Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

59. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Kranj, 24. 4. 2021

Skupina I

1. Na avtocesti je nekaj 5 km dolgih odsekov, na katerih je hitrost omejena na 100 km/h. Na teh odsekih poteka sekcijsko merjenje hitrosti vozil, kar pomeni, da merilne naprave merijo čas, ki ga potrebuje vozilo, da prevozi celoten odsek.

   a) V kolikšnem času vozilo prevozi tak odsek, če vozi natanko 100 km/h?

   V nadaljevanju zanemari čas, ki ga vozila potrebujejo za zaviranje in pospeševanje.

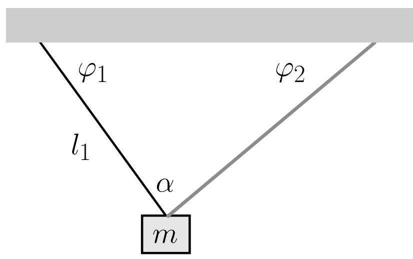
   b) Zaradi del na cesti je na delu takega odseka hitrost omejena na 60 km/h. Neko vozilo celoten odsek prevozi z največjo dovoljeno hitrostjo na posameznem delu odseka. Celoten odsek prevozi v 3,20 min. Kako dolg je del odseka ceste, kjer potekajo dela na cesti?

   c) Na drugem takem odseku je predor, v katerem zaradi prometne nesreče velja omejitev hitrosti. Prvo vozilo, ki vozi povsod z največjo dovoljeno hitrostjo, prevozi celoten odsek v 3,30 min. Drugo vozilo, ki v predoru vozi za 25 % prehitro in zunaj predora z največjo dovoljeno hitrostjo, prevozi celoten odsek v 3,06 min. Kako dolg je predor in kolikšna je omejitev hitrosti v predoru?

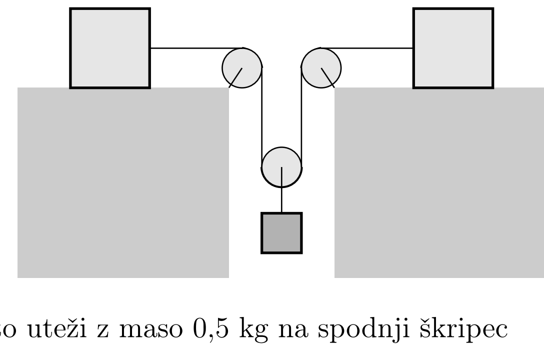
2. Utež z maso 200 g visi na vrvici z dolžino $l_1 = 10$ cm in elastiki s prožnostnim koeficientom 200 N/m, ki sta pritrjeni na strop, kot kaže slika.

   a) V ravnovesju sta kota, ki ju vrvica in elastika oklepata s stropom, enaka $\varphi_1 = \varphi_2 = 30°$. Kolikšen je raztezek elastike in kolikšna je njena neraztegnjena dolžina?

   b) Kolikšno maso moramo obesiti namesto uteži, da bo kot α med vrvico in elastiko točno 90°? *Namig*: Razdaljo med pritrdiščema izračunaj s podatki iz vprašanja a); pri vprašanju b) si pomagaj s tem, da vrvica, elastika in daljica med pritrdiščema tvorijo pravokotni trikotnik.



3. V vodoravna tla je izvrtan navpični jašek. V jašku je utež z maso 0,5 kg, ki je preko sistema lahkih škripcev z lahko neraztegljivo vrvico povezana z dvema enakima kladama z masama po 2,0 kg na tleh zunaj jaška, kot kaže slika. Koeficient trenja med tlemi in kladama je enak za obe kladi.



   a) Kolikšen je koeficient trenja med tlemi in kladama, če se kladi gibljeta enakomerno z nasprotno enakima hitrostma?

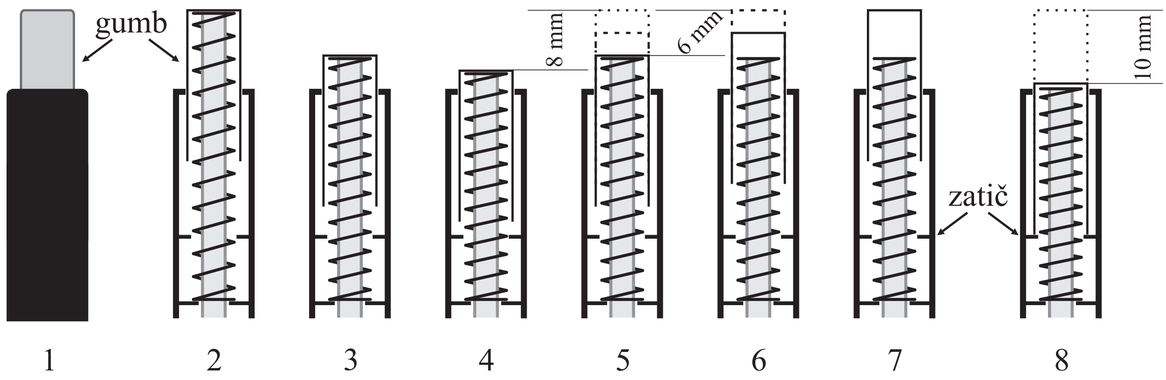
   b) S kolikšnim pospeškom se gibljeta kladi, če namesto uteži z maso 0,5 kg na spodnji škripec obesimo utež z maso 1,0 kg?

   c) Desno klado zaustavimo. Med mirovanjem desne klade se v nekem trenutku leva klada giblje s hitrostjo 1 m/s. S kolikšno hitrostjo se takrat giblje utež?

   d) S kolikšnim pospeškom se med mirovanjem desne klade giblje leva klada in s kolikšnim pospeškom utež z maso 1,0 kg ?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Miha se igra s kemičnim svinčnikom z vzmetjo z zatičem. Elastični koeficient vzmeti je 25 N/cm, masa kemičnega svinčnika je 50 g. Da bo opis dogajanja čim bolj nazoren, imenujmo dve značilni stanji kemičnega svinčnika *vklopljeno* in *izklopljeno*. Ko je konica mince zunaj ohišja in lahko pišemo, je kemični svinčnik vklopljen, ko je minca v ohišju, je izklopljen. Med obemi stanji preklapljamo z ustreznim pritiskom na gumb na zadnjem delu kemičnega svinčnika (slika 1). Slike od 2 do 7 od leve proti desni kažejo preklop iz izklopljenega v vklopljeno stanje, iste slike od desne proti levi kažejo preklop iz vklopljenega v izklopljeno stanje. Na slikah so označeni značilni skrčki vzmeti med dogajanjem: ko je kemični svinčnik izklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet nenapeta oziroma je skrček vzmeti nič (slika 2). Ko je kemični svinčnik vklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet stisnjena za 6,0 mm (slike 5, 6, 7). Preklop med stanjema se zgodi, ko se vzmet stisne za najmanj 8,0 mm (slika 4). Največji skrček vzmeti je 10,0 mm, ker se takrat gumb nasloni na zatič, ki preprečuje, da bi se vzmet stisnila še bolj (slika 8).



Pomembno: Pri vseh vprašanjih govorimo o višini kemičnega svinčnika nad podlago. Pri vseh poskusih v nadaljevanju je kemični svinčnik postavljen navpično z gumbom navzdol in s konico proti stropu (ravno obratno, kot na slikah). Zaradi te orientacije je gumb v obeh stanjih kemičnega svinčnika v skrajni legi (sliki 2 in 7). Dogovorimo se, da višino kemičnega svinčnika **vedno** merimo od podlage do spodnje ploskve gumba.

Vsa prožnostna energija kemičnega svinčnika je le prožnostna energija vzmeti.

a) Do katere višine se odbije izklopljen kemični svinčnik, če ga Miha spusti s take višine H, da med odbojem ostane izklopljen? Najmanj s kolikšne višine je potrebno spustiti izklopljen kemični svinčnik, da se med odbojem vklopi?

b) Do kolikšne višine se odbije kemični svinčnik iz vprašanja a), če ga spustimo ravno z mejne višine za preklop?

c) Miha kemični svinčnik z gumbom postavi na podlago in pritisne ohišje navzdol, da je gumb povsem v ohišju (kot na sliki 8) in je vzmet najbolj skrčena. Do kolikšne višine odskoči kemični svinčnik, če je bil pred pritiskom gumba ob podlago izklopljen? Do kolikšne višine pa odskoči, če je bil vklopljen?

59. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Kranj, 24. 4. 2021

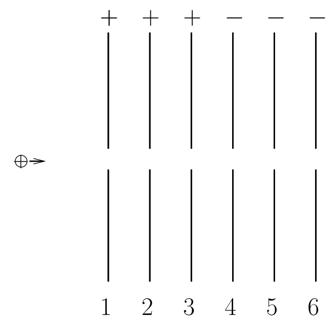
Skupina II

1. Proton z osnovnim nabojem nabojem $+e_0$ vstopi z zanemarljivo majhno začetno hitrostjo v serijo šestih enakih vzporednih razsežnih plošč, kot kaže slika. Razdalja med zaporednimi ploščami je 1,0 cm, v sredini plošč so majhne luknjice, ki protonu omogočajo prehod skozi plošče. Smer gibanja protona je ves čas pravokotna na ravnino plošč. Ploščinska gostota naboja na prvih treh ploščah je 1,0 μAs/m^2, ploščinska gostota naboja na zadnjih treh ploščah pa je enako velika, a nasprotnega predznaka, kot kaže slika.

   a) Kolikšna je električna poljska jakost v prostoru med prvo in drugo ploščo?

   b) Izračunaj električno napetost med pari zaporednih plošč; med prvo in drugo, med drugo in tretjo, ... ter med peto in šesto.

   c) Kolikšna je hitrost protona, ko zapusti plošče?



2. Na vir enosmerne napetosti 60 V brez notranjega upora vežemo preko stikala porabnik z uporom 5 Ω. Zaporedno k porabniku vežemo tudi dve različni med seboj vzporedno vezani varovalki. Varovalki vsebujeta bakreni žički z različnima dolžinama, daljša z dolžino 10 mm in krajša z dolžino 5,0 mm. Presek vsake žičke je 0,010 mm^2. Podatki za baker: gostota je 8920 kg/m^3, specifična toplota je 380 J/kg K, tališče je 1080 °C, povprečni specifični upor v temperaturnem intervalu od 20 °C do tališča je $5{,}0 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Začetna temperatura žičk je 20 °C. Stik v varovalki se prekine takoj, ko se žička začne taliti. Žički v varovalkah sta toplotno izolirani.

   Stikalo vklopimo. Ker ima porabnik premajhen upor, varovalki v relativno kratkem času po vklopu pregorita.

   a) Kolikšen je tok skozi porabnik in kolikšna je napetost na varovalkah, preden pregorita?
   b) Katera varovalka pregori prva in po kolikšnem času od vklopa stikala?
   c) Kolikšno temperaturo ima žička druge varovalke v trenutku, ko prva pregori?
   d) Kolikšna je napetost na drugi varovalki, potem ko prva pregori?

3. Iz štirih enakih aluminijastih palic s presekom 10 mm^2 in dolžino 1,0 m zvarimo tog kvadraten okvir. Vklopimo homogeno magnetno polje z gostoto 1,0 T. Magnetno polje je pravokotno na ravnino okvirja. V okvir vežemo vir z gonilno napetostjo 1,0 V, ki poganja tok v takšni smeri, da ima nastalo magnetno polje nasprotno smer kot zunanje polje. Predpostavi, da ima okvir ves čas kvadratno obliko in da je magnetno polje zaradi toka po okvirju zanemarljivo v primerjavi z zunanjim poljem. Okvir je toplotno izoliran in ne izmenjuje toplote z okolico. Aluminij ima gostoto 2700 kg/m^3 , specifično toploto 900 J/kg K, koeficient linearnega temperaturnega raztezka $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, elastični modul $E = 70$ GPa in specifični upor $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

   a) Kolikšna je magnetna sila na posamezno stranico okvirja?
   b) Za koliko se eno sekundo po vključitvi okvir segreje zaradi električnega toka?
   c) Kolikšna je tedaj relativna sprememba dolžine ($\Delta l/l$) posamezne stranice?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Pokončno kovinsko valjasto posodo, v kateri je zrak, na vrhu zapira premični bat. Skupna masa posode, bata in zraka je 1,0 kg. Posodo potapljamo v jezeru. Ko je posoda tik pod gladino, je prostornina zraka v posodi 1,5 litra, zračni tlak v posodi je 98 kPa in je razdalja od dna jezera do dna posode natančno 10 m. Pri računanju vzgona zanemari prostornino sten posode in bata.

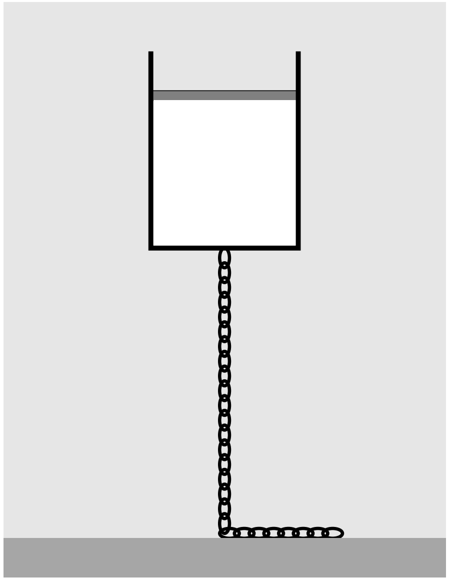
   a) Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo tik pod gladino?

   b) Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo, ko je posoda tik nad dnom jezera? Ali obstaja globina, na kateri je vsota sil enaka nič? Svoj odgovor utemelji s kratko povedjo.

   c) Na dno posode pričvrstimo verigo z dolžino 10 m in maso 1,0 kg, tako da veriga sega ravno do dna, ko je posoda tik pod gladino. Tik pod gladino je zdaj v posodi 2,2 litra zraka in tlak 98 kPa. Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo, ko je tik nad dnom jezera?

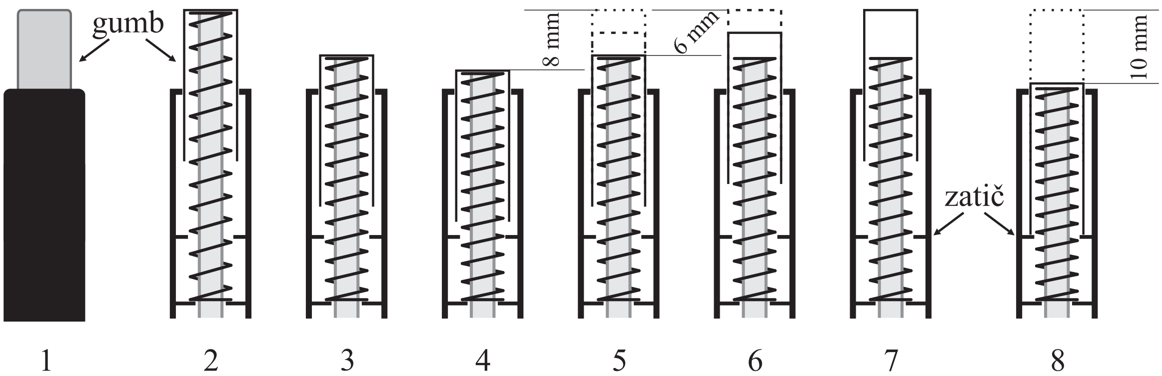
      Vzgon na verigo zanemari.

   d) V primeru c) poišči globine, v katerih je vsota sil na posodo enaka nič.



Skupina III

1. Miha se igra s kemičnim svinčnikom z vzmetjo z zatičem. Elastični koeficient vzmeti je 25 N/cm, masa kemičnega svinčnika je 50 g. Da bo opis dogajanja čim bolj nazoren, imenujmo dve značilni stanji kemičnega svinčnika *vklopljeno* in *izklopljeno*. Ko je konica mince zunaj ohišja in lahko pišemo, je kemični svinčnik vklopljen, ko je minca v ohišju, je izklopljen. Med obemi stanji preklapljamo z ustreznim pritiskom na gumb na zadnjem delu kemičnega svinčnika (slika 1). Slike od 2 do 7 od leve proti desni kažejo preklop iz izklopljenega v vklopljeno stanje, iste slike od desne proti levi kažejo preklop iz vklopljenega v izklopljeno stanje. Na slikah so označeni značilni skrčki vzmeti med dogajanjem: ko je kemični svinčnik izklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet nenapeta oziroma je skrček vzmeti nič (slika 2). Ko je kemični svinčnik vklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet stisnjena za 6,0 mm (slike 5, 6, 7). Preklop med stanjema se zgodi, ko se vzmet stisne za najmanj 8,0 mm (slika 4). Največji skrček vzmeti je 10,0 mm, ker se takrat gumb nasloni na zatič, ki preprečuje, da bi se vzmet stisnila še bolj (slika 8).



Pomembno: Pri vseh vprašanjih govorimo o višini kemičnega svinčnika nad podlago. Pri vseh poskusih v nadaljevanju je kemični svinčnik postavljen navpično z gumbom navzdol in s konico proti stropu (ravno obratno, kot na slikah). Zaradi te orientacije je gumb v obeh stanjih kemičnega svinčnika v skrajni legi (sliki 2 in 7). Dogovorimo se, da višino kemičnega svinčnika **vedno** merimo od podlage do spodnje ploskve gumba.

Vsa prožnostna energija kemičnega svinčnika je le prožnostna energija vzmeti.

a) Do katere višine se odbije izklopljen kemični svinčnik, če ga Miha spusti s take višine H, da med odbojem ostane izklopljen? Najmanj s kolikšne višine je potrebno spustiti izklopljen kemični svinčnik, da se med odbojem vklopi?

b) Do kolikšne višine se odbije kemični svinčnik iz vprašanja a), če ga spustimo ravno z mejne višine za preklop?

c) Kolikšna je maksimalna višina, ki jo lahko doseže kemični svinčnik po odboju? S kolikšne najmanjše višine mora Miha spustiti kemični svinčnik, da po odboju doseže maksimalno višino? Naj bo kemični svinčnik, preden ga spusti, vklopljen ali izklopljen?

Prosim, obrni list, na drugi strani so še tri naloge.

2. Na nastavljiv vir enosmerne napetosti brez notranjega upora vežemo porabnik z uporom 5 Ω. Zaporedno k porabniku vežemo tudi dve različni med seboj vzporedno vezani varovalki. Varovalki vsebujeta bakreni žički z različnima dolžinama, daljša z dolžino 10 mm in krajša z dolžino 5,0 mm, polmer vsake žičke je 0,060 mm. Tališče bakra je pri 1080 °C. Povprečni specifični upor bakra je $5{,}0 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Privzemi, da specifični upor bakra ni odvisen od temperature. Stik v varovalki se prekine takoj, ko se žička začne taliti.

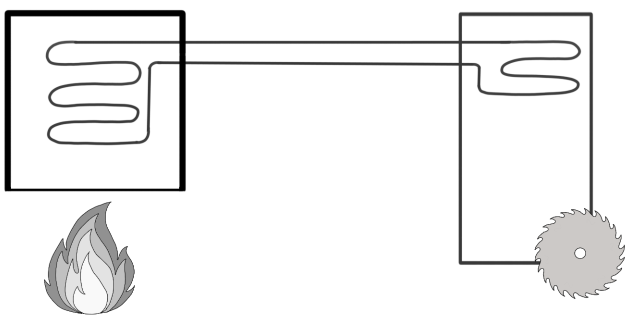
   Napetost na viru je najprej nič, nato napetost enakomerno večamo dovolj počasi, da ima vsaka žička ves čas ravnovesno temperaturo. Žički v varovalkah oddajata toploto samo s sevanjem, varovalki sta dovolj daleč druga od druge, da temperatura ene ne vpliva na temperaturo druge. Zanemari toplotni tok, ki ga žički s sevanjem prejemata iz okolice.

   a) Kolikšen je tok skozi porabnik in kolikšna je napetost na varovalkah, ko je napetost na viru 1,5 V?
   b) Katera varovalka pregori prva in kolikšna je takrat napetost na viru?
   c) Kolikšno temperaturo ima žička druge varovalke v trenutku, ko prva pregori?

3. Iz štirih enakih aluminijastih palic s presekom 10 mm^2 in dolžino 1,0 m zvarimo tog kvadraten okvir. Nato vklopimo homogeno magnetno polje, ki od začetne vrednoti nič enakomerno narašča s hitrostjo 1,0 T/s. Magnetno polje je pravokotno na ravnino okvirja. Predpostavi, da ima okvir ves čas kvadratno obliko in zanemari efekte zaradi lastne indukcije okvirja. Okvir je toplotno izoliran in ne izmenjuje toplote z okolico. Aluminij ima gostoto 2700 kg/m^3, specifično toploto 900 J/kg K, koeficient linearnega temperaturnega raztezka $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, elastični modul $E = 70$ GPa in specifični upor $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

   a) Kolikšna je magnetna sila na posamezno stranico okvirja eno sekundo po vklopu polja?
   b) Za koliko se do takrat okvir segreje zaradi električnega toka?
   c) Kolikšna je takrat relativna sprememba dolžine ($\Delta l/l$) posamezne stranice okvirja?

4. Idealni (Carnotov) toplotni stroj deluje med dvema toplotnima rezervoarjema, enega predstavlja bojler, kjer delovno snov segrevamo, drugega predstavlja okolica s stalno temperaturo 27 °C. Bojler ima obliko kocke s stranico 20 cm. Notranjost bojlerja grejemo skozi spodnjo stranico, skozi katero v bojler teče stalni toplotni tok 5,0 kW. Stene ostalih petih mejnih ploskev bojlerja (4 stranice in strop) so iz snovi s toplotno prevodnostjo 1,0 W/m K in imajo debelino 1,0 cm. Dovedena toplota stroju je razlika med toploto, ki jo dovajamo notranjosti bojlerja, in toploto, ki uhaja v okolico skozi mejne ploskve bojlerja. Na stroj priključimo žago in z regulacijo ventilov na stroju nastavljamo izhodno mehansko moč, ki jo prejema žaga.



   a) Kolikšen je izkoristek stroja, ko je temperatura v bojlerju 100 °C? Kolikšno mehansko moč tedaj prejema žaga?
   b) Kolikšna je lahko temperatura v bojlerju, da je mehanska moč, ki jo prejema žaga, 500 W?
   c) Kolikšno največjo mehansko moč lahko prejema žaga?

1. $s_0 = 5\,\mathrm{km}$, $v_0 = 100\,\mathrm{km/h}$, $v_1 = 60\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = v_0 = 100\,\mathrm{km/h}$, $t_0 = 5{,}20\,\mathrm{min}$, $t_1 = 3{,}30\,\mathrm{min}$, $t_2 = 3{,}06\,\mathrm{min}$, $\eta = 1{,}25$.

a) Gre za enakomerno gibanje, tako da vozilo celotno pot prevozi v času

$$t = \frac{s_0}{v_0} = 3\,\mathrm{min}\,.$$

[1 t.]

b) Zapišemo čas, ki ga vozilo potrebuje da prevozi celoten 5 km odsek avtoceste:

$$t_0 = \frac{\Delta x}{v_1} + \frac{s_0 - \Delta x}{v_2}$$

in od tod izrazimo Δx:

$$\Delta x = \frac{t_0 - s_0/v_2}{1/v_1 - 1/v_2} = 0{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

[4 t.]

c) Najprej zapišemo čas, ki ga za celoten 5 km odsek avtoceste potrebuje vozilo, ki vozi natanko po omejitvah

$$t_1 = \frac{s_0 - x}{v_0} + \frac{x}{v}$$

in nato še celoten čas, ki ga za celoten 5 km odsek avtoceste potrebuje vozilo, ki vozi v predoru 25% prehitro:

$$t_2 = \frac{s_0 - x}{v_0} + \frac{x}{\eta v}\,.$$

Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama in dobimo rešitev za dolžino predora

$$x = s_0 + v_0 \frac{t_1 - \eta t_2}{\eta - 1} = 1{,}5\,\mathrm{km}$$

ter za omejitev hitrosti v predoru

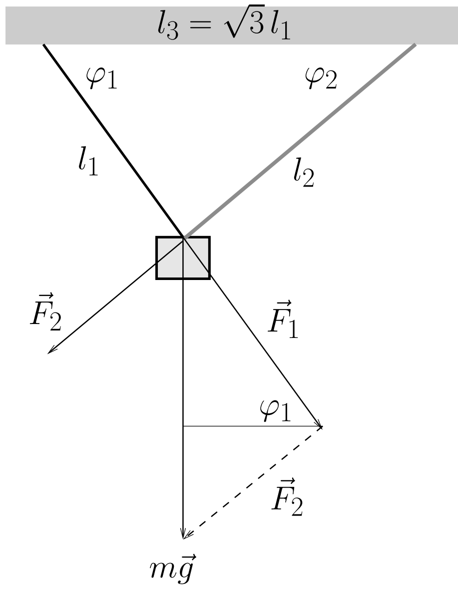
$$v = \frac{v_0(t_1 - \eta t_2) + s_0(\eta - 1)}{\eta(t_1 - t_2)} = 75\,\mathrm{km/h}\,.$$

[5 t.]

2. $m = 200$ g, $l_1 = 10$ cm, $k = 200$ N/m

a) $\varphi_1 = \varphi_2 = 30°$ V tem primeru je trikotnik, ki ga tvorita vrvica in elastika enakokrak, in je dolžina raztegnjene elastike $l_2 = l_1$. Ker je $\varphi_1 = 30°$, je kot med silo F_1 in težo enak $60°$. Zaradi simetrije sta velikosti sil F_1 in F_2 enaki in sila F_2 s težo tvori prav tako kot $60°$. Vse tri sile torej tvorijo enakostranični trikotnik, zato velja

$$F_1 = F_2 = mg\,.$$



Iz $F_2 = ks$ sledi za raztezek s:

$$s = \frac{F_2}{k} = \frac{mg}{k} = 0{,}98 \text{ cm} \approx 1{,}0 \text{ cm}\,.$$

Dolžina neraztegnjene elastike pa je

$$l_0 = l_2 - s = 9{,}0 \text{ cm}\,.$$

[4 t.]

Do enakega rezultata seveda pridemo, če delamo s trigonometričnimi funkcijami. Enačbe za ravnovesje uteži zapišemo v vodoravni in navpični smeri:

$$F_1 \cos\varphi_1 - F_2 \cos\varphi_2 = 0\,, \qquad F_1 \sin\varphi_1 + F_2 \sin\varphi_2 = mg\,. \tag{1}$$

Ker sta kota enaka, sledi $F_1 = F_2$ in, enako kot zgoraj:

$$s = \frac{F_2}{k} = \frac{mg}{2\sin\varphi_2\, k} = \frac{mg}{2\sin 30°\, k} = \frac{mg}{k}\,.$$

b) V primeru **a)**, ko sta kota enaka $30°$, lahko izračunamo, da je razmik med obesiščema, l_3, ravno enak dvojni višini enakostraničnega trikotnika s stranico l_1, $l_3 = 2\,l_1\sqrt{3}/2 = l_1\sqrt{3}$. Ker je v primeru **b)** trikotnik pravokoten, lahko izračunamo drugo kateto (dolžino elastike) iz Pitagorovega izreka:

$$l_2 = \sqrt{l_3^2 - l_1^2} = \sqrt{2l_1^2} = l_1\sqrt{2}\,.$$

Vse tri sile tvorijo pravokotni trikotnik, kot je prikazano na sliki. Trikotnik sil je podoben trikotniku, ki ga tvorita vrvica in elastika z vodoravnico. Kot med F_1 in težo je enak φ_2. Velja:

$$mg : F_1 : F_2 = l_3 : l_2 : l_1\,, \qquad mg = F_2\,\frac{l_3}{l_1} = \sqrt{3}\,F_2\,.$$

Za silo, ki napenja elastiko, velja:

$$F_2 = k(l_2 - l_0) = k(l_1\sqrt{2} - l_0)\,.$$

Sledi

$$mg = \sqrt{3}\,F_2 = \sqrt{3}\,k(l_1\sqrt{2} - l_0)\,, \qquad m = \frac{\sqrt{3}\,k(l_1\sqrt{2} - l_0)}{g} = 1{,}8 \text{ kg}\,. \tag{2}$$

[6 t.]

Če računamo s kotnimi funkcijami, lahko vrednosti kotov izrazimo iz trikotnika, ki ga tvorita vrvica in elastika:

$$\sin\varphi_1 = \frac{l_2}{l_3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad \cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{l_1}{l_3} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,, \qquad \cos\varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Iz enačb za ravnovesje (1) sledi enako kot v (2):

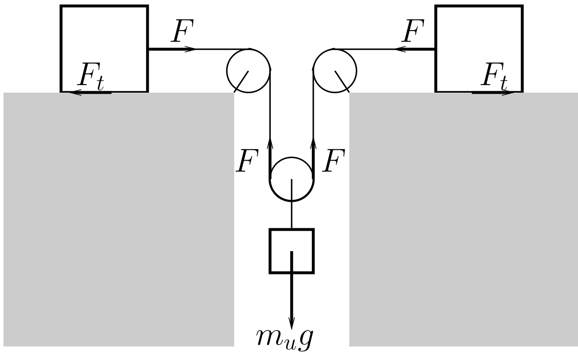
$$mg = F_1 \sin\varphi_1 + F_2 \sin\varphi_2 = F_2\left(\tan\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\right) = F_2\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = F_2\sqrt{3}\,.$$

3. $m = 2$ kg, $m_u = 0{,}5$ kg, $m'_u = 2m_u = 1$ kg, $v = 1$ m/s.

a) Teža uteži uravnovesi trenje na levo in desno klado:

$$m_u g = 2F_t = 2mgk_t\,, \qquad k_t = \frac{m_u}{2m} = 0{,}125\,.$$

[2 t.]



b) Za vsako od klad velja 2. Newtonov zakon

$$ma = F - F_t = F - mgk_t\,,$$

če z F označimo silo vrvice. Na utež pa deluje teža in sila dveh vrvic v nasprotni smeri kot teža. Ker je vrvica toga, se utež giblje z enakim pospeškom kot vsaka od klad, torej:

$$m'_u a = m'_u g - 2F = m'_u g - 2ma - 2mgk_t\,.$$

Preuredimo:

$$(m'_u + 2m)a = m'_u g - 2mgk_t\,, \qquad a = \frac{(m'_u - 2mk_t)g}{m'_u + 2m} = 0{,}98\ \mathrm{m/s^2} \approx 1{,}0\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

[4 t.]

c) Ko se leva klada premakne za določeno razdaljo, se utež spusti le za polovico te razdalje, torej je tudi hitrost uteži le polovico hitrosti klade, $v_u = v/2 = 0{,}5$ m/s.

[2 t.]

d) Za pospešek leve klado velja enaka enačba kot pri b):

$$ma = F - mgk_t\,.$$

Z enakim razmislekom kot pri c) ugotovimo, da je pospešek uteži le polovico pospeška leve klade. Ker so škripci lahki, ne vplivajo na silo (napetost) v vrvici, zato del vrvice na desni vleče utež z enako silo kot na levi:

$$m'_u \frac{a}{2} = m'_u g - 2F\,.$$

Vstavimo silo iz prve enačbe in dobimo

$$\left(\frac{m'_u}{2} + 2m\right) a = m'_u g - 2mgk_t\,.$$

Pospešek klade je enak

$$a = \frac{(m'_u - 2mk_t)g}{\dfrac{m'_u}{2} + 2m} = 1{,}1\ \mathrm{m/s}\,,$$

pospešek uteži pa

$$a_u = \frac{a}{2} = 0{,}55\ \mathrm{m/s}\,.$$

[2 t.]

4. $k = 25$ N/cm, $m = 50$ g, $x_0 = 10{,}0$ mm, $x_1 = 8{,}0$ mm, $x_2 = 6{,}0$ mm.

a) Ko je kemični svinčnik izklopljen, je vzmet neobremenjena in je skrček enak nič. Kot pravi besedilo, je takrat spodnja ploskev gumba dvignjena nad podlago za H. Ko je kemični svinčnik v najnižji legi, je vzmet skrčena za x, hitrost kemičnega svinčnika pa je enaka nič. Od začetne točke se je kemični svinčnik spustil za $H + x$. Prožnostna energija vzmeti v najnižji točki je tolikšna, kolikor se je zmanjšala potencialna energija

$$mg(H + x) = \frac{1}{2}kx^2 \,. \qquad (1)$$

Če se kemični svinčnik ne preklopi, se bo vzmet med odbojem raztegnila nazaj na svojo neobremenjeno dolžino, torej bo v najvišji točki potencialna energija kemičnega svinčnika enaka začetni potencialni energiji. Kemični svinčnik se torej odbije do višine H, s katere smo ga spustili.

Mejna višina h_1 je dosežena takrat, ko je skrček vzmeti v najnižji točki enak x_1. Oba podatka nesemo v (1) in dobimo

$$h_1 = \frac{kx_1^2}{2mg} - x_1 = x_1\left(\frac{x_1}{y_0} - 1\right) = 155{,}3 \text{ mm} \approx 155 \text{ mm}\,,$$

kjer smo vpeljali značilno dolžino $y_0 = 2mg/k = 0{,}392$ mm, ker se veliko rezultatov v nadaljevanju lepo izrazi s pomočjo y_0. Seveda vpeljava y_0 za reševanje ni nujno potrebna.

[4 t.]

b) Ko se kemični svinčnik med odbojem preklopi v stanje *vključen*, se vzmet ne more več raztegniti do neobremenjene dolžine, ampak ostane skrčena za x_2. Zato ima v najvišji točki po doboju poleg potencialne energije tudi prožnostno. Postavimo potencialno energijo kemičnega svinčnika na nič takrat, ko se med padanjem spodnja ploskev gumba dotakne podlage. Tedaj dobimo iz ohranitve mehanske energije med najnižjo lego med odbojem in najvišjo lego po odboju enačbo

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - mgx_1 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh_1' \,. \qquad (2)$$

Iz (2) dobimo višino odboja h_1' kot

$$h_1' = \frac{k}{2mg}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - x_1 = x_1\left(\frac{x_1}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_1}\right) = h_1 - \frac{x_2^2}{y_0} = 63{,}4 \text{ mm} \approx 63 \text{ mm}\,.$$

[2 t.]

c) Ko je gumb najbolj potisnjen v ohišje, ima kemični svinčnik mehansko energijo

$$W = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0 \,. \qquad (3)$$

Ko je po odskoku najviše, ima lahko poleg potencialne energije tudi prožnostno, odvisno od tega, ali je vzmet skrčena ali je raztegnjena na neobremenjeno dolžino in je skrček enak nič.

<u>Možnost 1</u>: pred pritiskom gumba je kemični svinčnik *vklopljen*.

Ker ohišje potisnemo do podlage, presežemo mejni skrček x_1 za preklop in je po odskoku kemični svinčnik izklopljen. To pomeni, da se vzmet raztegne do neobremenjene dolžine in ima v najvišji točki pri višini h_0 kemični svinčnik samo potencilano energijo $W_0 = mgh_0$. Iz ohranitve energije $W_0 = W$ skupaj s (3) dobimo

$$h_0 = \frac{kx_0^2}{2mg} - x_0 = x_0\left(\frac{x_0}{y_0} - 1\right) = 245{,}1 \text{ mm} \approx 245 \text{ mm}\,.$$

<u>Možnost 2</u>: pred pritiskom gumba je kemični svinčnik *izklopljen*.

Ker ohišje potisnemo do podlage, presežemo mejni skrček x_1 za preklop in je po odskoku kemični svinčnik vklopljen. To pomeni, da vzmet ostane skrčena za x_2 in ima v najvišji točki pri višini h_2 kemični svinčnik poleg potencilane energije tudi prožnostno

$$W_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh_2\,. \tag{4}$$

Iz ohranitve energije $W_2 = W$ skupaj s (3) in (4) dobimo

$$h_2 = \frac{k}{2mg}\left(x_0^2 - x_2^2\right) - x_0 = x_0\left(\frac{x_0}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_0}\right) = h_0 - \frac{x_2^2}{y_0} = 153{,}3\ \mathrm{mm} \approx 153\ \mathrm{mm}\,.$$

[4 t.]

1. $d = 1{,}0$ cm, $\sigma = 1{,}0\ \mu\mathrm{As/m^2}$, $m = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg

a) Med prvo in drugo ploščo je jakost električnega polja enaka kot v kondenzatorju, pri katerem je na levi plošči pozitivni naboj z gostoto $+\sigma$, na desni pa skupni naboj drugih petih plošč $-\sigma$:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 1{,}12 \cdot 10^5\ \mathrm{V/m}\,.$$

[3 t.]

b) Med prvo in drugo ploščo je napetost enaka $U_{12} = Ed = 1{,}12$ kV.

Med drugo in tretjo ploščo je polje takšno kot v kondenzatorju, na katerem je na levi plošči naboj, ki je enak vsoti nabojev na prvi in drugi plošči, na desni pa naboj, enak vsoti nabojev tretje, četrte, pete in šeste plošče. Polje je zato dvakrat večje kot polje med prvo in drugo ploščo, in torej $U_{23} = 2Ed = 2{,}24$ kV.

Podobno sklepamo za naslednje pare plošč $U_{34} = 3Ed = 3{,}36$ kV, $U_{45} = 2Ed = 2{,}24$ kV in $U_{56} = Ed = 1{,}12$ kV.

[4 t.]

c) Proton prejme električno delo, ki je enako vsoti prispevkov vseh plošč:

$$A = e_0 U\,, \qquad U = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_{5,6} = 9Ed = 10{,}08\ \mathrm{kV}\,.$$

Delo se porabi za povečanje kinetične energije protona

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = e_0 U\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m}} = 1{,}39 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}\,.$$

[3 t.]

2. $U_0 = 60\,\mathrm{V}$, $R = 5{,}0\,\Omega$, $l_1 = 10{,}0\,\mathrm{mm}$, $l_2 = 5{,}0\,\mathrm{mm}$, $S = 0{,}010\,\mathrm{mm}^2$, $\rho = 8920\,\mathrm{kg/m}^3$, $c = 380\,\mathrm{J/kg\,K}$, $T_0 = 1080\,°\mathrm{C}$, $T_z = 20\ °\mathrm{C}$, $\zeta = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$.

a) Upora žičk sta

$$R_1 = \frac{\zeta l_1}{S} = 0{,}05\ \Omega\,; \qquad R_2 = \frac{\zeta l_2}{S} = R_1\frac{l_2}{l_1} = 0{,}025\ \Omega\,.$$

Nadomestni upor obeh varovalk skupaj je

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1\frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{3}R_1 = 0{,}01667\ \Omega\,.$$

Porazdelitve napetosti na zaporedno vezanih upornikih nam da napetost na varovalkah

$$U_n = U_0\frac{R_n}{R + R_n} = 0{,}1993\ \mathrm{V} \approx 0{,}20\ \mathrm{V} \approx 0{,}2\ \mathrm{V}\,.$$

Tok skozi porabnik je

$$I = \frac{U_0}{R + R_n} = 11{,}96\ \mathrm{A} \approx 12\ \mathrm{A}\,.$$

[3 t.]

b) Električno delo segreva posamezno žičko. Prejeto električno delo $P_i t = Q_i(t)$ viša temperaturo žičke $Q_i(t) = m_i c \Delta T(t) = \rho S l_i c \Delta T(t)$, kjer je indeks i enak 1 za daljšo in 2 za krajšo žičko. Ob upoštevanju električne moči $P_i = U_n^2/R_i$ in razlike temperatur $\Delta T(t) = T(t) - T_z$ dobimo za temperaturo posamezne žičke ob času t

$$T_i(t) = T_z + \frac{U_n^2}{\zeta \rho c l_i^2}t = T_z + \left(\frac{l_1}{l_i}\right)^2 k_1 t\,,$$

kjer smo s k_1 označili hitrost segrevanja daljše žičke z dolžino l_1 in je

$$k_1 = \frac{U_n^2}{\zeta \rho c l_1^2}\,.$$

Očitno se hitreje segreva krajša žička z dolžino l_2, saj manjši upor vodi do večjega toka in posledično večje moči, hkrati se segreva manjša masa bakra, iz katere je žička. Krajša žička se začne taliti po času t_a od vklopa stikala

$$t_a = \frac{(T_0 - T_z)}{k_1}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = 0{,}113\ \mathrm{s} \approx 0{,}11\ \mathrm{s}\,.$$

[4 t.]

c) Daljša žička se segreva štirikrat ($4 = (l_1/l_2)^2$) počasneje, zato se v času t_a, ko pregori krajša žička, segreje le do

$$T_1(t_a) = T_z + (T_0 - T_z)\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = T_z + \frac{T_0 - T_z}{4} = 285\ °\mathrm{C}\,.$$

[2 t.]

d) Ko krajša žička pregori, sta v vezju zaporedno vezana samo upornik in varovalka z daljšo žičko in uporom R_1. Napetost se deli podobno kot pri vprašanju a), torej dobimo

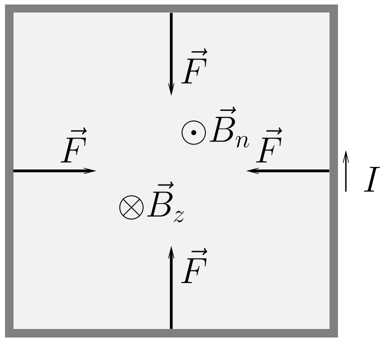
$$U_1 = U_0\frac{R_1}{R + R_1} = 0{,}5942\ \mathrm{V} \approx 0{,}59\ \mathrm{V} \approx 0{,}6\ \mathrm{V}\,.$$

[1 t.]

3. $S = 10$ mm^2, $l = 1{,}0$ m, $B_z = 1{,}0$ T, $U = 1{,}0$ V, $\rho = 2700$ kg/m^3, $c = 900$ J/kg K, $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $E = 70$ GPa, $\zeta = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm.
Ko vključimo vir napetosti, po okviru steče tok

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{4\zeta l} = 92{,}6\ \mathrm{A}\,.$$

Smer magnetne sile na stranico okvira določimo z naslednjim razmislekom. Naj zunanje $\vec{B}_z$ polje kaže pravokotno v list, tako kot kaže slika. Naloga zahteva, da ima tok po vključitvi vira takšno smer, da je smer magnetnega polja $\vec{B}_n$, ki je posledica tega toka, nasprotna zunanjemu polju. Kot kaže slika, teče tok v nasprotni smeri premikanja urinega kazalca, nastalo magnetno polje pa kaži iz lista. Za magnetno silo na stranico velja



$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}_z\,, \qquad F = IlB = 92{,}6\ \mathrm{N}\,.$$

Smer sile kaže v notranjost okvira.

Če bi na začetku izbrali smer zunanjega polja iz lista, bi tok tekel v smeri premikanja urinega kazalca, a sila bi še vedno kazala v notranjost okvira.

[4 t.]

b)

Stranice se segrevajo in zaradi tega raztezajo. Okvir se segreje za

$$\Delta T = \frac{Pt}{mc} = \frac{U^2 St}{4\zeta l}\,\frac{1}{4lS\rho c} = \frac{U^2 t}{16 l^2\,\rho\,\zeta\,c} = 0{,}95\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

[3 t.]

c)

Relativni **raztezek** palice zaradi segrevanja je

$$\left.\frac{\Delta l}{l}\right|_T = \alpha \Delta T = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\,.$$

Okvir se zaradi magnetnih sil skrči

$$\left.\frac{\Delta l}{l}\right|_F = \frac{1}{E}\,\frac{F}{2S} = 6{,}6 \cdot 10^{-5}\,,$$

kar pa je več od raztezka zaradi segrevanja. Celoten relativni **skrček** je potem

$$\frac{\Delta l}{l} = \left.\frac{\Delta l}{l}\right|_F - \left.\frac{\Delta l}{l}\right|_T = 4{,}3 \cdot 10^{-5}\,.$$

[3 t.]

4. **a)** $m = 1{,}0$ kg, $h = 10$ m, $V_0 = 1{,}5$ l, $p_0 = 98$ kPa, $\rho = 1000$ kg/m^3.

Teža posode je 9,8 N, vzgon pa je enak $\rho g V_0 = 14{,}7$ N. Rezultanta je enaka 4,9 N in kaže navzgor.

[1 t.]

b) V globini h na bat deluje tlak $p = p_0 + \rho g h$. Iz Boylove enačbe sledi za prostornino zraka v posodi:

$$pV = p_0 V_0\,, \qquad V = \frac{p_0}{p_0 + \rho g h}\,V_0 = \tfrac{1}{2}V_0 = 0{,}75\ \text{l}\,.$$

Vzgon se zmanjša in sedaj meri $\rho g V = 7{,}4$ N. Rezultanta je enaka 2,5 N in kaže navzdol.

Ker rezultanta spremeni predznak in ker se vmes zvezno spreminja, obstaja točka, v kateri je rezultanta enaka 0.

[2 t.]

c) $m = 1{,}0$ kg, $h = 10$ m, $V_0 = 2{,}2$ l, $m_v = 1{,}0$ kg, $l = 10$ m.

Tik pod gladino navzdol delujeta teža posode in teža verige s skupno silo 19,6 N, navzgor pa vzgon $\rho g V_0 = 21{,}6$ N. Rezultanta 2,0 N kaže navzgor.

Tik nad dnom teža verige več ne prispeva, saj vsa veriga leži na dnu. Prostornina posode se tako kot pri **b)** zmanjša na polovico začetne, tako da vzgon meri $\rho g V = 10{,}8$ N in je *večji* od teže posode. Rezultanta meri 1,0 N in kaže navzgor.

[2 t.]

d) Zapišimo sile v globini x, $0 < x < h$, kjer je tlak enak $p = p_0 + \rho g x$, prostornina in vzgon na posodo pa:

$$V(x) = \frac{p_0}{p_0 + \rho g x}\,V_0\,, \qquad F_v(x) = \rho g V(x) = \frac{m_0 g}{1 + \dfrac{x}{a}}\,, \qquad a = \frac{p_0}{\rho g} = 10\ \text{m}\,, \qquad m_0 = 2{,}2\ \text{kg}\,.$$

Teža posode in dela verige z dolžino $l - x$, ki prosto visi na posodi, meri

$$F_g(x) = mg + \frac{m_v}{l}\,g(l - x) = mg + m_v g\left(1 - \frac{x}{l}\right)\,.$$

Iščemo globino, v kateri je rezultanta enaka 0:

$$F(x) = F_v(x) - F_g(x) = \frac{m_0 g}{1 + \dfrac{x}{a}} - mg - m_v g\left(1 - \frac{x}{l}\right) = 0\,.$$

$$m_0 = \left(m + m_v\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)\,.$$

Po množenju z al/m_v in preureditvi dobimo:

$$x^2 - \left(l - a + \frac{m}{m_v}\,l\right)x + \frac{m_0 - m - m_v}{m_v}\,al = 0\,.$$

V našem primeru je $l = a = 10$ m, $m/m_v = 1$ in $(m_0 - m - m_v)/m_v = 0{,}20$:

$$x_{1,2} = l\,\frac{1 \pm \sqrt{0{,}20}}{2} = \left\{\begin{matrix} 7{,}24\ \text{m} \\ 2{,}76\ \text{m} \end{matrix}\right\}\,.$$

Obe rešitvi sta smiselni.

[5 t.]

1. $k = 25$ N/cm, $m = 50$ g, $x_0 = 10{,}0$ mm, $x_1 = 8{,}0$ mm, $x_2 = 6{,}0$ mm.

a) Ko je kemični svinčnik izklopljen, je vzmet neobremenjena in je skrček enak nič. Kot pravi besedilo, je takrat spodnja ploskev gumba dvignjena nad podlago za H. Ko je kemični svinčnik v najnižji legi, je vzmet skrčena za x, hitrost kemičnega svinčnika pa je enaka nič. Od začetne točke se je kemični svinčnik spustil za $H + x$. Prožnostna energija vzmeti v najnižji točki je tolikšna, kolikor se je zmanjšala potencialna energija

$$mg(H + x) = \frac{1}{2}kx^2 \,. \tag{1}$$

Če se kemični svinčnik ne preklopi, se bo vzmet med odbojem raztegnila nazaj na svojo neobremenjeno dolžino, torej bo v najvišji točki potencialna energija kemičnega svinčnika enaka začetni potencialni energiji. Kemični svinčnik se torej odbije do višine H, s katere smo ga spustili.

Mejna višina h_1 je dosežena takrat, ko je skrček vzmeti v najnižji točki enak x_1. Oba podatka nesemo v (1) in dobimo

$$h_1 = \frac{kx_1^2}{2mg} - x_1 = x_1\left(\frac{x_1}{y_0} - 1\right) = 155{,}3 \text{ mm} \approx 155 \text{ mm}\,,$$

kjer smo vpeljali značilno dolžino $y_0 = 2mg/k = 0{,}392$ mm, ker se veliko rezultatov v nadaljevanju lepo izrazi s pomočjo y_0. Seveda vpeljava y_0 za reševanje ni nujno potrebna.

[4 t.]

b) Ko se kemični svinčnik med odbojem preklopi v stanje *vključen*, se vzmet ne more več raztegniti do neobremenjene dolžine, ampak ostane skrčena za x_2. Zato ima v najvišji točki po doboju poleg potencialne energije tudi prožnostno. Postavimo potencialno energijo kemičnega svinčnika na nič takrat, ko se med padanjem spodnja ploskev gumba dotakne podlage. Tedaj dobimo iz ohranitve mehanske energije med najnižjo lego med odbojem in najvišjo lego po odboju enačbo

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - mgx_1 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh_1' \,. \tag{2}$$

Iz (2) dobimo višino odboja h_1' kot

$$h_1' = \frac{k}{2mg}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - x_1 = x_1\left(\frac{x_1}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_1}\right) = h_1 - \frac{x_2^2}{y_0} = 63{,}4 \text{ mm} \approx 63 \text{ mm}\,.$$

[2 t.]

c) Maksimalno višino po doboju kemični svinčnik doseže, če je med odbojem vzmet maksimalno skrčena, torej mora biti skrček enak x_0. Poleg tega se mora po odboju vzmet raztegniti na neobremenjeno dolžino, kar pomeni, da mora biti kemični svinčnik, ko ga spustimo, *vklopljen.* Med odbojem namreč presežemo skrček za preklop ($x_1 < x_0$), po odboju pa mora biti kemični svinčnik izklopljen, da se lahko vzmet raztegne na neobremenjeno dolžino. Ohranitev mehanske energije nam da

$$h_0 = \frac{kx_0^2}{2mg} - x_0 = x_0\left(\frac{x_0}{y_0} - 1\right) = 245{,}1 \text{ mm} \approx 245 \text{ mm}\,.$$

Da doseže kemični svinčnik po odboju maksimalno višino h_0, mora biti, ko ga spustimo, *vklopljen.* Spustiti ga moramo z najmanj tolikšne višine h_2, da bo v najnižji točki skrček vzmeti maksimalen, torej x_0. Ko ga spustimo, je skrček vzmeti x_2, ker je *vklopljen.* Ohranitev energija nam da

$$\frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh_2 \,. \tag{3}$$

Iz (3) dobimo

$$h_2 = \frac{k}{2mg}\left(x_0^2 - x_2^2\right) - x_0 = x_0\left(\frac{x_0}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_0}\right) = h_0 - \frac{x_2^2}{y_0} = 153{,}3 \text{ mm} \approx 153 \text{ mm}\,.$$

[4 t.]

2. $U_0 = 1{,}5$ V, $R = 5{,}0\ \Omega$, $l_1 = 10{,}0$ mm, $l_2 = 5{,}0$ mm, $r = 0{,}060$ mm, $T_0 = 1080\,^\circ$C, $\zeta = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m.

a) Upora žičk sta

$$R_1 = \frac{\zeta l_1}{\pi r^2} = 0{,}0442\ \Omega\ ; \qquad R_2 = \frac{\zeta l_2}{\pi r^2} = R_1 \frac{l_2}{l_1} = 0{,}0221\ \Omega\,.$$

Nadomestni upor obeh varovalk skupaj je

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{3} R_1 = 0{,}01474\ \Omega\,.$$

Porazdelitve napetosti na zaporedno vezanih upornikih nam da napetost na varovalkah

$$U_n = U_0 \frac{R_n}{R + R_n} = 4{,}408\ \text{mV} \approx 4{,}4\ \text{mV}\,.$$

Tok skozi porabnik je

$$I = \frac{U_0}{R + R_n} = 0{,}299\ \text{A} \approx 0{,}30\ \text{A} \approx 0{,}3\ \text{A}\,.$$

[3 t.]

b) Ker je sistem v temperaturnem ravnovesju, mora vsaka žička oddati s sevanjem enako moč, kot jo generira tok skozi žičko zaradi upora žičke. Električna moč pri dani napetosti U_n na posamezni žički je enaka

$$P_i = \frac{U_n^2}{R_i} = \frac{U_n^2 \pi r^2}{\zeta l_i}\,,$$

kjer je indeks i enak 1 za daljšo in 2 za krajšo žičko. Vsaka žička seva kot črno telo v okolico skozi plašč valja s polmerom r in dolžino l_i pri ravnovesni temperaturi T_i po Stefanovem zakonu z močjo P_i^*, ki je enaka

$$P_i^* = \sigma T^4 2\pi r l_i\,.$$

Moči izenačimo in za ravnovesno temperaturo dobimo zvezo

$$\frac{U_n^2 \pi r^2}{\zeta l_i} = \sigma T_i^4 2\pi r l_i \qquad \Longrightarrow \qquad T_i^4 = \frac{U_n^2 \pi r^2}{2\pi\sigma\zeta r l_i^2} = \frac{U_n^2 r}{2\sigma\zeta l_i^2}\,.$$

Ker dolžina žičke l_i nastopa v imenovalcu in so vse ostale količine na desni strani enačbe enake za obe žički, je očitno, da ima višjo temperaturo krajša žička, ki zato prva pregori. To se zgodi, ko temperatura krajše žičke doseže temperaturo tališča bakra T_0. Iz pogojev $i = 2$ in $T_2 = T_0 = 1353$ K dobimo mejno napetost na varovalkah U_m

$$U_m = T_0^2 l_2 \sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}} = 0{,}08898\ \text{V} \approx 89\ \text{mV}\,.$$

Napetost vira je takrat

$$U_2 = U_m \frac{R + R_n}{R_n} = 30{,}28\ \text{V} \approx 30{,}3\ \text{V}\,.$$

[4 t.]

c) Do takrat, ko krajša žička pregori, je napetost na obeh žičkah enaka, ker sta vezani vzporedno. Napetost na daljši žički je torej enaka U_m. Uporabimo zvezo med napetostjo na žički in njeno ravnovesno temperaturo T_1, le da upoštevamo dimenzije daljše žičke, torej l_2 zamenjamo z l_1. Velja

$$U_m = T_1^2 l_1 \sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}} = T_1^2 l_1 \frac{U_m}{T_0^2 l_2}\,, \qquad (1)$$

kjer smo $\sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}}$ izrazili s temperaturo krajše žičke v trenutku, ko pregori

$$\sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}} = \frac{U_m}{T_0^2 l_2}\,.$$

Iz (1) dobimo

$$T_1 = T_0\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = 956{,}7\ \mathrm{K} \approx 957\ \mathrm{K} = 684\ {}^\circ\mathrm{C}\,.$$

[3 t.]

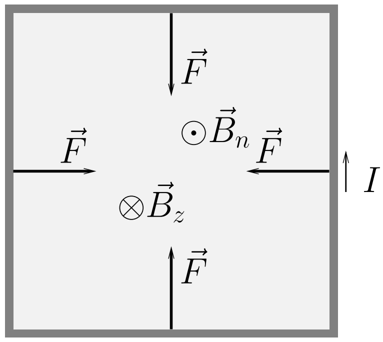
3. $S = 10$ mm^2, $l = 1{,}0$ m, $\beta = 1{,}0$ T/s, $\rho = 2700$ kg/m^3, $c = 900$ J/kg K, $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $E = 70$ GPa, $\zeta = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

a) Zaradi spreminjajočega se magnetnega polja skozi okvir, se v okviru inducira napetost

$$U_i = l^2 \frac{dB_z}{dt} = l^2 \beta = 1{,}0 \text{ V}\,.$$

Napetost požene po okviru tok

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{U_i S}{4\zeta l} = 92{,}6 \text{ A}\,.$$



Po Lenzovem pravilu je smer toka takšna, da magnetno polje, $\vec{B}_n$, ki ga povzroči tok, zavira naraščanje zunanjega polja $\vec{B}_v$ V našem primeru je to v nasprotni smeri premikanja urinega kazalca.
Za magnetno silo na stranico velja

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}_z\,, \qquad F = IlB = 92{,}6 \text{ N}\,.$$

Smer sile kaže v notranjost okvira.
[3 t.]

b)

Stranice se segrevajo in zaradi tega raztezajo. Okvir se segreje za

$$\Delta T = \frac{Pt}{mc} = \frac{U^2 St}{4\zeta l}\,\frac{1}{4lS\rho c} = \frac{U^2 t}{16 l^2\, \rho\, \zeta\, c} = 0{,}95 \text{ °C}\,.$$

[3 t.]

c)

Relativni **raztezek** palice zaradi segrevanja je

$$\left.\frac{\Delta l}{l}\right|_T = \alpha \Delta T = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\,.$$

Okvir se zaradi magnetnih sil skrči

$$\left.\frac{\Delta l}{l}\right|_F = \frac{1}{E}\,\frac{F}{2S} = 6{,}6 \cdot 10^{-5}\,,$$

kar pa je več od raztezka zaradi segrevanja. Celoten relativni **skrček** je potem

$$\frac{\Delta l}{l} = \left.\frac{\Delta l}{l}\right|_F - \left.\frac{\Delta l}{l}\right|_T = 4{,}3 \cdot 10^{-5}\,.$$

[4 t.]

4. $T_z = 27$ °C, $a = 20$ cm, $d = 1{,}0$ dm, $P_0 = 5{,}0$ kW, $\lambda = 1{,}0$ W/m K

a) $T_n = 100$ °C.

Izkoristek stroja je Carnotov izkoristek

$$\eta = 1 - \frac{T_z}{T_n} = 1 - \frac{300\ K}{373\ K} = 0{,}196 \approx 0{,}20\,,$$

in je enak razmerju med delom, ki ga stroj oddaja, A, in toploto, ki jo stroju dovajamo, Q_{do}: $A/Q_{\mathrm{do}} = \eta$. Razmerje lahko izrazimo tudi z močjo P_A, ki jo stroj oddaja, in dovedenim toplotnim tokom P_{do}: $P_A/P_{\mathrm{do}} = \eta$.

Dovedeni toplotni tok je enak razliki med toplotnim tokom P_0, ki ga dovajamo bojlerju, in toplotnim tokom, ki uhaja skozi stene

$$P_i = \frac{\lambda S}{d}\,(T_n - T_z) \equiv k\,(T_n - T_z)\,, \qquad k = 20\ \mathrm{W/K}\,.$$

$$P_{\mathrm{do}} = P_0 - P_i = 5\ \mathrm{kW} - 1{,}46\ \mathrm{kW} = 3{,}54\ \mathrm{kW}\,.$$

Končno

$$P_A = P_{\mathrm{do}}\eta = 0{,}694\ \mathrm{kW} \approx 690\ \mathrm{W}\,.$$

[3 t.]

b) $P_A = 500$ W. V tem primeru iščemo T_n, ki zadošča enačbi

$$\frac{P_A}{P_0 - k(T_n - T_z)} = 1 - \frac{T_z}{T_n} = \frac{T_n - T_z}{T_n}\,.$$

Kot neznanko vpeljemo razliko med notranjo in zunanjo temperaturo, $x = T_n - T_z$, $T_n = T_z + x$, in po preureditvi dobimo kvadratno enačbo

$$P_A(T_z + x) = P_0 x - kx^2\,, \qquad kx^2 - (P_0 - P_A)x + P_A T_z = 0\,.$$

z rešitvijo

$$x_{1,2} = \frac{P_0 - P_A \pm \sqrt{(P_0 - P_A)^2 - 4kP_AT_z}}{2k} = \left\{\begin{matrix} 184\ \mathrm{K} \\ 41\ \mathrm{K} \end{matrix}\right\}\,, \qquad T_n = \left\{\begin{matrix} 211\ ^\circ\mathrm{C} \\ 68\ ^\circ\mathrm{C} \end{matrix}\right\}\,.$$

Obe temperaturi sta smiselni.

[3 t.]

c) Pri ekstremni vrednosti P_A bo rešitev za temperaturo ena sama, kar pomeni, da mora biti v enačbi za $x_{1,2}$ izraz pod korenom enak 0:

$$(P_0 - P_A)^2 - 4kP_AT_z = 0\,, \qquad \text{po preureditvi:} \qquad P_A^2 - 2(P_0 + 2kT_z)P_A + P_0^2 = 0\,.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za moč s smiselno rešitvijo

$$P_A = P_0 + 2kT_z - \sqrt{(P_0 + 2kT_z)^2 - P_0^2} = 752\ \mathrm{W} \approx 0{,}75\ \mathrm{kW}\,.$$

Vrednost x pri tej temperaturi je $x = (P_0 - P_A)/2k = 106$ K in $T_n = 133$ °C. Rešitev s predznakom + ni smiselna, saj je v tem primeru $P_A > P_0$, temperature pa so negativne.

Nalogo je možno rešiti tudi z iskanjem stacionarne točke v izrazu za moč:

$$P_A = \frac{(P_0 - kx)x}{T_z + x}\,.$$

Iskanje ničel odvoda P_A po x vodi do enake rešitve za x in enake največje moči.

[4 t.]