Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

1. Omejitev hitrosti po mestu je 50 km/h. Ko zelena luč na semaforju ugasne, se prižge rumena luč in sveti 2 s, nato se prižge rdeča luč. Ko se rumena luč prižge, se mora voznik odločiti, kaj bo storil. Če je avtomobil dovolj blizu semaforja, lahko prevozi križišče, preden se prižge rdeča luč. Po drugi strani se avtomobil lahko ustavi pred semaforjem samo, če je dovolj daleč od semaforja. Privzemi, da je reakcijski čas voznika nič.

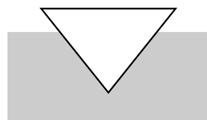
   a) Na mokri cesti je koeficient lepenja med kolesi in cesto 0,3. Zato za določene oddaljenosti od semaforja avtomobil, ki vozi z največjo dovoljeno hitrostjo, ne more niti varno ustaviti niti prevoziti križišča, preden se prižge rdeča luč. Določi interval teh oddaljenosti od semaforja.

   b) Kolikšno omejitev hitrosti je potrebno postaviti pred semaforjem, da lahko voznik na mokri cesti iz vprašanja a), ko zelena luč ugasne in rumena luč prižge, kjerkoli pred semaforjem ali varno ustavi ali z največjo dovoljeno hitrostjo prevozi križišče, preden se prižge rdeča luč?

   c) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med kolesi in mokro cesto, da ni potrebna dodatna omejitev iz vprašanja b), ampak zadošča splošna mestna omejitev hitrosti 50 km/h?

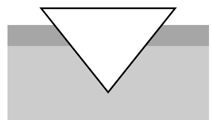
2. Na vodi plava lesena klada v obliki prizme s stranskim robom 50 cm in osnovno ploskvijo v obliki enakokrakega trikotnika, katerega daljša stranica je dolga 10 cm, višina na to stranico pa ima dolžino 5 cm. Klada plava na vodi tako, da je največja stranska ploskev prizme ves čas vodoravna, kot kažeta (v prečnem prerezu) sliki ob vprašanjih.

   a) Kolikšna je gostota lesa, če je potopljeni stranski rob prizme 4 cm pod vodno gladino?



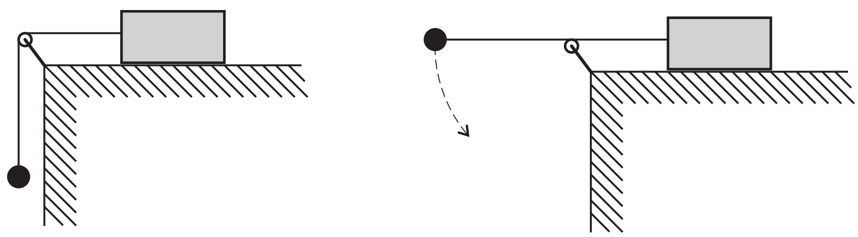
   b) Vodo zamenjamo z oljem z gostoto 800 kg/m^3. Kako globoko pod gladino olja je potopljeni stranski rob prizme?

   c) Kako globoko pod gladino olja je potopljeni stranski rob prizme, če na vodo iz vprašanja a) nalijemo 2 cm debelo plast olja z gostoto 800 kg/m^3?



3. Majhno utež z maso 100 g z lahko neraztegljivo vrvico povežemo preko majhnega škripca s klado, ki miruje na vodoravni podlagi, kot kaže leva slika. Vrvica z utežjo je navpična. Koeficient lepenja med klado in podlago je 0,5.

   a) Kolikšna sila napenja vrvico, ko klado potiskamo stran od škripca, da se giblje s pospeškom 3 m/s^2, in kolikšna, ko klado potiskamo, da se z enako velikim pospeškom giblje proti škripcu?



Zdaj utež držimo tako, da je vrvica med škripcem in utežjo vodoravna, kot kaže desna slika, a zanemarljivo malo napeta. Utež spustimo.

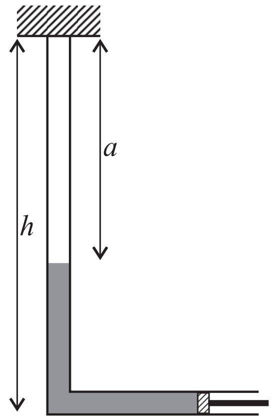
   b) Najmanj kolikšna mora biti masa klade, da klada ne zdrsne?

   c) Pri kolikšnem kotu med vrvico in vodoravnico klada zdrsne, če je masa klade 400 g?

59. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 9. 4. 2021

Skupina II

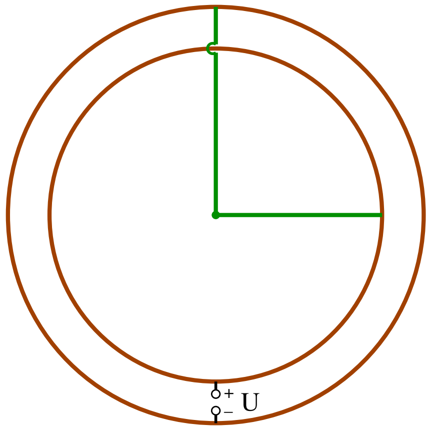
1. Navzgor zakrivljena ozka cev, napolnjena z živim srebrom, ima na spodnjem krajišču pomičen bat, zgornje krajišče pa je nepredušno zavarjeno v strop, kot kaže slika. Strop je na višini $h = 1$ m nad spodnjim krajiščem cevi. V cevi je poleg živega srebra še zrak. Če na bat ne pritiskamo, niti ga ne vlečemo, je višina zračnega stolpca $a = 60$ cm. Prečni presek bata je 1,0 cm^2, gostota živega srebra je 13600 kg/m^3.



   a) Kolikšen je tlak zraka v cevi?

   b) Kolikšna pa je višina zračnega stolpca, ko na bat pritiskamo s silo 4,0 N?

2. Sestavimo vezje v obliki ure, ki je prikazano na sliki. Kazalca se vrtita kot pri vsaki uri s kazalci, vrh vsakega kazalca je ves čas v električnem stiku s pripadajočim kovinskim obročem, dolžina minutnega kazalca in polmer zunanjega obroča je 10 cm, dolžina urnega kazalca in polmer notranjega obroča je 8 cm. Minutni kazalec z notranjim obročem ni nikoli v električnem stiku. Oba obroča sta narejena iz enako debele žice iz iste kovine. V osi vrtenja je med kazalcema električni stik, kazalca nista v električnem stiku z mehanizmom ure. Vezje je priključeno na vir z napetostjo 20 V, kot kaže slika ob času 15.00. Skozi vir teče ob 12.00 tok 4,0 A in ob 18.00 tok 5,0 A.



   a) Kolikšen je skupni upor obeh kazalcev? Kolikšen je upor zunanjega obroča?
   b) Kolikšen tok teče skozi vir ob 16.00?

3. Elektrone in pozitrone (delce, katerih lastnosti so enake lastnostim elektronov, razen predznaka naboja, ki je nasproten), ki jih pospešimo v vodoravni smeri z napetostjo 700 V, izmenično pošiljamo skozi ploščati kondenzator z vodoravnima ploščama z dolžino 5 cm. V kondenzatorju je navpično električno polje z jakostjo 200 V/m. Curka obeh vrst delcev vstopata v kondenzator na isti višini in v električnem polju kondenzatorja preletita vodoravno razdaljo 5 cm. Navpičen zaslon postavimo 10 cm za mestom, kjer delci zapustijo kondenzator.

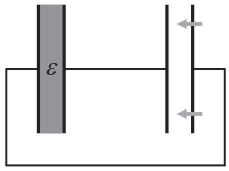
   a) S kolikšno hitrostjo vstopajo delci v električno polje kondenzatorja?
   b) Kolikšna je navpična komponenta hitrosti elektrona v trenutku, ko zapusti kondenzator?
   c) Kolikšna je navpična razdalja med točkama, kjer zaslon zadevajo elektroni in pozitroni?

59. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 9. 4. 2021

Skupina III

1. Kondenzator je sestavljen iz kvadratnih plošč s stranico 18 cm, ki sta med seboj oddaljeni 1,2 cm, med ploščama pa je izolator z dielektričnostjo $\varepsilon = 4{,}0$. Kondenzator nabijemo z Van de Graaffovim generatorjem, da je napetost med ploščama 24 kV. Generator nato odklopimo.

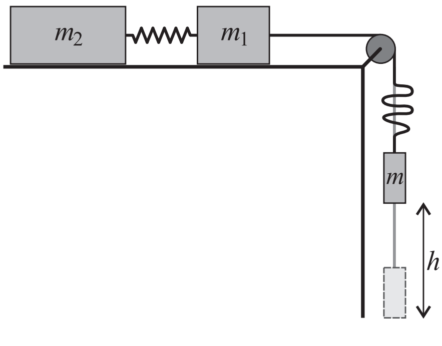
   Mejna vrednost jakosti električnega polja, pri kateri pride v zraku do preboja, je 30 kV/cm. V izolatorju bi prišlo do preboja pri veliko večjih električnih poljih, zato privzemi, da se preboj skozi izolator ne zgodi.



   a) V prvem poskusu dielektrik počasi vlečemo iz kondenzatorja, kot kaže leva slika. Koliko dielektrika gleda iz kondenzatoja, ko pride v kondenzatorju do preboja?
   b) V drugem poskusu kondenzator z dielektrikom nabijemo z Van de Graaffovim generatorjem na napetost 24 kV in ga nato odklopimo od generatorja. Nato enak kondenzator, ki pa ne vsebuje dielektrika, ampak je med ploščama zrak, povežemo z nabitim kondenzatorjem z dielektrikom. Eno ploščo praznega kondenzatorja počasi približujemo drugi plošči, kot kaže desna slika. Pri kolikšni razdalji med ploščama pride do preboja?

2. Lovec na sipe stoji na robu pomola in opreza za sipami v morju z globino 1,00 m. Višina njegovih oči je 2,00 m nad gladino vode. Na dnu opazi sipo, ki jo vidi pod kotom 25° glede na navpičnico. Lovec vrže sulico, s katero lovi sipe, tako, da je konica sulice na začetku v višini njegovih oči. Privzemi, da sulica ves čas gibanja do dna morja potuje premo enakomerno s hitrostjo 5,00 m/s. Lomni kvocient vode je 1,33.
   a) Na kolikšni vodoravni razdalji od njega je sipa?
   b) Pod kolikšnim kotom glede na navpičnico mora vreči sulico, da bo zadel sipo?
   c) Kolikšen mora biti kot iz vprašanja b), da bo zadel sipo, če se v trenutku, ko vrže sulico, sipa začne premikati po dnu stran od njega s hitrostjo 1,00 m/s?

3. Dve kladi z masama $m_1 = 1$ kg in $m_2 = 2$ kg sta povezani z vzmetjo s prožnostnim koeficientom $k = 200$ N/m. Vzmet je na začetku iztegnjena, a nenapeta. Koeficient trenja med kladama in podlago je $k_t = 0{,}1$, koeficient lepenja pa $k_l = 0{,}2$. Na prvo klado navežemo lahko neraztegljivo vrvico, nanjo privežemo utež z maso $m = 100$ g ter jo speljemo preko lahkega škripca, da prosto visi. Utež navpično dvignemo za višino h, kot kaže slika, ter spustimo.



   a) S kolikšno hitrostjo se prične gibati prva klada, če smo utež dvignili za 20 cm in jo spustili?
   b) Kolikšen je pospešek prve klade, ko se prične gibati in je vzmet takrat še nenapeta?
   c) Kolikšen mora biti raztezek vzmeti, da se premakne druga klada?
   d) Najmanj kako visoko bi morali dvigniti utež v vprašanju a), da bi se premaknila tudi druga klada?

1. $v_0 = 50$ km/h$= 13{,}89$ m/s, $t_0 = 2{,}0$ s, $k_t = 0{,}30$.

a)

$$x_1 = v_0 t_0 = 27{,}78\,\mathrm{m} \approx 28\,\mathrm{m}$$

Če je $x > x_1$, avtomobil ne uspe prepeljati križišča, preden se prižge rdeča luč.

Avtomobil lahko zavira s pojemkom, ki je največ $a = k_t g$, kjer je $g = 9{,}8$ m/s^2 težni pospešek. Iz enačbe za enakomerno pospešeno gibanje $2ax_2 = v_0^2$ dobimo

$$x_2 = \frac{v_0^2}{2k_t g} = 32{,}81\,\mathrm{m} \approx 33\,\mathrm{m}\ .$$

Za oddaljenosti $x_1 < x < x_2$ se avtomobil ne more niti ustaviti pred semaforjem niti prepeljati križišča preden se prižge rdeča luč, torej je iskani interval med 28 m in 33 m.

[4 t.]

b) Da se bo voznik lahko povsod odločil ali prevoziti ali ustaviti, mora biti omejitev hitrosti v taka, da sta meji x_1 in x_2 iz vprašanja a) enaki in ni "nevarnega" intervala.

$$x_1' = x_2' \qquad \Longleftrightarrow \qquad v t_0 = \frac{v^2}{2k_t g}$$

Kar nam da

$$v = 2k_t g t_0 = 11{,}76\,\mathrm{m/s} = 42{,}34\,\mathrm{km/h} \approx 42\,\mathrm{km/h}\,.$$

[3 t.]

c) Da bo standardna omejitev hitrosti po mestu zadoščala, mora biti koeficient trenja k' tak, da bosta meji x_1 in x_2 enaki pri hitrosti v_0, kar nam da

$$v_0 t_0 = \frac{v_0^2}{2k' g} \qquad \Longrightarrow \qquad k' = \frac{v_0}{2 g t_0} = 0{,}354 \approx 0{,}35\,.$$

[3 t.]

2. $a = 10$ cm, $v = 5$ cm, $l = 50$ cm, $h = 4$ cm, $\rho_o = 800$ kg/m^3, $d = 2$ cm.

a) V ravnovesju je teža klade enaka teži izpodrinjene tekočine. Težo klade izrazimo z gostoto lesa kot $m_k g = S l \rho_l g = \frac{1}{2} a v l \rho_l g$, težo izpodrinjene vode pa kot $m_v g = \frac{1}{2} b h l \rho_v g$. Tu sta b vodoravna stranica in h višina prečnega preseka klade, ki je potopljen v vodo, in ima obliko enakokrakega trikotnika, podobnega osnovni ploskvi klade. Zaradi podobnosti obeh trikotnikov velja: $b/h = a/v$ in $b = ah/v$. Izenačimo teži in dobimo

$$\frac{av}{2}\, l\rho_l g = \frac{bh}{2}\, l\rho_v g = \frac{ah^2}{2v}\, l\rho_v g\,.$$

Po okrašanju sledi

$$v\rho_l = \frac{ah^2}{v}\,\rho_v\,, \qquad \rho_l = \frac{h^2}{v^2}\,\rho_v = 640\ \mathrm{kg/m^3}\,.$$

[3 t.]

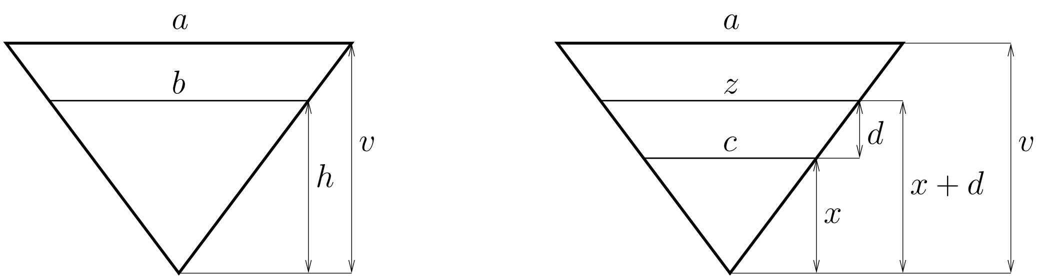
b) V olju se razsežnosti potopljenega trikotnega preseka spremenijo, še vedno pa velja, da je trikotnik podoben trikotniku prečnega preseka klade. Če njegovo višino, ki je hkrati tudi enaka iskani globini, označimo z x, je vodoravna osnovna stranica enaka $c = ax/v$. Iz enačbe za ravnovesje, v kateri se sedaj pojavi gostota olja namesto gostote vode, sledi:

$$\frac{av}{2}\, l\rho_l g = \frac{cx}{2}\, l\rho_o g = \frac{ax^2}{2v}\, l\rho_o g$$

in za globino potopljenega roba dobimo

$$x = \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_o}}\, v = 4{,}5\ \mathrm{cm}\,.$$

[2 t.]



a) $a : v = b : h$ **b, c)** $a : v = c : x = z : (x + d)$

c) V vodi potopljeni del klade je podoben potopljenemu delu pri b), presek potopljenega dela v olju pa je trapez z višino d. Če obdržimo enake oznake kot pri b), je krajša vodoravna stranica enaka kar c, dolžino daljše vodoravne stranice (na gladini vode) pa označimo z z. V ravnovesju je teža klade enaka vsoti vzgona vode in olja:

$$\frac{av}{2}\, l\rho_l g = \frac{cx}{2}\, l\rho_v g + \frac{(c+z)d}{2}\, l\rho_o g\,.$$

Iz podobnosti celotnega potopljenega trikotnika in celotnega preseka klade velja sorazmerje $z/(x+d) = a/v$, od koder sledi za daljšo vodoravno stranico trapeza $z = a(x+d)/v$. Po okrajšanju iz ravnovesne enačbe sledi:

$$av\rho_l = \frac{x^2 a}{v}\,\rho_v + \frac{(a(x+d)+ax)d}{v}\,\rho_o$$

in kvadratna enačba za x:

$$\rho_v\, x^2 + 2d\rho_o\, x + d^2\rho_o - v^2\rho_l\,,$$

s smiselno rešitvijo $x = 2{,}32$ cm. Spodnji rob je torej v globini

$$h' = x + d = 4{,}3\ \mathrm{cm}\,.$$

[5 t.]

3. $m = 100$ g, $a = 3$ m/s^2, $g = 9{,}8$ m/s^2, $k = 0{,}5$, $M' = 400$ g.

a) Ko se klada giblje od škripca, se utež dviga s pospeškom a, vrvica je napeta s silo F_1 in velja

$$F_1 - mg = ma \qquad \Longrightarrow \qquad F_1 = m(g+a) = 1{,}28\,\mathrm{N} \approx 1{,}3\,\mathrm{N}\,.$$

Ko se klada giblje proti škripcu, se utež spušča s pospeškom a, vrvica je napeta s silo F_2 in velja

$$mg - F_2 = ma \qquad \Longrightarrow \qquad F_2 = m(g-a) = 0{,}68\,\mathrm{N} \approx 0{,}7\,\mathrm{N}\,.$$

[2 t.]

b) Naj bo razdalja od škripca do uteži l. Vrvica je, ko klada miruje in se utež giblje proti skrajni spodnji legi, napeta vse bolj, ko je utež vse niže, saj se giblje z vse večjo hitrostjo in je hkrati tudi komponenta teže uteži v smeri vrvice vse večja. Sila v vrvici je zato največja, ko je utež v najnižji točki in je kot med vrvico in vodoravnico 90° oziroma je vrvica navpična. Hitrost uteži je takrat iz ohranitve energije, ker se spusti ravno za l, enaka $v = \sqrt{2gl}$. Na utež delujeta teža in sila vrvice F obe v navpični smeri. Ker se utež giblje po krožnici s polmerom l, velja

$$ma_c = m\frac{v^2}{l} = F - mg \qquad \Longrightarrow \qquad F = mg + m\frac{2gl}{l} = 3mg\,.$$

Sila vrvice se preko škripca prenese na klado, ki jo na mestu zadržuje sila lepenja, ki je lahko velika največ kMg. Sledi

$$3mg \le kMg \qquad \Longrightarrow \qquad M \ge \frac{3m}{k} = 600\,\mathrm{g}.$$

[4 t.]

c) Naloga je podobna primeru b), le da gledamo situacijo, kjer utež ni v najnižji lege, ampak je vrvica med gibanjem iz vodoravne lege opisala kot φ. Tedaj se je utež spustila za $h = l\sin\varphi$ in velja $v^2 = 2gl\sin\varphi$. Smer hitrosti je pravokotna na vrvico, lokalno utež kroži z obodno hitrostjo v po krožnici s polmerom l. Vrvico napenja tudi komponenta teže vzporedna z vrvico, ki ima velikost $F_g' = mg\sin\varphi$. Ker se utež giblje po krožnici, velja

$$ma_c = m\frac{v^2}{l} = F' - F_g' \qquad \Longrightarrow \qquad F' = mg\sin\varphi + m\frac{2gl\sin\varphi}{l} = 3mg\sin\varphi\,.$$

Klada ne zdrsne, dokler je sila vrvice F' manjša od maksimalne sile lepenja $kM'g$. Iz neenačbe

$$3mg\sin\varphi \le kM'g$$

izrazimo $\sin\varphi$ kot

$$\sin\varphi \le \frac{kM'}{3m} = \frac{2}{3}\,,$$

kar nam da končno rešitev

$$\varphi = \arcsin\frac{2}{3} = 41{,}81^\circ \approx 42^\circ\,.$$

[4 t.]

1. $h = 100$ cm, $a = 60$ cm, $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, $\rho = 13\,600\ \mathrm{kg/m}^3$, $p_0 = 1$ bar, $F = 4$ N.

   a) Če na bat ne pritiskamo, zunanji zračni tlak izenači hidrostatični pritisk živega srebra in tlak zraka p_a v mehurčku:

$$p_0 = \rho g(h - a) + p_a,$$

   kjer je $p_a = 0{,}47$ bar.

   [4 t.]

   b) Ko pritiskamo na bat, pa velja

$$p_0 + \frac{F}{S} = \rho g(h - b) + p_b.$$

   Upoštevamo še zvezo $p_a a = p_b b$, ki sledi iz plinske enačbe in izotermne spremembe (počasi pritisnemo). Rešujemo kvadratno enačbo

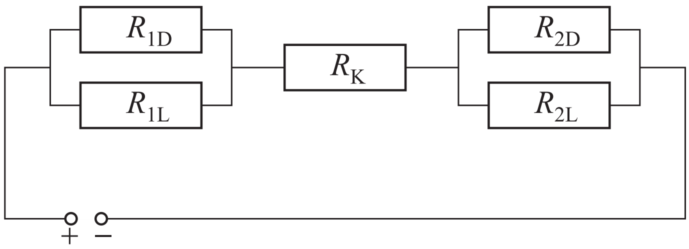
$$-b^2 \rho g + b\left(\rho g h - p_0 - \frac{F}{S}\right) + p_a a = 0.$$

   Dobimo $b = 44$ cm.

   [6 t.]

2. $U_0 = 20$ V, $t_{12} = 12.00$, $I_1 = 4{,}0$ A, $t_{18} = 18.00$, $I_2 = 5{,}0$ A, $t_3 = 16.00$, $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 10$ cm, R_k je skupni upor kazalcev, R_1 je upor notranjega obroča, R_2 je upor zunanjega obroča.

a) Vezje ure opisuje shema



[2 t.] Oznaki R_{1L} in R_{1D} označujeta upor levega in desnega dela notranjega obroča ob določeni legi urnega kazalca. Analogno oznaki R_{2L} in R_{2D} označujeta upor levega in desnega dela zunanjega obroča ob določeni legi minutnega kazalca.

Ob času t_{12} sta oba kazalca v najvišji legi in velja $R_{1L} = R_{1D} = R_1/2$ ter $R_{2L} = R_{2D} = R_2/2$. Nadomestni upor vezja je takrat

$$R_{12} = \frac{R_1}{4} + R_k + \frac{R_2}{4} = \frac{U_0}{I_1}\,.$$

Ob času t_{18} se urni kazalec dotika pozitivnega priključka vira in tok po notranjem obroču sploh ne teče (lahko bi rekli, da je upor enega od R_{1L} in R_{1D} enak nič), medtem ko je minutni kazalec v najvišji legi in ponovno velja $R_{2L} = R_{2D} = R_2/2$. Nadomestni upor vezja je takrat

$$R_{18} = R_k + \frac{R_2}{4} = \frac{U_0}{I_2}\,.$$

Od prve enačbe odštejemo drugo in dobimo

$$\frac{R_1}{4} = \frac{U_0}{I_1} - \frac{U_0}{I_2}\,,$$

kar nam da

$$R_1 = 4U_0\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) = 4\,\Omega\,.$$

Z razmerjem polmerov obročev izrazimo razmerje uporov obročev

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \Longrightarrow \qquad R_2 = R_1\frac{r_2}{r_1} = 5\,\Omega\,.$$

Iz enačbe za t_{18} izrazimo še R_k kot

$$R_k = \frac{U_0}{I_2} - \frac{R_2}{4} = 2{,}75\,\Omega\,.$$

[5 t.]

b) Ko je ura t_3 je minutni kazalec najvišje in ponovno velja $R_{2L} = R_{2D} = R_2/2$. Urni kazalec je na številki 4, kar pomeni, da velja $R_{1L} = \frac{10}{12}R_1 = \frac{5}{6}R_1$ in $R_{1D} = \frac{2}{12}R_1 = \frac{1}{6}R_1$. Upornika sta vezana vzporedno in njun nadomestni upor je

$$R_1' = \frac{R_{1L}R_{1D}}{R_{1L} + R_{1L}} = \frac{5}{36}R_1\,.$$

Tok skozi vir določa nadomestni upor R_3 in je

$$I_3 = \frac{U_0}{R_3} = \frac{U_0}{R_1' + R_k + R_2/4} = \frac{20\,\mathrm{V}}{\frac{5}{9}\,\Omega + 4\,\Omega} = \frac{180}{41}\,\mathrm{A} = 4{,}39\,\mathrm{A} \approx 4{,}4\,\mathrm{A}\,.$$

[3 t.]

3. $U = 700$ V, $E = 200$ V/m, $s = 5$ cm, $l = 10$ cm, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As.

a) Delo pospeševalne napetosti je enako kinetični energijo elektronov:

$$e_0 U = \tfrac{1}{2} m_e v^2 \,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m_e}} = 1{,}57 \cdot 10^7 \text{ m/s} \,.$$

Pozitrone pospešimo z nasprotno enako napetostjo; dosežejo pa enako hitrost kot elektroni.

[2 t.]

b) Na elektrone deluje v navpični smeri sila $F = e_0 E$ in pospešek $a = e_0 E / m_e$. V času preleta kondenzatorja

$$t = \frac{s}{v} = 3{,}2 \text{ ns}$$

se v navpični smeri pospešijo do hitrosti

$$v_y = at = \frac{e_0 E t}{m_e} = 1{,}1 \cdot 10^5 \text{ m/s} \,.$$

[3 t.]

c) Zaslon dosežejo v času

$$t' = \frac{l}{v} = 6{,}4 \text{ ns}$$

in v navpični smeri se zunaj kondenzatorja gibljejo enakomerno in prepotujejo razdaljo

$$h = v_y t' = 0{,}72 \text{ mm} \,.$$

[2 t.]

Znotraj kondenzatorja pa se v navpični smeri premakne za

$$y = \tfrac{1}{2} a t^2 = \frac{e_0 E t^2}{2 m_e} = \tfrac{1}{2} v_y t = 0{,}18 \text{ mm} \,.$$

Enako navpično razdaljo, le v nasprotni smeri, prepotujejo pozitroni. Razmik me točkama je torej

$$d = 2(h + y) = 1{,}8 \text{ mm} \,.$$

[3 t.]

1. $U = 24$ kV, $a = 18$ cm, $d = 1{,}2$ cm, $\varepsilon = 4$, $E_0 = 30$ kV/cm.

a) V primeru (a) kondenzator v mislih razdelimo na dva dela: del z in del brez dielektrika. Ker je vsaka od plošč obema skupna, in je električni potencial vzdolž vsake od plošč konstanten, je napetost na obeh delih kondenzatorja med ploščama enaka. Gre torej za "vzporedno vezana" kondenzatorja.

Označimo naboj na prvem kondenzatorju na začetku z e, napetost na njem z U, njegovo kapaciteto pa s C. Analogne oznake uporabimo za oba kondenzatorja v novi situaciji vzporedne vezave, le da uporabimo v oznakah indekse 1 in 2.

Začetni naboj na ploščah se lahko le prerazporedi, torej velja $e = e_1 + e_2$. Naboj lahko na vsakem od kondenzatorjev povežemo z napetostjo na njem prek

$$e = CU, \quad e_1 = C_1 U', \quad e_2 = C_2 U'.$$

Upoštevali smo, da pri vzporedni vezavi kondenzatorjev velja $U_1 = U_2 = U'$.

Kapacitete kondenzatorjev izrazimo z dimenzijami plošč in njuno medsebojno razdaljo. Za začetni kondenzator, kjer poznamo U, velja

$$e = CU = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d}.$$

Za kondenzatorja v vzporednem vezju pa velja

$$C_1^{(a)} = \frac{\varepsilon_0 a x}{d}, \qquad C_2^{(a)} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a(a-x)}{d},$$

Do preboja pride prek zraka, torej tam, kjer ni dielektrika. Za tisti kondenzator lahko napetost U' na njem izrazimo z razdaljo med ploščama, in jakostjo električnga polja med ploščama, ki ima ravno prebojno vrednost E_0. Ko upoštevamo kapacitete v različnih primerih v enačbi ohranitve naboja ter povezavo s kapacitetami, sledi

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d} = (C_1^{(a)} + C_2^{(a)})U'^{(a)} = \left(\frac{\varepsilon_0 a x}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a(a-x)}{d}\right) E_0 d,$$

in od tod

$$x = \frac{\varepsilon a(E_0 d - U)}{E_0 d(\varepsilon - 1)} = 8{,}0 \text{ cm}\,.$$

[6 t.]

b)

Enako kot pri **a)** sta oba kondenzatorja na enaki napetosti, naboj na začetnem kondenzatorju pa se porazdeli med oba kondenzatorja, tako da se skupni naboj ohranja. V obeh primerih gre torej za "vzporedno vezana" kondenzatorja. Za kapaciteti velja

$$C_1^{(b)} = C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{d}, \qquad C_2^{(b)} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d'}.$$

Tako kot pri **a)** do preboja pride prek zraka, torej tam, kjer ni dielektrika:

$$U'^{(b)} = E_0 d'.$$

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d} = (C_1^{(b)} + C_2^{(b)})U'^{(b)} = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_0 a^2}{d'}\right) E_0 d',$$

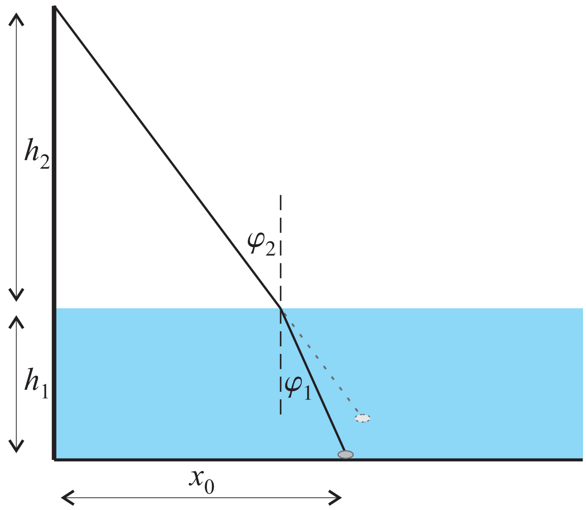
in od tod

$$d' = \frac{U}{E_0} - \frac{d}{\varepsilon} = 5{,}0 \text{ mm}.$$

[4 t.]

2. $h_1 = 1{,}00$ m, $h_2 = 2{,}00$ m, $\varphi_2 = 25°$, $n = 1{,}33$, $v_0 = 5{,}00$ m/s, $v = 1{,}00$ m/s,

a) Lovec vidi sipo pod kotom φ_2, kar določa smer svetlobnega curka, ki prihaja od sipe do njegovih oči nad gladino vode. Vpadni kot na meji zrak-voda je v zraku torej φ_2, tistega v vodi označimo z φ_1. Kota povezuje lomni zakon $\sin\varphi_2 = n\sin\varphi_1$; $\varphi_1 = 18{,}53° \approx 18{,}5°$.



Iz skice je razvidno, da velja

$$x_0 = h_1\tan\varphi_1 + h_2\tan\varphi_2 = 93{,}26\,\mathrm{cm} + 33{,}51\,\mathrm{cm} = 126{,}77\,\mathrm{cm} \approx 127\,\mathrm{cm}\,.$$

[3 t.]

b) Iz skice je razvidno, da mora lovec sulico vreči pod kotom φ, da velja

$$\tan\varphi = \frac{x_0}{h_1+h_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{x_0}{h_1+h_2}\right) = 22{,}9°\,.$$

[2 t.]

c) Sipa beži s hitrostjo v ob dnu in je po času t od pričetka gibanja v vodoravni smeri od lovca oddaljena za $x = x_0 + vt$. Da bi sulica lovca zadela sipo, mora v istem času opraviti pot $s = v_0 t$. Tir leta sulice je hipotenuza pravokotnega trikotnika, katerega ena kateta je $H = h_1 + h_2 = 3{,}00$ m, druga kateta pa je ravno vodoravna oddaljenost sipe od lovca x. Pitagorov izrek $s^2 = H^2 + x^2$ da kvadratno enačbo za čas leta sulice

$$(v_0^2 - v^2)\cdot t^2 - 2x_0 v\cdot t - \left(H^2 + x_0^2\right) = 0$$

z rešitvama

$$t_{1,2} = \frac{x_0 v \pm \sqrt{(v_0^2 - v^2)(H^2 + x_0^2) + x_0^2 v^2}}{v_0^2 - v^2}\,.$$

Rešitev z negativnim predznakom pred korenom da negativen čas, kar fizikalno ni smiselno, medtem ko da rešitev s pozitivnim predznakom rešitev $t = 0{,}7197$ s$\approx 0{,}72$ s.

Kot proti navpičnici φ', pod katerim mora lovec vreči sulico, določa enačba

$$\tan\varphi' = \frac{x_0 + vt}{H}$$

z rešitvijo

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{x_0 + vt}{h_1 + h_2}\right) = 33{,}52° \approx 33{,}5°\,.$$

[5 t.]

Opomba: Vprašanje c) se da lepo in hitro ter seveda fizikalno smisleno rešiti tudi iterativno. Argument za tak pristop je dejstvo, da je sipa veliko počasnejša od sulice.

V prvem koraku izračunamo čas leta sulice, če bi se sipa ne premaknila. Dobimo čas (ničti približek) $t_0 = \sqrt{H^2 + x_0^2}/v_0 = 0{,}6514$ s. S tem časom izračunamo premik sipe in prvi približek za vodoravno oddaljenost sipe, ko naj bi jo zadela sulica, $x_1 = x_0 + vt_0 = 1{,}919$ m. S to oddaljenostjo izračunamo prvi približek časa leta sulice $t_1 = \sqrt{H^2 + x_1^2}/v_0 = 0{,}7123$ s, ki je od pravega časa, izračunanega iz kvadratne enačbe, manjši samo za 1 %, kar je že v okviru natančnosti podatkov, torej skoraj ni treba narediti naslednje iteracije, ampak lahko kot soliden približek φ' izračunamo kar kot

$$\varphi' = \arctan \frac{x_1}{H} = 32{,}6^\circ \,.$$

Rezultat se na dve števki ujema s "pravim" ($\approx 33^\circ$), za ujemanje na vsaj 3 števke je potrebno narediti še en korak iteracije, ki da rezultat $\varphi' = 33{,}51^\circ$, kar se od prave vrednosti razlikuje samo za 0,03 %.

Kdor bi reševal iterativno in se ustavil po eni iteraciji, si zasluži pri tej nalogi vsaj 4 od 5 možnih točk, lahko dobi tudi vseh 5, saj je tak pristop bolj "fizikalen" kot reševanje kvadratne enačbe in premlevanje, katera od obeh rešitev je fizikalno smislena.

3. $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k = 200$ N/m, $k_t = 0{,}1$, $k_l = 0{,}2$, $m = 100$ g, $h = 20$ cm.

a) Pri prostem padu z višine h utež doseže hitrost $v_u = \sqrt{2gh} = 1{,}98 \approx 2{,}0$ m/s. Ko je vrvica napeta, utež potegne prvo klado. Ker je vrvica toga, se v trenutku klada začne gibati s končno veliko hitrostjo v_1, uteži pa se v istem trenutku hitrost zmanjša z v_u do hitrosti klade v_1, tako kot pri neprožnem trku. Ker je čas kratek, je sunek teže zanemarljiv in ohranja se skupna gibalna količina klade in uteži:

$$m_u v_u = (m_1 + m_u)v_1 \,, \qquad v_1 = \frac{m_u v_u}{m_1 + m_u} = \frac{m_u\sqrt{2gh}}{m_1 + m_u} = 0{,}18 \text{ m/s} \,.$$

[3 t.]

b) Takoj po tem, ko se klada začne gibati s hitrostjo v_1, deluje nanjo le sila vrvice in trenje, saj je sila vzmeti je zanemarljiva, ker je raztezek vzmeti zanemarljiv. Giblje je pospešeno s pospeškom a:

$$m_1 a = F - m_1 g k_t \,.$$

Z enakim pospeškom se giblje utež:

$$m_u a = m_u g - F = m_u g - m_1 a - m_1 g k_t \,.$$

Pospešek klade na začetku gibanja je torej enak

$$a = \frac{m_u g - m_1 g k_t}{m_1 + m_u} = 0 \,.$$

[2 t.]

c) Da se druga klade premakne, mora biti sila vzmeti večja ali kvečjemu enaki največji sili lepenja:

$$k s_0 = m_2 g k_l \,.$$

Raztezek vzmeti mora biti enak najmanj

$$s_0 = \frac{m_2 g k_l}{k} = 1{,}96 \text{ cm} \approx 2{,}0 \text{ cm} \,.$$

[2 t.]

d) Vsota sprememb vseh energij, ki nastopajo v sistemu: kinetične energije prve klade in uteži, potencialne energije uteži ter prožnostne energije vzmeti, gre na račun izgub zaradi trenja med prvo klado in tlemi. „Trk“ med klado in utežjo je neprožen, zato energijski zakon zapišemo za spremembo od trenutka, ko se začne gibati prva klada, do trenutka, ko je vzmet raztegnjena za s_0 — kar je tudi enako premiku klade in uteži. Velja torej:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_1^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_2^2 + m_u g s_0 - \tfrac{1}{2}k s_0^2 = m_1 g k_t s_0 \,.$$

Začetna hitrost v_1 je povezana z višino x, s katere moramo pred tem spustiti utež, kot $v_1 = \sqrt{2gx}\, m_u/(m_1 + m_u)$. Sledi

$$\frac{gx\, m_u^2}{m_1 + m_u} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_2^2 + \tfrac{1}{2}k s_0^2 - m_u g s_0 + m_1 g k_t s_0 \,.$$

Višina je najmanjša možna, ko je končna hitrost prve klade enaka nič ($v_2 = 0$):

$$x = \frac{(k s_0^2 + 2 g s_0(m_u - m_1 k_t))(m_1 + m_u)}{2 g m_u^2} = 43 \text{ cm} \,.$$

(Prva klada se ustavi le za hip, nato pa raztegnjena vzmet potegne obe kladi skupaj.)
(*Z vrednostjo $g = 10$ m/s^2 dobimo $x = 44$ cm.*)

[3 t.]