Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Celje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

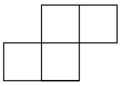
1. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera velja $p + q^2 = r^4$.

© 2013 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

2. Za realno število a naj $[a]$ označuje največje celo število, ki ni večje od a. Poišči vsa cela števila y, za katera obstaja realno število x, da velja $\left[\frac{x+23}{8}\right] = [\sqrt{x}] = y$.

3. Denimo, da obstajata taki točki D na stranici AB in E na stranici AC trikotnika ABC, da je $|AE| = |ED| = |DB|$ in $|AD| = |DC| = |CB|$. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

4. Tabelo velikosti 4×4 želimo pokriti z dominami oblike



(lahko tudi zrcaljena ali zasukana),

pri čemer se domine **lahko prekrivajo** ali **segajo čez rob tabele**. Najmanj koliko domin potrebujemo?

57. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Celje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

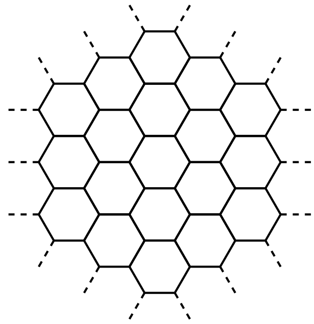
1. Največ koliko je lahko največji skupni delitelj števil $11n + 4$ in $7n + 2$, če je n naravno število?

© 2013 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

2. Naj bo D razpolovišče stranice AB, E presečišče stranice BC in simetrale kota $\angle BAC$, F pa pravokotna projekcija točke E na stranico AB trikotnika ABC. Denimo, da je $\angle CDA = \angle ACB$ in $|CE| = |BF|$. Določi velikost kotov trikotnika ABC.

3. Naj bo E taka točka na stranici CD pravokotnika $ABCD$, da je kot $\angle AEB$ pravi in velja $3|EA| = 2|EC|$. Določi razmerje med dolžinama stranic pravokotnika $ABCD$.

4. V vsakem šestkotniku neskončnega satovja je zapisano naravno število, ki je enako povprečju števil, zapisanih v petih izmed sosednjih šest šestkotnikov. Dokaži, da so vsa števila v satovju enaka.



57. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Celje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa praštevila p in q, za katera je $p^4 - q^6$ potenca praštevila.
(Števili 7 in 8 sta potenci praštevila, 6 pa ne.)

© 2013 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

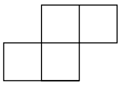
2. Za pozitivni realni števili x in y velja

$$2013^{\log_3 x} = y^{\log_5 2013} \quad \text{in} \quad \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y > 0.$$

Katero od števil x in y je večje?

3. Naj bo D razpolovišče stranice BC, E razpolovišče stranice CA in T težišče trikotnika ABC. Premice AT, BT in CT naj sekajo trikotniku ABC očrtano krožnico še v točkah P, Q in R. Denimo, da je $\angle ACB = \angle RQP$. Dokaži, da je štirikotnik $DCET$ tetiven.

4. Tabelo velikosti 4×4 želimo pokriti z dominami oblike



(lahko tudi zrcaljena ali zasukana),

pri čemer se domine **lahko prekrivajo**, ne smejo pa segati čez rob tabele. Najmanj koliko domin potrebujemo?

57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Celje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vse funkcije $f \colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, za katere velja
$$f(x) + f(y) = (x + y + 2)f(x)f(y)$$
za vse $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

© 2013 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

2. Največ koliko praštevil lahko vsebuje nekonstantno geometrijsko zaporedje pozitivnih realnih števil?

3. Naj bo $\mathcal{K}_1$ krožnica s središčem S_1 in polmerom r. Naj bo $\mathcal{K}_2$ krožnica s središčem S_2 na krožnici $\mathcal{K}_1$ in polmerom $\frac{2}{3}r$. Presečišče premice S_1S_2 s krožnico $\mathcal{K}_2$, ki leži zunaj kroga, omejenega s krožnico $\mathcal{K}_1$, označimo z A. Eno izmed presečišč krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo s C. Premica AC naj seka krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki D. Naj bo H pravokotna projekcija točke D na premico S_1S_2. Dokaži, da točka H leži na krožnici $\mathcal{K}_2$.

4. Turnir v namiznem tenisu poteka po naslednjem pravilu. V vsakem krogu v primeru lihega števila tekmovalcev najprej izžrebajo enega, ki se avtomatično uvrsti v naslednji krog. Ostale tekmovalce z žrebom razporedijo v pare. Tekmovalca vsakega para se pomerita med seboj, zmagovalec iz vsakega para pa se uvrsti v naslednji krog. Naj $f(n)$ označuje število krogov na turnirju z n tekmovalci. (Tako je npr. $f(5) = 3$.) Določi $f(2013)$ in poišči najmanjše naravno število n, za katerega je $f(n) = f(2013)$.

57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Celje, 20. april 2013

Rešitve nalog in točkovnik

(21. april 2013, 14:53)

I/1. Enačbo preoblikujemo v $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$. Ker je p praštevilo, mora biti $r^2 - q = 1$ in $r^2 + q = p$. Prvo enačbo preoblikujemo v $q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Ker je q praštevilo, mora biti $r - 1 = 1$. Torej je $r = 2$ in $q = 3$. Iz enačbe $r^2 + q = p$ dobimo še $p = 7$.

Zapis $p = (r^2 - q)(r^2 + q)$ .... **1 točka**
Sklep $r^2 - q = 1$ .... **3 točke**
Razcep $q = (r-1)(r+1)$ .... **1 točka**
Sklep $r = 2$ .... **1 točki**
Sklep $q = 3$**,** $p = 7$ .... **1 točka**

2. način. Ugotovimo, da mora biti eno od praštevil 2. Izločimo možnosti, da je $p = 2$ ali $q = 2$ (s kongruencami ali preoblikovanjem enačbe podobno kot pri prvi rešitvi). Dobimo, da je $r = 2$ in $p + q^2 = 16$. Preverimo možnosti in dobimo $q = 3$ in $p = 7$.

Sklep: eno od praštevil je 2 .... **1 točka**
Utemeljitev $p \neq 2$ .... **2 točki**
Utemeljitev $q \neq 2$ .... **2 točki**
Sklep $r = 2, q = 3, p = 7$ .... **2 točki**

I/2. Naj bo y tako število. Potem velja $\sqrt{x} \geq [\sqrt{x}] = y$. Ker je $\sqrt{x} \geq 0$, je tudi $y = [\sqrt{x}] \geq 0$, torej lahko neenakost kvadriramo, da dobimo $x \geq y^2$. Poleg tega je $\frac{x+23}{8} < [\frac{x+23}{8}] + 1 = y + 1$ oziroma $x < 8y - 15$. Od tod sledi $y^2 < 8y - 15$ oziroma $(y-3)(y-5) < 0$, kar pomeni, da je $3 < y < 5$. Ker pa mora biti y celo število, je $y = 4$. V tem primeru res obstaja x, ki ustreza pogoju, na primer $x = 16$.

TOČKOVNIK

Ugotovitev, da je $\sqrt{x} \geq y$ .... **1 točka**
Utemeljen sklep, da je $x \geq y^2$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $\frac{x+23}{8} < y + 1$ .... **2 točki**
Združitev neenačb v $y^2 < 8y - 15$ .... **1 točka**
Rešitev neenačbe $3 < y < 5$ .... **1 točka**
Utemeljitev in zapis rešitve $y = 4$ .... **1 točka**

Če tekmovalec zgolj v splošnem ugotovi, da je $[a] \leq a < [a] + 1$**, dobi 2 točki, po 1 za vsako neenakost.**

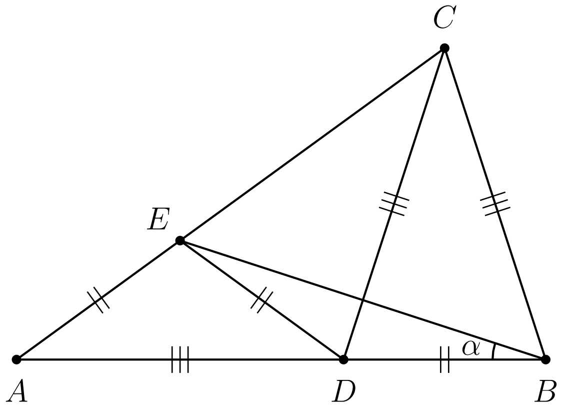
Če tekmovalec za različne vrednosti y **pravilno oceni izraza** $[\frac{x+23}{8}]$ **in** $[\sqrt{x}]$ **ter tako intuitivno utemelji, da je edina rešitev** $y = 4$**, dobi 5 točk. Za argumentirano ugotovitev (npr. z grafom ali dokazano različno hitrostjo naraščanja funkcij znotraj [ ]), da je** $y = 4$ **edina rešitev, dobi še dodatni 2 točki, skupaj torej vseh 7 točk. V primeru le delne rešitve po tej poti ali napak v postopku se ustrezno upoštevajo alineje z začetka**

© 2013 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

kriterija.

Če tekmovalec zgolj ugane rešitev $y = 4$, dobi 1 točko.

I/3.



Označimo $\angle EBD = \alpha$. Potem je $\angle DEB = \alpha$, torej je $\angle EDA = 2\alpha$ in $\angle DAE = 2\alpha$. Sledi $\angle DEC = 4\alpha$ oziroma $\angle BEC = 3\alpha$. Hkrati je $\angle ACD = \angle DAC = 2\alpha$, torej je $\angle BDC = 4\alpha$ in $\angle CBD = 4\alpha$ oziroma $\angle CBE = 3\alpha$. Sledi, da je trikotnik EBC enakokrak z vrhom pri C, torej je $|CE| = |CD|$ in zato $\angle CDE = \angle DEC = 4\alpha$. Torej je

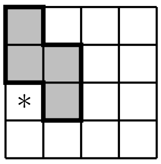
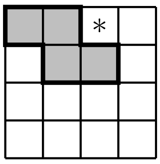
$$180^\circ = \angle BDC + \angle CDE + \angle EDA = 4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 10\alpha,$$

oziroma $\alpha = 18^\circ$. Od tod izračunamo $\angle BAC = 2\alpha = 36^\circ$, $\angle CBA = 4\alpha = 72^\circ$ ter $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle CBA = 72^\circ$.

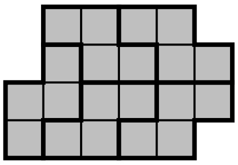
Označimo $\angle EBD = \alpha$.
Ugotovitev $\angle EBD = \angle DEB = \alpha$ .... 1 točka
Ugotovitev $\angle EDA = \angle DAE = \angle ACD = 2\angle EBD = 2\alpha$ .... 1 točka
Ugotovitev $\angle BDC = \angle CBD = 2\angle BAC = 4\alpha$ .... 1 točka
Ugotovitev $\angle BEC = \angle CBE = 3\alpha$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\triangle BCE$ enakokrak trikotnik .... 1 točka
Ugotovitev, da je $10\alpha = 180^\circ$ .... 1 točka
Izračun $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle CBA = 72^\circ$ ter $\angle ACB = 72^\circ$ .... 1 točka

Nalogo je možno rešiti na veliko načinov, zapisana je še ena verzija točkovnika:
Naj bo $\angle BAC = \alpha$ in $\angle CBA = \beta$. Ugotovitev $2\alpha = \beta$ .... 2 točki
Ugotovitev $\triangle EBC$ je enakokrak ali štirikotnik $CEDB$ je deltoid .... 3 točke
Izračun kotov $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle CBA = 72^\circ$ ter $\angle ACB = 72^\circ$ .... 2 točki
Če pride tekmovalec do neke ugotovitve brez kakršnekoli razlage, sklepa ali računa, se mu odbijeta 2 točki. Za vsako nadaljno neutemeljeno ugotovitev, se odbije 1 točka.

I/4. Potrebujemo vsaj 5 domin. Če bi tabelo lahko pokrili s štirimi dominami, se te med sabo ne bi smele prekrivati in ne bi smele segati čez rob tabele, saj imajo štiri domine skupaj natanko 16 polj. Če to upoštevamo, potem lahko polje v levem zgornjem kotu pokrijemo le na dva načina, kot prikazuje skica, vendar potem polja označenega z $*$ ne moremo nikakor pokriti.

Da 5 domin zadostuje, prikazuje naslednja skica.



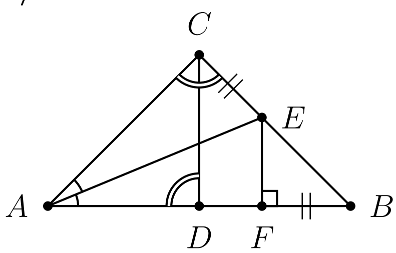
Primer, da s petimi dominami lahko pokrijemo .... 3 točke
Trditev, da je odgovor 5 (tudi, če ni utemeljena ali če ni primera za 5)....... 1 točka
Ugotovitev, da če imamo le 4 domine, te ne segajo čez rob .... 1 točka
Pravilno do konca dokazano, da potrebujemo vsaj 5 domin .... 2 točki

II/1. Največji skupni delitelj števil $11n+4$ in $7n+2$ deli tudi $7(11n+4)-11(7n+2)=6$, torej je lahko največ 6. Če je $n=4$, je $11n+4=48$ in $7n+2=30$, največji skupni delitelj teh dveh števil pa je natanko 6. Odgovor je torej 6.
2. način. Največji skupni delitelj števil $11n+4$ in $7n+2$ poiščimo z Evklidovim algoritmom.

$$\begin{aligned} 11n+4 &= 1\cdot(7n+2)+(4n+2)\\ 7n+2 &= 1\cdot(4n+2)+3n\\ 4n+2 &= 1\cdot 3n+(n+2)\\ 3n &= 3\cdot(n+2)-6 \end{aligned}$$

Največji skupni delitelj zgornjih dveh števil deli 6. Če je $n=4$, je $11n+4=48$ in $7n+2=30$, največji skupni delitelj teh dveh števil pa je natanko 6. Odgovor je torej 6.
Potek (odvisno za katero rešitev; točke se lahko delijo) .... 4 točke
(Točke za potek se v primeru, da dijak ne pride do konca, razdelijo: 1 točka za začetek izvajanja Evklidovega algoritma, do 2 točki, če se kje zmoti, a je postopek pravilen in ga zaključi in 1 točka za zadnjo vrstico.)
Sklep, da največji skupni delitelj deli 6, oz. da je največ 6. .... 1 točka
Konkreten primer za doseženo zgornjo mejo, npr. $n=4$**:** $D(48,30)=6$ **ali splošno** $n=6k-2,\ k\in\mathbb{N}$**. (Največji možen skupni delitelj je torej 6.) .... 2 točki**
(Odgovor brez primera prinese 1 točko.)

II/2.



Ker je $\angle CDA = \angle ACB$, sta si trikotnika ADC in ACB podobna, zato je

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|AB|}{2|AC|},$$

od koder sledi $|AB| = |AC|\sqrt{2}$. Ker je AE simetrala kota $\angle BAC$, je

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \sqrt{2}$$

in iz $|CE| = |BF|$ sledi $|BE| = \sqrt{2}|BF|$. Ker je EFB pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču F, po Pitagorovem izreku sledi, da je tudi $|EF| = |BE|\sqrt{2}$, kar pomeni, da je trikotnik EFB tudi enakokrak in je $\angle CBA = \angle EBF = \frac{\pi}{4}$. Vemo že, da sta si trikotnika ABC in ACD podobna, zato je $\angle ACD = \angle CBA = \frac{\pi}{4}$. Naj bo D' pravokotna projekcija točke A na premico CD. Potem je $AD'C$ enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|AD'| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$. Po drugi strani pa smo že izračunali, da je $|AD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$. Ker točki D in D' obe ležita na premici CD, pri čemer je D' pravokotna projekcija točke A na CD, sledi, da je $D' = D$. Torej je $\angle CDA = \frac{\pi}{2}$. Sledi $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ in $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

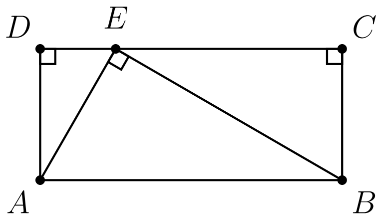
Določitev razmerja $|AB|/|AC|$ .... **1 točka**
Določitev razmerja $|BE|/|BF|$ .... **1 točka**
Določitev kota $\angle CBA$ .... **2 točki**
Projiciranje točke A .... **2 točki**
Določitev kotov trikotnika $\angle ABC$ .... **1 točka**

2. način. Kot v prvi rešitvi pokažemo, da je $|AB| = \sqrt{2}|AC|$ in $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$. Od tod po kosinusnem izreku sledi

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\frac{\sqrt{2}}{2} = 2|AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC|,$$

kar lahko preoblikujemo v $(|AC| - |BC|)^2 = 0$. Tore je $|AC| = |BC|$ in zato $\angle BAC = \angle CBA = \frac{\pi}{4}$ in $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

II/3.

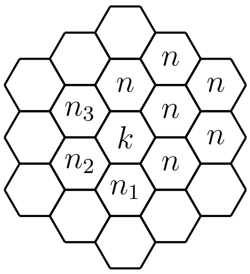


Označimo $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |DA| = b$ in $|EC| = c$. Tedaj je $|EA| = \frac{2}{3}c$ in $|ED| = a - c$. Po Pitagorovem izreku za trikotnik AED velja $b^2 + (a-c)^2 = \frac{4}{9}c^2$ oziroma $b^2 = -a^2 + 2ac - \frac{5}{9}c^2$. Po Pitagorovem izreku za trikotnika BCE in ABE velja $c^2 + b^2 = |EB|^2 = a^2 - \frac{4}{9}c^2$ oziroma $b^2 = a^2 - \frac{13}{9}c^2$. Ti dve enačbi primerjamo in dobimo $-a^2 + 2ac - \frac{5}{9}c^2 = a^2 - \frac{13}{9}c^2$ oziroma $a^2 - ac - \frac{4}{9}c^2 = 0$. Slednje lahko razstavimo kot $(a - \frac{4}{3}c)(a + \frac{1}{3}c) = 0$. Ker sta a in c pozitivna, mora torej veljati $a = \frac{4}{3}c$. Od tod dobimo še $b^2 = \frac{1}{3}c^2$ oziroma $b = \frac{1}{\sqrt{3}}c$. Torej je razmerje med dolžinama stranic pravokotnika enako $\frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Zapisan Pitagorov izrek za trikotnik AED. .... **1 točka**
Pitagorov izrek za trikotnik BCE. .... **1 točka**
Pitagorov izrek za trikotnik ABE. .... **1 točka**
Eksplicitno zapisana kvadratna enačba $a^2 - ac - \frac{4}{9}c^2 = 0$. .... **1 točka**
Razcep izraza na $(a - \frac{4}{3}c)(a + \frac{1}{3}c) = 0$. .... **1 točka**

Izračunan $b = \frac{1}{\sqrt{3}}c$. .... **1 točka**
Izračunan $\frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. .... **1 točka**

II/4. Ker so vsa števila v satovju naravna, obstaja najmanjše izmed njih. Označimo ga z n. Dovolj je pokazati, naslednje: če je v nekem šestkotniku zapisano število n, potem so v sosednjih šestkotnikih tudi zapisana števila n. Ker obstaja šestkotnik s številom n, bo potem namreč sledilo, da je v vseh šestkotnikih zapisano število n. Naj bo v nekem šestkotniku zapisano število n. Ker je n najmanjše število v satovju, so na sosednjih šestkotnikih zapisana števila večja ali enaka n. Ker pa je povprečje petih izmed njih enako n, mora biti teh pet števil enakih n. Naj bo število na šestem sosednjem šestkotniku enako k. Denimo, da je $k \neq n$. Označimo preostala tri števila na šestkotnikih sosednjih šestkotniku s številom k z n_1, n_2 in n_3 (glej sliko).



Na sliki si poglejmo šestkotnik s številom n, ki je soseden šestkotniku s številom n_1. Ker je na njem zapisano število n, podobno kot prej sklepamo, da je pet izmed števil na sosednjih šestkotnikih enakih n. Ker pa je $k > n$, sledi, da je $n_1 = n$. Če sedaj pogledamo šestkotnik s številom $n_1 = n$, podobno sklepamo, da je tudi $n_2 = n$. Če nazadnje pogledamo še šestkotnik s številom $n_2 = n$, spet lahko sklepamo, da je tudi $n_3 = n$. Torej so vsa števila na šestkotnikih sosednjih šestkotniku s številom k enaka n, zato bi moralo biti tudi število k enako n, kar pa je protislovje. Torej je $k = n$ in s tem je dokaz končan.

Uporaba ali zapis najmanjšega elementa satovja .... **3 točke**
Največ en sosed od n je različen od n (n je najmanjši element) .... **1 točka**
Vsi sosedi števila k so n .... **3 točke**
(pri tem se 1 točka dodeli za poskus obravnave sosedov števila k)

III/1. Pišimo $p^4 - q^6 = r^n$ za neko praštevilo r in naravno število n. Izraz $p^4 - q^6$ najprej razstavimo kot $p^4 - q^6 = (p^2 - q^3)(p^2 + q^3)$. Ker je $p^4 - q^6 > 0$, praštevili p in q ne moreta biti enaki, torej sta si tuji. Naj bo d največji skupni delitelj števil $p^2 - q^3$ in $p^2 + q^3$. Potem d deli tudi $2p^2$ in $2q^3$, zato je zaradi tujosti p in q lahko d največ 2.

Če je $d = 2$, je tudi $r = 2$ in je $p^2 - q^3 = 2$ in $p^2 + q^3 = 2^{n-1}$. Enačbi seštejemo, delimo z 2 in dobimo $p^2 = 1 + 2^{n-2}$ oziroma $2^{n-2} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Števili $p - 1$ in $p + 1$ morata biti obe potenci števila 2, kar pa je možno le v primeru $p = 3$. Toda zdaj dobimo protislovje $q^3 = 7$.

Torej je $d = 1$. Ker sta števili $p^2 - q^3$ in $p^2 + q^3$ tuji, njun produkt pa je potenca praštevila, mora biti $p^2 - q^3 = 1$ oziroma $p^2 = q^3 + 1 = (q+1)(q^2 - q + 1)$. Ker je q praštevilo, je $q + 1 > 2$ in $q^2 - q + 1 > 2$, torej noben od faktorjev $q + 1$ in $q^2 - q + 1$ ni enak 1. Če želimo, da bo njun produkt kvadrat praštevila, morata biti torej faktorja enaka. Iz enakosti $q + 1 = q^2 - q + 1$ sledi $q = 2$ in iz $p^2 = 1 + q^3$ dobimo še $p = 3$. Nazadnje še preverimo, da je $3^4 - 2^6 = 17$ res potenca praštevila. Edina rešitev je torej $p = 3$, $q = 2$.

Zapis razstavljenega izraza .... **1 točka**

Izračun možnih gcd števil $p^2 + q^3$ in $p^2 - q^3$ .... 2 točki
Sklep $p^2 - q^3 = 1$ v primeru gcd($p^2 + q^3$, $p^2 - q^3$)=1 .... 1 točka
Zapis rešitev $p = 3$, $q = 2$ v primeru gcd($p^2 + q^3$, $p^2 - q^3$)=1 .... 1 točka
Sklep $p^2 + q^3 = 2^{n-1}$ in $p^2 - q^3 = 2$ v primeru gcd($p^2 + q^3$, $p^2 - q^3$)=2.......... 1 točka
Zapis $p = 3$ in sklep, da ni rešitev v primeru gcd($p^2 + q^3$, $p^2 - q^3$)=2.......... 1 točka

2. način. Spet pišimo $p^4 - q^6 = r^n$. Z razmislekom o sodosti in lihosti ugotovimo, da vsi trije izmed p, q, r hkrati ne morejo biti lihi. Ker je $r > 0$, velja še $p > q$. Zaradi pozitivnosti vseh členov pridemo tudi do sklepa, da so si p, q, r paroma različni. Ker je vsaj en sod, lahko obravnavamo 3 možnosti. Če je $p = 2$, zaradi $p > q$ sledi $q = 1$. V tem primeru torej ni rešitev. Če je $q = 2$, lahko izraz razstavimo: $(p^2 - 8)(p^2 + 8) = r^n$, oziroma $p^2 - 8 = r^a$ in $p^2 + 8 = r^b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}_0$, in $b > a$. Spet ločimo dve možnosti: če $a = 0$, dobimo rešitev $p = 3$, $q = 2$, $r = 17$. Če pa je $a > 0$, lahko enačbi odštejemo in izpostavimo r: $16 = r(r^{b-1} - r^{a-1})$. Dobimo torej, da $r|16$, od koder sledi $r = 2 = q$, kar spet ne da rešitev. Ostane še obravnava primera, ko je le $r = 2$. Spet zapišemo $p^2 - q^3 = 2^a$ in $p^2 + q^3 = 2^b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}_0$ in $a < b$. Tokrat ločimo tri primere: če je $a = 0$, dobimo $(p-1)(p+1) = q^3$, od koder (zaradi $p \neq 2$) sledi $p - 1 = q$ in $p + 1 = q^2$ oziroma $q = 2$. Torej spet ni rešitev. Če je $a = 1$ pa lahko enačbi seštejemo in izpostavimo 2. Po razcepu dobimo: $(p-1)(p+1) = 2^{b-1}$, kjer $b > 1$. Sledi, da sta tako $p - 1$ kot $p + 1$ potenci dvojke, kar je možno le, če $p = 3$, od koder pa dobimo, da je $q^3 = 7$. Spet ni rešitev. Če pa je $a > 1$, spet seštejemo enačbi in izpostavimo štirico: $2p^2 = 4(2^{b-2} - 2^{a-2})$. Od tod pa sledi $p = 2$, kar spet ne da rešitev.

Ugotovitve, da p, q in r ne morejo biti vsi lihi, da so paroma različni in da $p > q$ ... 1 točka
Obravnava primera $p = 2$ .... 1 točka
Obravnava primera $q = 2$ (primera $a = 0$ in $a > 0$, zapis rešitve) .... 2 točki
Obravnava primera $r = 2$ (trije podprimeri)................................ 3 točke

III/2. Če enakost logaritmiramo in upoštevamo zvezi $\log a^b = b \log a$ ter $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$, dobimo $\frac{\log x \log 2013}{\log 3} = \frac{\log y \log 2013}{\log 5}$ oziroma $\log y = \frac{\log 5}{\log 3} \log x = \log_3 5 \log x$. Od tod med drugim sledi, da sta $\log y$ in $\log x$ istega predznaka, torej sta x in y bodisi oba manjša od 1 bodisi oba enaka 1 bodisi oba večja od 1. Po drugi strani lahko neenakost preuredimo v $\log_{\frac{1}{2}}(xy) > 0$ in ker je $\frac{1}{2} < 1$, sledi $xy < 1$. Iz obojega sledi, da sta x in y manjša od 1, torej sta $\log x$ in $\log y$ negativna. Ker pa je $\log_3 5 > 1$, sledi $\log y = \log_3 5 \log x < \log x$, oziroma $y < x$. Torej je večje število x.

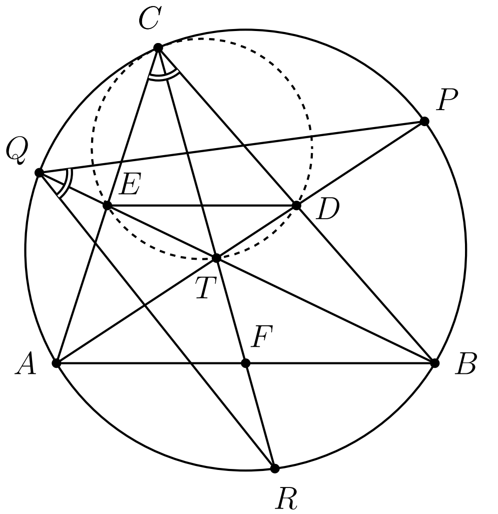
Preureditev enakosti v obliko $\log y = \log_3 5 \log x$ .... 2 točki
Preureditev neenakosti v obliko $xy < 1$ .... 2 točki
Sklep, da je $x < 1$, $y < 1$ (oziroma $\log x < 0$, $\log y < 0$) .... 2 točki
Sklep, da je $y < x$ .... 1 točka

2. način. Ker sta x in y pozitivni števili, ju lahko zapišemo v obliki $x = 3^\alpha$ in $y = 5^\beta$, kjer sta α in β realni števili. Če slednje vstavimo v enakost, dobimo $2013^\alpha = \left(5^{\log_5 2013}\right)^\beta = 2013^\beta$, torej je $\alpha = \beta$. Če x in y vstavimo še v neenakost, dobimo $\alpha(\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{2}} 5) > 0$. Ker je $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$, sledi $\alpha < 0$. Torej je $x = 3^\alpha > 5^\alpha = y$. Večje število je torej x.

Zapis v obliki $x = 3^\alpha$, $y = 5^\beta$ .... 3 točke
Sklep, da je $\alpha = \beta$ .... 2 točki

Sklep, da je $\alpha < 0$ .... **1 točka**
Sklep, da je $y < x$ .... **1 točka**

III/3.



Zaradi tetivnosti štirikotnika $RBCQ$ je $\angle RQB = \angle RCB$, torej iz pogoja naloge sledi $\angle ECT = \angle ACR = \angle BQP$. Ker je štirikotnik $QABP$ tetiven, pa je $\angle BQP = \angle BAP$. Ker sta E in D razpolovišči stranic, sta premici AB in DE vzporedni, torej je $\angle BAP = \angle EDA = \angle EDT$. Iz vsega sledi $\angle ECT = \angle EDT$, torej je štirikotnik $DCET$ tetiven.

Tetivnost ARBPCQ ali posameznih štirikotnikov .... **1 točka**
$\angle ACR = \angle BQP$ .... **2 točki**
$\angle BQP = \angle BAP$ .... **1 točka**
AB **je vzporedna** ED .... **1 točka**
$\angle BAP = \angle EDA$ .... **1 točka**
$ETDC$ **je tetiven** .... **1 točka**

2. način. Označimo dolžine stranic trikotnika in njegove kote kot običajno in naj bo F razpolovišče stranice AB. Zaradi tetivnosti šestkotnika $ARBPCQ$ in predpostavke naloge je $\angle RAT = \angle RAP = \angle RQP = \gamma$ in $\angle TRA = \angle CRA = \beta$. To pomeni, da sta si trikotnika ABC in TRA podobna in velja $\angle ATR = \alpha$. Po drugi strani pa je zaradi tetivnosti tudi $\angle BRT = \angle BRC = \alpha$. Torej sta si trikotnika AFT in BFR podobna in zaradi $|AF| = |BF|$ sta celo skladna. Zato je $ARBT$ paralelogram, od koder sledi $\angle DTE = \pi - \angle BTP = \pi - \angle TBR = \pi - \angle RAT = \pi - \gamma$, torej je štirikotnik $TDCE$ res tetiven.

Tetivnost ARBPCQ ali posameznih štirikotnikov .... **1 točka**
$ARBT$ **je paralelogram** .... **3 točke**
$\angle DTE = \pi - \gamma$ .... **2 točki**
$ETDC$ **je tetiven** .... **1 točka**

3. način. Kot v drugi rešitvi ugotovimo, da je $\angle ATR = \alpha$. Od tod pa sledi podobnost trikotnikov AFT in CFA. Zato je

$$\frac{|AF|}{|FT|} = \frac{|CF|}{|AF|}.$$

Ker težišče deli težiščnico v razmerju $2:1$, je $|FT| = \frac{1}{3}|CF|$, in ker je $|AF| = \frac{c}{2}$, sledi $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Prav tako zaradi podobnosti trikotnikov AFT in CFA velja

$$\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|CF|}.$$

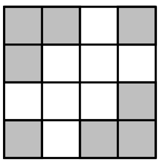
Upoštevamo, da je $|AF| = \frac{c}{2}$ in $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, in dobimo $|AT| = \frac{b}{\sqrt{3}}$ in $|AD| = \frac{3}{2}|AT| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Sledi

$$\frac{|AT|}{|AE|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

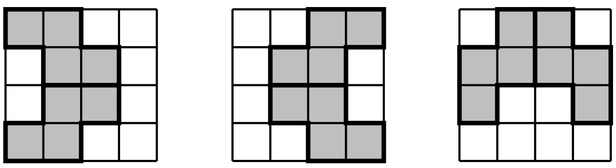
torej sta si trikotnika ATE in ACD podobna. Torej je $\angle ECD = \pi - \angle DTE$, kar pomeni, da je štirikotnik $ECDT$ tetiven.

$\angle ATR = \alpha$ .... **2 točki**
AFT **in** CFA **sta podobna** .... **2 točki**
ATE **in** ACD **sta podobna** .... **2 točki**
$ETDC$ **je tetiven** .... **1 točka**

III/4. Potrebujemo vsaj 6 domin. Oglejmo si osenčena polja na naslednji skici.



Za pokritje levega spodnjega in desnega zgornjega vogala potrebujemo dva domini in ti dve domini ne pokrijeta nobenega drugega osenčenega polja. Za pokritje treh osenčenih polj v levem zgornjem vogalu potrebujemo vsaj dve domini (ker domine ne smejo segati čez rob tabele) in ti dve domini ne bosta pokrili nobenega drugega osenčenega polja. Za pokritje treh osenčenih polj v desnem spodnjem vogalu prav tako potrebujemo vsaj dve domini. Skupaj torej potrebujemo vsaj 6 domin. Da 6 domin zadostuje, je razvidno iz naslednjih skic, ki prikazujejo položaje vseh šestih domin.



Ugotovitev, da 4 ali manj domin ne zadošča .... **1 točka**
Ugotovljeno da potrebujemo vsaj 6 domin .... **4 točke**
Najden primer za 6 domin .... **2 točki**

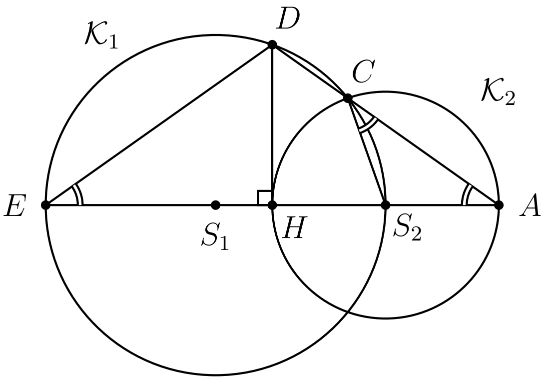
IV/1. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = 0$, da dobimo $f(0) = f(0)^2$. Torej je $f(0) = 0$ ali $f(0) = 1$. Če je $f(0) = 0$, v funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$ in dobimo $f(x) = 0$ za vsak x. Očitno ta funkcija zadošča pogojem naloge. Če pa je $f(0) = 1$, v funkcijsko enačbo spet vstavimo $y = 0$ in izpeljemo $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Prepričamo se lahko, da tudi ta funkcija zadošča pogojem naloge. Rešitvi naloge sta torej funkciji $f(x) = 0$ in $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Zapis enakosti za $x = 0$**,** $y = 0$ **ali** $x = y$ **.................................... 1 točka**
Ugotovitev, da je $f(0) = 0$ **ali** $f(0) = 1$ **.................................... 2 točki**
Ugotovitev, da je $f(x) = 0$ **rešitev .... 1 točka**
Ugotovitev, da je $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **rešitev .... 1 točka**
Ugotovitev, da ni drugih rešitev .... 1 točka
Preverjanje, da je $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **res rešitev (**$f(x) = 0$ **je očitno rešitev) .... 1 točka**

IV/2. Odgovor je 2. Primer takega zaporedja je na primer zaporedje $a_n = 2(\frac{3}{2})^{n-1}$, ki vsebuje praštevili 2 in 3. Denimo, da geometrijsko zaporedje $a_n = aq^{n-1}$, kjer je $q \neq 1$ vsebuje tri praštevila. Denimo, da so to a_k, a_m in a_n, kjer je $k < m < n$. Ker je zaporedje nekonstantno, so ta tri praštevila različna. Ker je $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$ in $\frac{a_m}{a_k} = q^{m-k}$, velja $\left(\frac{a_n}{a_m}\right)^{m-k} = \left(\frac{a_m}{a_k}\right)^{n-m}$ oziroma $a_n^{m-k} a_k^{n-m} = a_m^{n-k}$. Ker pa so $m-k, n-m, n-k > 0$ in so a_k, a_m, a_n različna praštevila, to ni mogoče.

Primer zaporedja z dvema praštevilom a .... 2 točki
Izražava $\frac{a_n}{a_m}$ **in** $\frac{a_m}{a_k}$ **.................................... 1 točka**
Zveza $a_n^{m-k} a_k^{n-m} = a_m^{n-k}$ **.................................... 2 točki**
Sklep, da to ni možno .... 1 točka
Razlog je enoličnost praštevilskega razcepa .... 1 točka

IV/3.



Ker je štirikotnik ES_2CD tetiven, je $\angle S_2ED = \angle S_2CA = \angle CAS_2$. Torej je trikotnik EAD enakokrak z vrhom D. Od tod sledi $|AH| = |EH|$ oziroma $|AH| = \frac{1}{2}|EA| = \frac{1}{2}\left(2r + \frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{3}r$. Ker je $\frac{4}{3}r$ natanko premer krožnice $\mathcal{K}_2$, točka H leži na krožnici $\mathcal{K}_2$.

TOČKOVNIK

$\angle S_2ED = \angle S_2CA = \angle CAS_2$ **.................................... 2 točki**
ADE **je enakokrak .... 1 točka**
$|AH| = |HE|$ **.................................... 1 točka**
Izračun $|AH| = \frac{4}{3}r$ **.................................... 2 točki**
Sklep, da tedaj H **leži na** $\mathcal{K}_2$ **.................................... 1 točka**

2. način.

Postavimo problem v pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v S_1. Brez škode za splošnost lahko izberemo koordinatni sistem tako, da je $r = 1$ in da tudi S_2 leži na x-osi. Tedaj velja $S_1(0,0)$, $S_2(1,0)$, $A(\frac{5}{3},0)$, $\mathcal{K}_2 : x^2 + y^2 = 1$, $\mathcal{K}_2 : (x-1)^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2$. Presečišče

$\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{4}{9}$, upoštevamo $x^2 + y^2 = 1$, torej $x = \frac{7}{9}$ in $y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Brez škode za splošnost lahko izberemo pozitivni y, torej dobimo $C(\frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9})$. Premica p skozi AC: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{6}$. Izračunamo presečišče p in $\mathcal{K}_1$: $x^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{6})^2 = 1$, torej $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{18} = 0$, in dobimo $x_1 = \frac{7}{9}$ in $x_2 = \frac{1}{3}$. Prvi je x koordinata točke C, drugi pa x koordinata točke D. Koordinate točke H, ki je pravokotna projekcija točke D na x-os, so torej $H(\frac{1}{3}, 0)$. Ta točka ustreza enačbi za $\mathcal{K}_2$, torej leži na $\mathcal{K}_2$.

TOČKOVNIK

Pravilne enačbe obeh krožnic in postavitev A, S_1, S_2 .... **1 točka**
Izračun točke C .... **1 točka**
Premica AC .... **1 točka**
Točka D **(zadostuje x-koordinata)** .... **1 točka**
Točka H .... **2 točki**
Točka H **ustreza** $\mathcal{K}_2$ .... **1 točka**

3. način.

Naj bo X od A različno presečišče $\mathcal{K}_2$ z S_1S_2. $\angle CS_2B = 2\angle CAX$ (obodni in središčni kot). $\angle ACS_2 = \angle ACS_2 = \angle DBS_2$ torej $\angle S_2S_1D = 2\angle DBS_2 = \angle CS_2B$. $\frac{|S_1D|}{|S_1X|} = \frac{r}{r-\frac{2}{3}r} = 3$ in $\frac{|BS_2|}{S_2C} = \frac{2r}{\frac{2}{3}r} = 3$, torej sta trikotnika BS_2C in DS_1X podobna. Ker pa je $\angle BCS_2 = \frac{\pi}{2}$, je $\angle DXS_1 = \frac{\pi}{2}$ in torej $H = X$.

TOČKOVNIK

$\angle CAX = \angle ACS_2 = \angle DBX$ .... **1 točka**
$\angle CS_2X = \angle DS_1X$ .... **1 točka**
$\frac{|S_1D|}{|S_1X|} = \frac{|BS_2|}{S_2C}$ .... **2 točki**
podobnost BS_2C **in** DS_1X .... **1 točka**
$\angle DXS_1 = \frac{\pi}{2}$ .... **1 točka**
$X = H$ .... **1 točka**

4. način.

Brez škode za splošnost si lahko izberemo enote tako, da je $r = 1$. Naj bo F drugo presečišče $\mathcal{K}_1$ s S_1S_2 in naj bo P pravokotna projekcija točke C na S_1SS_2. Tedaj velja $|S_1P + PS_2 = 1$. Uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku CPS_2: $|CP|^2 = (\frac{2}{3})^2 - |PS_2|^2$ in v trikotniku S_1CP: $|CP|^2 = 1 - |S_1P|^2 = 1 - (1 - |S_2P|)^2$. Iz teh dveh enačb sedaj dobimo $|PS_2| = \frac{2}{9}$ in $|CP| = \sqrt{\frac{32}{81}}$. Pitagorov izrek v trikotniku ACP: $|AC|^2 = |CP|^2 + |PA|^2 = \frac{32}{27}$, torej $|AC| = \sqrt{\frac{32}{27}}$. Potenca točke A na $\mathcal{K}_1$: $|AC| \cdot |AD| = |AS_2| \cdot |AF| = \frac{16}{9}$, torej $|AD| = \frac{16}{9\sqrt{\frac{32}{27}}}$. Trikotnika PAC in DHA sta podobna, torej velja $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AH|}$, torej $|AH| = \frac{|AD|\cdot|AP|}{|AC|} = \frac{4}{3}$, kar je ravno premer $\mathcal{K}_2$, torej H leži na $\mathcal{K}_2$.

TOČKOVNIK

Zapisana Pitagorova izreka za CPS_2 **in** S_1CP .... **1 točka**
Izražava $|CP|$ **in** $|PS_2|$ .... **1 točka**
Izražava $|AC|$ .... **1 točka**
Potenca točke in izražava $|AD|$ .... **1 točka**
Podobnost in razmerje za trikotnika PAC **in** DHA .... **1 točka**

Izražen $|AH|$ .... **1 točka**
Tedaj je H na $\mathcal{K}_2$ .... **1 točka**

IV/4. Če je na turnirju 2013 tekmovalcev, potem gre v drugi krog $1 + \frac{2012}{2} = 1007$ tekmovalcev. V tretji krog se uvrsti $1 + \frac{1006}{2} = 504$ tekmovalcev, v četrti krog pa $\frac{504}{2} = 252$ tekmovalcev. V peti krog nato napreduje $\frac{252}{2} = 126$ tekmovalcev, v šestega $\frac{126}{2} = 63$ tekmovalcev, v sedmega pa $1 + \frac{62}{2} = 32$ tekmovalcev. V osmi krog gre $\frac{32}{2} = 16$ tekmovalcev, v devetega $\frac{16}{2} = 8$ tekmovalcev, v desetega pa $\frac{8}{2} = 4$ tekmovalci. V enajsti krog se uvrstita 2 tekmovalca, ki se v tem krogu pomerita za zmago. Torej je $f(2013) = 11$.

Če je na turnirju manj ali enako $1024 = 2^{10}$ tekmovalcev, potem bo na turnirju največ 10 krogov. Po j-tem krogu bo namreč ostalo največ $\frac{2^{10}}{2^j} = 2^{10-j}$ tekmovalcev. Torej jih po 10-ih krogih ostane največ $2^{10-10} = 1$ in turnir je že zaključen. Poračunajmo, da velja $f(1025) = 11$. Ker je $1025 = 1 + 2^{10}$, se v drugi krog uvrsti $1 + 2^9$ tekmovalcev, v tretji krog $1 + 2^8$ tekmovalcev, v četrtega $1 + 2^7$ tekmovalcev in tako dalje, vse do desetega kroga, v katerega se uvrstijo $1 + 2^1 = 3$ tekmovalci. V enajsti krog se uvrstita dva tekmovalca, ki se pomerita za zmago. Najmanjše naravno število n, pri katerem je $f(n) = f(2013)$, je torej 1025.

TOČKOVNIK ZA URADNO REŠITEV:
Izračun $f(2013) = 11$ .... **2 točki**
(za pravilen izračun a napačen odgovor dobi tekmovalec 1 točko)
Sklep, da za $n \leq 1024$ velja $f(n) \leq 10$ .... **3 točke**
(če manjka utemeljitev, dobi tekmovalec največ 1 točko, za izračun $f(1024) = 10$)
Izračun $f(1025) = 11$ .... **2 točki**

Če je določena vrednost funkcije f le navedena, izračun pa manjka, se tekmovalcu odšteje 1 točka.

TOČKOVNIK ZA ALTERNATIVNO REŠITEV:
Ugotovitev $f(2^k) = k$ .... **1 točka**
Ugotovitev $f(n) = k + 1$ za $2^k < n < 2^{k+1}$ .... **3 točke**
(če manjka utemeljitev dobi tekmovalec 0 točk)
Sklep $f(2013) = 11$ .... **2 točki**
Odgovor $n = 1025$ .... **1 točka**