2} v \,. \qquad [2 \text{ t.}]$$

V tem primeru je deformacijska energija razlika kinetičnih energij:

$$W_d = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2}(2m) v'^2 = \tfrac{1}{4} m v^2 \,. \qquad [3 \text{ t.}]$$

Iz zahteve

$$\tfrac{1}{4} m v^2 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \,, \quad \text{sledi} \quad v = \sqrt{2} v_0 = 85 \text{ km/h} \,. \qquad [1 \text{ t.}]$$

b) Če z v ponovno označimo relativno hitrost avotmobilov, je hitrost prvega $v_1 = v$ in drugega $v_2 = 2v$. Velja:

$$v' = \frac{m v_1 + m v_2}{2m} = \frac{3v}{2} \,. \qquad [2 \text{ t.}]$$

in

$$W_d = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} m (2v)^2 - \tfrac{1}{2}(2m) v'^2 = \tfrac{1}{4} m v^2 \,, \qquad [1 \text{ t.}]$$

enako kot v primeru a). Torej je

$$v = \sqrt{2} v_0 = 85 \text{ km/h} \,. \qquad [1 \text{ t.}]$$

4. *Podatki:* $m_p = 60$ kg, $m_o = 40$ kg, $m_T = 80$ kg, $a_o = 1$ m/s^2, $a_T = 0{,}5$ m/s^2, $t = 2$ s.

Iz ravnovesja navor na škripec sledi, da sta sili v obeh delih vrvi enaki.

Silo vrvi na Tarzana dobimo iz Newtonovega zakona:

$$m_T a_T = F - m_T g\,, \qquad F = m_T(a_T + g) = 824\ \mathrm{N}\,, \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

Enaka sila deluje na opico in ploščad. Če z a_p označimo pospešek ploščadi, je pospešek opice za zunanjega opazovalca $a'_o = a_o + a_p$ in Newtonov zakon za opico in ploščad zapišemo v obliki:

$$m_p a_p + m_o(a_o + a_p) = F - (m_p + m_o)g$$

Od tod dobimo pospešek ploščadi:

$$a_p = \frac{F - (m_p + m_o)g - m_o a_o}{m_p + m_o} = -1{,}96\ \mathrm{m/s}^2 \approx -2{,}0\ \mathrm{m/s}^2\,. \qquad [4\ \mathrm{t.}]$$

In pospešek opice za zunanjega opazovalca

$$a'_o = a_o + a_p = -1{,}0\ \mathrm{m/s}^2\,.$$

Včasu t se opica spusti za

$$\Delta h_o = \tfrac{1}{2}|a'_o|t^2 = 2{,}0\ \mathrm{m}$$

Tarzan pa dvigne za

$$\Delta h_T = \tfrac{1}{2}a_T t^2 = 1{,}0\ \mathrm{m}$$

Razlika višin je torej 3,0 m. [3 t.]

Če je kdo predpostavil, da je ploščad na začetku na tleh, se opica dvigne za 2 m, in je razlika višin 1,0 m.

Skupina II – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $U_g = 9$ V, $U_n = 6$ V, $P_A = 6$ W, $P_B = 4$ W.

   a) Upor žarnice A je
$$R_A = U_n^2/P_A = 6\ \Omega\,,$$
   upor drugih pa
$$R_B = R_C = R_D \equiv R = U_n^2/P_B = 9\ \Omega\,.$$
   Nadomestni upor žarnic BCD je
$$\frac{1}{R_{BCD}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}\,, \qquad R_{BCD} = \frac{2R}{3} = 6\ \Omega\,.$$
   Na žarnici A je ravno pol gonilne napetosti, na žarnici B ravno toliko, na B in C pa četrtinka. Moči so
$$P_A = \frac{(\frac{1}{2}U_g)^2}{R_A} = 3{,}37\ \mathrm{W}\,, \qquad P_B = \frac{(\frac{1}{2}U_g)^2}{R_B} = 2{,}25\ \mathrm{W}\,,$$
$$P_C = P_D = \frac{(\frac{1}{4}U_g)^2}{R_B} = 0{,}56\ \mathrm{W}\,,$$
   Najmočneje sveti žarnica A. [4 t.]

   b) V tem primeru je $R_D \to \infty$ in tok skozi žarnici C in D sploh ne teče; zgornjo vejo lahko odmislimo. V tem primeru je na žarnici A napetost
$$U_A = \frac{R_A}{R_A + R_B}\,U_g = 3{,}6\ \mathrm{V}\,,$$
   in ustrezna moč
$$P_A = \frac{U_A^2}{R_A} = 2{,}16\ \mathrm{W}\,,$$
   Moč se zmanjša za 1,21 W. [4 t.]

   c) Poleg žarnice A sveti le še žarnica B:
$$U_B = \frac{R_B}{R_A + R_B}\,U_g = 5{,}4\ \mathrm{V}$$
   z močjo
$$P_B = \frac{U_B^2}{R_B} = 3{,}24\ \mathrm{W}\,.$$
   Najmočneje sveti žarnica B. [2 t.]

2. *Podatki:* $a = 6$ m, $h = 6$ m, $l = 9$ m, $T_l = 24$ °C, $T_d = 20$ °C, $T_0 = 0$ °C, $T_s = 22$ °C, $d_n = 20$ cm, $d_z = 30$ *cm*, $\lambda = 0{,}6$ W/mK.

   a) Ker je razlika temperatur med levim in srednjim enaka razliki temperatur med srednjim in desnim, priteče iz levega stanovanja ravno toliko toplotnega toka, kolikor ga odteče v desno stanovanje. Peč v srednjem stanovanju mora zato nadoknaditi le tok, ki uhaja skozi dve zunanji steni:

$$P = \frac{2ah\,\lambda(T_s - T_0)}{f_z} = 3{,}2\ \mathrm{kW}\,. \qquad [5\ \mathrm{t.}]$$

   b) V tem primeru je vsota tokov iz levega in desnega stanovanja skozi notranji steni enaka toku, ki gre iz srednjega stanovanja skozi zunanji sten ven. Če s T označimo temperaturo srednjega stanovanja, lahko zapišemo:

$$\frac{lh\,\lambda\left[(T_l - T) + (T_d - T)\right]}{d_n} = \frac{2ah\,\lambda(T - T_0)}{d_z} \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

   in od tod

$$T = \frac{\frac{l}{d_n}\,(T_l + T_d) + \frac{2a}{d_z}\,T}{2\left(\frac{l}{d_n} + \frac{a}{d_z}\right)} = 15{,}2\ \mathrm{°C}\,. \qquad [2\ \mathrm{t.}]$$

3. *Podatki:* $r = 1$ m, $e_1 = +1$ mAs, $\Delta r/r = 20$ %, $\Delta U = 1000$ V, $R = 1$ MΩ

   a) Ko se z i-to kroglo z nabojem e_i dodatknemo sosednje krogle, se naboj porazdeli med i-to in sosednjo kroglo, tako da velja:

$$e_i = e_i' + e_{i+1}\,, \qquad \frac{e_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{e_{i+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{i+1}}$$

   od tod

$$e_{i+1} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i}\,e_i = \frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}\,e_i\,. \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

   Naboj na četrti je tako

$$e_4 = \left(\frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}\right)^3 e_1 = 0{,}16\ \mathrm{mAs} \qquad [2\ \mathrm{t.}]$$

   b) Napetost na zadnji je

$$U_4 = \frac{e_4}{4\pi\varepsilon_0 r_4} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{1}{(2 + \Delta r/r)^3} = 8{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\,.$$

   V času, ko ta napetost pade za 1000 V, je tok skozi upornik približno konstanten in lahko zapišemo

$$I = \frac{U_4}{R}$$

V tem času se naboj zmanjša za $\Delta e = It$, napetost pa za

$$\Delta U = \frac{\Delta e}{4\pi\varepsilon_0 r_4} = \frac{It}{4\pi\varepsilon_0 r_4} \qquad [3\text{ t.}]$$

Od tod dobimo iskani čas

$$t = \frac{\Delta U R\, 4\pi\varepsilon_0 r_4}{U_4} = \frac{\Delta U R\,(4\pi\varepsilon_0 r)^2}{e_1}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3\left(2 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3 = 0{,}23\ \mu\mathrm{s}\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

4. *Podatki:* $r_0 = 10$ mm, $l = 10$ cm, $I = 10$ A.

a) K sili na zanko prispeva le radialna komponenta magnetnega polja; sila je privlačna [2 t.]:

$$F = Il_z B_r = I\ 2\pi r_0\ \frac{3\mu_0 p_m \cos\varphi \sin\varphi}{4\pi r^3} \qquad [3\text{ t.}]$$

Velja:

$$\cos\varphi = \frac{l}{r}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{r_0}{r}\,, \qquad r = \sqrt{l^2 + r_0^2}\,.$$

Vstavimo še $p_m = \pi r_0^2\, I$ in dobimo

$$F = \frac{3\pi\mu_0 l r_0^4 I^2}{2\sqrt{l^2 + r_0^2}^{\,5}} = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}\,. \qquad [1\text{ t.}]$$

b) Za $r_0 \ll l$ velja $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx r_0/l$ in $r \approx l$ in

$$F = \frac{3\pi\mu_0 r_0^4 I^2}{2l^4} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\ \frac{p_m^2}{l^4}\,. \qquad [4\text{ t.}]$$

Sila torej pojema s četrto potenco razdalje.

Skupina III – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* v_1, v_2, d, (360°), (180°), (90°)

   Prvi drsalec se giblje s komponento hitrosti v_1; drugi z $-v_2$. Hitrost težišča drsalcev dobimo iz ohranitve skupne gibalne količine:

   $$v^* = \frac{mv_1 - mv_2}{2m} = \frac{v_1 - v_2}{2}\,, \qquad [2 \text{ t.}]$$

   obodno hitrost drsalcev pri vrtenju okrog skupnega težišča pa iz ohranitve vrtilne količine za os v težišču:

   $$2mrv_o = mrv_1 + mrv_2\,, \qquad v_o = \frac{v_1 + v_2}{2}\,. \qquad [2 \text{ t.}]$$

   a) ko se zavrtita za poln kot, kaže obodna hitrost prvega drsalca v smeri, v kateri se je prvotno gibal. Da dobimo celotno hitrost, moramo prišteti še hitrost tešišča:

   $$v_1' = v_o + v^* = v_1\,.$$

   Podobno velja za drugega drsalca:

   $$v_2' = -v_o + v^* = -v_2\,. \qquad [2 \text{ t.}]$$

   b) Ko se zavrtita za 180°, ima obodna hitrost nasproten znak kot v primeru a), torej

   $$v_1'' = -v_o + v^* = -v_2\,.$$

   in

   $$v_2'' = v_o + v^* = v_1\,. \qquad [2 \text{ t.}]$$

   Drsalca torej zamenjata hitrosti.

   c) V tem primeru kaže obodna hitrost v smeri pravokotno na prvotno smer gibanja. Če prvotno smer prvega drsalca v smeri osi x, velja (zadošča ena od obeh možnosti za komponento y):

   $$v_{1x}''' = v^* = \frac{v_1 - v_2}{2}\,, \qquad v_{1y}''' = \pm v_o = \pm\frac{v_1 + v_2}{2}\,,$$

   $$v_{2x}''' = v^* = \frac{v_1 - v_2}{2}\,, \qquad v_{2y}''' = \mp v_o = \mp\frac{v_1 + v_2}{2}\,, \qquad [2 \text{ t.}]$$

2. *Podatki:* $t = 1$ dan, $l = 1$ m, $M = 1$ kg, $\Delta t = 6$ min, $m = 50$ g

Preden dodamo maso m je krožilna frekvenca enaka

$$\omega_\circ = \sqrt{\frac{Mgl}{Ml^2}} = \sqrt{g/l}. \qquad [1 \text{ t.}]$$

Z dodano maso spremenimo tako lego težišča nihala, kot tudi vztrajnostni moment nihala:

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)gd^*}{Ml^2 + md^2}}.$$

Iz definicije težišča sledi $(M+m)d^* = Ml + md$. Torej

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g(Ml+md)}{Ml^2+md^2}} = \sqrt{\frac{gMl(1+md/Ml)}{Ml^2(1+md^2/Ml^2)}}, \\ \omega &= \sqrt{g/l}\sqrt{\frac{1+md/Ml}{1+md^2/Ml^2}} = \omega_\circ\sqrt{\frac{1+md/Ml}{1+md^2/Ml^2}}. \end{aligned} \qquad [4 \text{ t.}]$$

Vpeljemo $x = d/l$ in

$$k = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{t}{t+\Delta t}\right)^2 \qquad [2 \text{ t.}]$$

in dobimo

$$\frac{m}{M}x^2 - k\frac{m}{M}x + 1 - k = 0$$

z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4(1-k)\frac{M}{m}}}{2}$$

$d_1 = x_1 l = 78$ cm in $d_2 = x_2 l = 22$ cm. [3 t.]

3. *Podatki:* $v_1 = 8,0$ m/s, $\nu_1 = 1000$ Hz, $\nu_2 = 1001$ Hz, $\tau = 977$ ms, $c = 1500$ m/s

Naj bosta v_1 in v_2 hitrosti prve in druge podmornice, ter ν frekvenca oddanega signala s prve podmornice, merjeno v koordinatnem sistemu le–te. S transformacijo v koordinatni sistem medija pridobimo faktor $\frac{1}{1-\frac{v_1}{c}}$ (plovilo 1 je gibajoč se izvir), z nadaljno transformacijo v sistem druge podmornice pa še faktor $1 + \frac{v_2}{c}$ (plovilo 2 je gibajoč se sprejemnik). Odboj zvoka gledamo v koordinatnem sistemu drugega plovila: odbije se z enako frekvenco, kot jo ima vpadlo valovanje. Sledita še dve transformaciji, najprej v sistem medija, in nato končno nazaj v sistem prve podmornice. Pri teh transformacijah upoštevamo, da sta zdaj vlogi izvira in poslušalca zamenjani (prvo plovilo je poslušalec, drugo pa izvir). Dobimo naslednjo enačbo za sprejeto frekvenco:

$$\nu' = \nu\left(\frac{1}{1-\frac{v_1}{c}}\right)\left(1+\frac{v_2}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{v_2}{c}}\right)\left(1+\frac{v_1}{c}\right) = \nu\,\frac{(1+v_1/c)(1+v_2/c)}{(1-v_1/c)(1-v_2/c)}.$$

[4 t.]

V našem primeru sta bila oddana dva signala. Če označimo čas med dvema zaznanima utripoma s τ, velja $\nu_2' - \nu_1' = 1/\tau$. Dobimo:

$$1/\tau = \nu_2' - \nu_1' = (\nu_2 - \nu_1)\frac{(1+v_1/c)(1+v_2/c)}{(1-v_1/c)(1-v_2/c)}, \qquad [3 \text{ t.}]$$

Od tod sledi

$$\frac{1+v_2/c}{1-v_2/c} = \frac{1-v_1/c}{1+v_1/c}\,\frac{1}{(\nu_2-\nu_1)\tau} \equiv K.$$

Tu smo si pomagali z okrajšavo K, kjer

$$K = \frac{1-(8,0\,\mathrm{ms^{-1}}/1500\,\mathrm{ms^{-1}})}{1+(8,0\,\mathrm{ms^{-1}}/1500\,\mathrm{ms^{-1}})}\,\frac{1}{0,977\,\mathrm{s}\cdot 1\,\mathrm{s^{-1}}} = 1,0127\,.$$

Izračunajmo v_2:

$$c + v_2 = Kc - Kv_2,$$

$$v_2 = c\,\frac{K-1}{K+1} = 0,0063 \cdot 1500\,\mathrm{m/s} = 9{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

Druga podmornica se giblje proti prvi podmornici. [3 t.]

4. *Podatki:* $e_0 = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ As, $m_0 = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, 300 km/s, $B_z = B_0 =$ 10 mT, $\Delta B = 0,01$ mT, $a = 1 \cdot 10^{-5}$ T/m.

a) Magnetna sila ohranja proton na krožnici, zato dobimo

$$\omega = \frac{e_0 B_0}{m_p} \ , \qquad t_0 = \frac{2\pi m}{e_0 B_0} = 6{,}56\ \mu\text{s} \ , \qquad r_0 = \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0} = 31{,}3 \text{ cm} \ . \quad [2 \text{ t.}]$$

b) Proton ima zaradi dveh različnih magnetnih polj dva polmera kroženja, v vsakem polprostoru drugega. V močnejšem polju kroži s polmerom

$$r_1 = \frac{v_0 m_p}{e_0(B_0 + \Delta B)} \approx \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0}\left(1 - \frac{\Delta B}{B_0}\right) = r_0\left(1 - \frac{\Delta B}{B_0}\right)$$

in v šibkejšem polju s polmerom

$$r_2 = \frac{v_0 m_p}{e_0(B_0 - \Delta B)} \approx \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0}\left(1 + \frac{\Delta B}{B_0}\right) = r_0\left(1 + \frac{\Delta B}{B_0}\right) \ .$$

V enem obhodu se zato proton premakne vzdolž osi y za

$$\Delta y = 2(r_2 - r_1) = 4r_0\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{4v_0 m_p \Delta B}{e_0 B_0^2} = 1{,}25 \text{ mm} \ . \qquad [4 \text{ t.}]$$

c) Oceno dobimo tako, da prostor podobno kot v delu (b) razdelimo na dva polprostora in v vsakem računamo s homogenim magnetnim poljem, ki ustreza povprečnemu magnetnemu polju, ki deluje na proton v enem in drugem polprostoru. Smer povprečnega gibanja protona ostaja pozitivna os y.

Za oceno lahko vzamemo $\Delta B = ar_0/2$ ali $\Delta B = ar_0$, kar da

$$\Delta y = 2(r_2 - r_1) = 2\frac{ar_0^2}{B_0} = 0{,}20 \text{ mm} \quad \text{oz.} \quad \Delta y = 4\frac{ar_0^2}{B_0} = 0{,}40 \text{ mm}$$

in hitrost

$$v_y = \frac{1}{\pi}\left(\frac{amv_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 30 \text{ m/s} \quad \text{oz.} \quad v_y = \frac{2}{\pi}\left(\frac{amv_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 60 \text{ m/s}$$

Za pravilno štejemo vsak rezultat med 30 m/s in 60 m/s. [4 t.]

Korekten izračun da rezultat

$$v_y = \frac{1}{2}\left(\frac{amv_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 47 \text{ m/s} \ .$$

Če povprečimo B_z v vsakem polprostoru, v prvem redu dobimo

$$\langle B_1 \rangle = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} (B_0 + ar_0 \sin(\omega t))\ dt = B_0 + \frac{2}{\pi}ar_0 \ ,$$

kar da za hitrost

$$v_y = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{amv_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 38 \text{ m/s} \ .$$