Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo neenačbo

$$\frac{|x-3|+x}{x+1}<1.$$

(20 točk)

B2. Pokaži, da je izraz $2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n$ deljiv s 17 za vsako naravno število n.

(20 točk)

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa cela števila z, za katera je tudi $\frac{5z^2+3}{z-1}$ celo število.

(20 točk)

B2. Dana sta dva enako dolga vektorja $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ in $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ neničelna vektorja, za katera velja $|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$.

(a) Izračunaj velikost kota med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(b) Izračunaj velikost kota med vektorjema $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ in $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$.

(20 točk)

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa naravna števila n, za katera je

$$\frac{100n^5 - n^4 - 50n^3 + 2n^2 - 290n - 2}{n^2 - 2}$$

celo število.

(20 točk)

B2. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\sqrt{\log_2 x} - \log_2(\sqrt{2}x) + \frac{5}{2} = 0.$$

(20 točk)

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa realna števila x, za katera je vrednost funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{15x^2 + 2}{3x^2 + 5}}$$

celo število.

(20 točk)

B2. Naj bodo x, y in z zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Dokaži, da velja

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

(20 točk)

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 1. letnik

B1. Obravnavamo dva primera.

Če je $x \geq 3$, je $|x-3| = x-3$, torej dobimo neenakost $\frac{2x-3}{x+1} < 1$, ki jo preoblikujemo do $\frac{x-4}{x+1} < 0$. Imamo dve možnosti, bodisi je $x-4>0$ in $x+1<0$ ali pa je $x-4<0$ in $x+1>0$. V prvem primeru nimamo rešitev, saj sledi protislovje $4<x<-1$. V drugem primeru pa dobimo $-1<x<4$. Z upoštevanjem pogoja $x \geq 3$, dobimo rešitve $3 \leq x < 4$ oziroma $x \in [3,4)$.

Če pa je $x<3$, je $|x-3| = -(x-3)$. V tem primeru dobimo neenakost $\frac{3}{x+1} < 1$, ki jo preoblikujemo do $\frac{2-x}{x+1} < 0$. Spet imamo dve možnosti, bodisi je $2-x>0$ in $x+1<0$ ali pa je $2-x<0$ in $x+1>0$. V prvem primeru sledi $x<-1$, v drugem primeru pa $x>2$. Z upoštevanjem pogoja $x<3$, dobimo rešitve $x<-1$ in $2<x<3$ oziroma $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3)$.

Skupna rešitev je torej $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup [3,4) = (-\infty,-1) \cup (2,4)$.

Ločevanje primerov $x \geq 3$ ali $x<3$ (zapis ali uporaba) .... 1 točka
Reševanje naloge, ko je $x \geq 3$:
Zapis ali uporaba $|x-3| = x-3$ .... 1 točka
Zapis neenačbe $\frac{2x-3}{x+1} < 1$ .... 1 točka
Preoblikovanje v ekvivalentno neenačbo $\frac{x-4}{x+1} < 0$ .... 2 točki
Zapis možnosti $x-4>0$ in $x+1<0$ .... 1 točka
Zapis rešitev $x \in \{\}$ .... 1 točka
Zapis možnosti $x-4<0$ in $x+1>0$ .... 1 točka
Zapis rešitev $-1<x<4$ .... 1 točka
Upoštevanje pogoja $x \geq 3$ in zapis končne rešitve $x \in [3,4)$ .... 1 točka

Reševanje naloge, ko je $x<3$:
Zapis ali uporaba $|x-3| = -(x-3)$ .... 1 točka
Zapis neenačbe $\frac{3}{x+1} < 1$ .... 1 točka
Preoblikovanje v ekvivalentno neenačbo $\frac{2-x}{x+1} < 0$ .... 2 točki
Zapis možnosti $2-x>0$ in $x+1<0$ .... 1 točka
Zapis rešitev $x<-1$ .... 1 točka
Zapis možnosti $2-x<0$ in $x+1>0$ .... 1 točka
Zapis rešitev $x>2$ .... 1 točka
Upoštevanje pogoja $x<3$ in zapis končne rešitve $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3)$ .. 1 točka

Zapis skupne rešitve $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup [3,4) = (-\infty,-1) \cup (2,4)$ ..... 1 točka

B2. Naj bo n poljubno naravno število. Dani izraz preoblikujemo

$$2^{2n+3}+3^{n+2}\cdot 7^n=2^3\cdot 2^{2n}+3^2\cdot 3^n\cdot 7^n=8\cdot 4^n+9\cdot 21^n=17\cdot 4^n+9\cdot(21^n-4^n).$$

Ker je prvi člen večkratnik števila 17, zadošča dokazati, da je 21^n-4^n deljivo s 17. Slednje sledi iz enakosti

$$21^n-4^n=(21-4)(21^{n-1}+21^{n-2}\cdot 4+\ldots+21\cdot 4^{n-2}+4^{n-1}).$$

Preoblikovanje izraza v $2^3\cdot 2^{2n}+3^2\cdot 3^n\cdot 7^n$ **.......... 3 točke**
Zapis izraza kot $8\cdot 4^n+9\cdot 21^n$ **.......... 4 točke**
Preoblikovanje izraza v $17\cdot 4^n+9\cdot(21^n-4^n)$ **.......... 4 točke**
Razcep izraza 21^n-4^n **.......... 4 točke**
Argumentiran sklep o deljivosti izraza s 17 .... 5 točk

2. način. Kot pri prvi rešitvi izraz preoblikujemo do $8\cdot 4^n+9\cdot 21^n$. Ker je ostanek števila 21 pri deljenju s 17 enak 4, ima število $8\cdot 4^n+9\cdot 21^n$ pri deljenju s 17 enak ostanek kot število $8\cdot 4^n+9\cdot 4^n=17\cdot 4^n$. Ker je slednje deljivo s 17 je tudi prvotno število deljivo s 17.

Preoblikovanje izraza v $2^3\cdot 2^{2n}+3^2\cdot 3^n\cdot 7^n$ **.......... 3 točke**
Zapis izraza kot $8\cdot 4^n+9\cdot 21^n$ **.......... 4 točke**
Argumentiran sklep, da ima izraz $8\cdot 4^n+9\cdot 21^n$ **pri deljenju s** 17 **enak ostanek kot izraz** $17\cdot 4^n$ **.......... 10 točk**
Sklep, da je izraz deljiv s 17 .... 3 točke

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 2. letnik

B1. Izraz $\frac{5z^2+3}{z-1}$ najprej preoblikujemo

$$\frac{5z^2+3}{z-1} = 5z + \frac{5z+3}{z-1} = 5z + 5 + \frac{8}{z-1}.$$

Ker je z celo število, mora biti tudi $\frac{8}{z-1}$ celo število. To pomeni, da mora biti $z-1$ en od deliteljev števila 8. Delitelji števila 8 so -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4 in 8, zato je $z \in \{-7,-3,-1,0,2,3,5,9\}$.

Preoblikovanje izraza v $5z + \frac{5z+3}{z-1}$ .... 2 točki
Preoblikovanje izraza v $5z + 5 + \frac{8}{z-1}$ .... 3 točke
Ugotovitev, da mora biti $\frac{8}{z-1}$ celo število .... 4 točke
Ugotovitev, da mora biti $z-1$ en od deliteljev števila 8 .... 3 točke
Našteti celi delitelji števila 8 .... 3 točke
Zapisana množica rešitev $\{$-7,-3,-1,0,2,3,5,9$\}$ .... 5 točk

B2. (a) Vektorja $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ in $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ sta enako dolga, zato je $|\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2$. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ označimo s φ in poračunamo

$$|\tfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\tfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b})\cdot(\tfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}) = \tfrac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{a}+\tfrac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} = \tfrac{1}{9}|\vec{a}|^2+\tfrac{2}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2.$$

Podobno dobimo še

$$|\tfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = \tfrac{4}{9}|\vec{a}|^2+\tfrac{4}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2. \tag{1}$$

Ker morata biti ta dva izraza enaka, sledi

$$\tfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\tfrac{2}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0.$$

Od tod z upoštevanjem zveze $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$ izrazimo $\cos\varphi = -\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, torej je $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Ugotovitev $|\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2$ **.................................... 1 točka**
Izračun $|\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2$ **.......................... 3 točke**
Izračun $|\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2$ **.......................... 2 točki**
Zapis enakosti $\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$ **............................ 1 točka**
Izračun $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **.. 2 točki**
Zapis rešitve $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ **... 1 točka.**

(b) Kot med vektorjema $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ in $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ označimo z α. Tedaj je

$$\cos\alpha = \frac{(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b})\cdot(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b})}{|\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}||\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{\frac{2}{9}|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{|\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2},$$

saj je po predpostavki $|\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}| = |\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|$. Z upoštevanjem enakosti (1), zveze $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$ in rezultata $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ iz točke (a) dobimo

$$\cos\alpha = \frac{\frac{2}{9}|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2}{\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2} = \frac{(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1)|\vec{b}|^2}{(\frac{4}{3}-2+1)|\vec{b}|^2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Od tod dobimo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Zapis $\cos\alpha = \frac{\frac{2}{9}|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{|\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}|^2}$ **.. 4 točke**
Izračun $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ **.. 5 točk**
Zapis rešitve $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **.. 1 točka**

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 3. letnik

B1. Če polinom $100n^5 - n^4 - 50n^3 + 2n^2 - 290n - 2$ delimo s polinomom $n^2 - 2$, dobimo rezultat $100n^3 - n^2 + 150n$ in ostanek $10n - 2$. Torej je

$$\frac{100n^5 - n^4 - 50n^3 + 2n^2 - 290n - 2}{n^2 - 2} = 100n^3 - n^2 + 150n + \frac{10n - 2}{n^2 - 2}.$$

To število bo celo natanko tedaj, ko bo $\frac{10n-2}{n^2-2}$ celo število. Opazimo, da je za $n > 10$ števec tega ulomka manjši od imenovalca in oba sta pozitivna, zato je $0 < \frac{10n-2}{n^2-2} < 1$. V tem primeru $\frac{10n-2}{n^2-2}$ ni celo število. Torej mora biti $n \leq 10$. Izračunamo vrednost izraza $\frac{10n-2}{n^2-2}$ za prvih 10 naravnih števil in opazimo, da dobimo celo število le, ko je $n = 1, 2, 3, 10$.

Izračunan količnik $100n^3 - n^2 + 150n$ **.. 2 točki**
Izračunan ostanek $10n - 2$ **.. 2 točki**
Zapis $\frac{100n^5-n^4-50n^3+2n^2-290n-2}{n^2-2} = 100n^3 - n^2 + 150n + \frac{10n-2}{n^2-2}$ **.................. 1 točka**
Ugotovitev, da mora biti $\frac{10n-2}{n^2-2}$ **celo število .... 4 točke**
Ugotovitev, da za $n > 10$ **ulomek** $\frac{10n-2}{n^2-2}$ **ni celo število .... 3 točke**
Izračunana vrednost izraza $\frac{10n-2}{n^2-2}$ **za prvih deset naravnih števil .... 3 točke**
Zapisana rešitev $n = 1, 2, 3, 10$ **.. 5 točk**

B2. Z upoštevanjem zveze $\log_2(\sqrt{2}x) = \log_2\sqrt{2} + \log_2 x = \frac{1}{2} + \log_2 x$ dano enačbo preoblikujemo v

$$\sqrt{\log_2 x} - \log_2 x + 2 = 0.$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \sqrt{\log_2 x}$, da dobimo kvadratno enačbo

$$t - t^2 + 2 = 0,$$

Enačbo preoblikujemo v $t^2 - t - 2 = 0$ in levo stran razstavimo $(t-2)(t+1) = 0$, da dobimo rešitvi $t = -1$ in $t = 2$. Prva rešitev odpade, saj mora biti $t \geq 0$, iz druge rešitve pa dobimo enačbo $\sqrt{\log_2 x} = 2$, od koder poračunamo $x = 2^4 = 16$.

Zapis $\log_2(\sqrt{2}x) = \log_2\sqrt{2} + \log_2 x$ **.......... 2 točki**
Izračun $\log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ **.......... 2 točki**
Preoblikovanje enačbe v $\sqrt{\log_2 x} - \log_2 x + 2 = 0$ **.......... 3 točke**
Vpeljava nove spremenljivke oz. ugotovitev, da je enačba razcepna ..... 3 točke
Razcep kvadratne enačbe .... 2 točki
Rešitvi $t = -1$ **in** $t = 2$ **oz.** $\sqrt{\log_2 x} = -1$ **in** $\sqrt{\log_2 x} = 2$ **.......... 2 točki**
Ugotovitev, da rešitev $t = -1$ **oz.** $\sqrt{\log_2 x} = -1$ **odpade .... 2 točki**
Zapis rešitve $x = 16$ **.......... 4 točke.**

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Vsaka matematično pravilna in popolna rešitev je vredna 20 točk, tudi če je postopek reševanja drugačen kot v uradni rešitvi.

Rešitve za 4. letnik

B1. Izraz pod korenom preoblikujemo

$$f(x)=\sqrt{\frac{15x^2+2}{3x^2+5}}=\sqrt{5-\frac{23}{3x^2+5}}.$$

Ker je $\frac{23}{3x^2+5}\geq 0$, je $\frac{15x^2+2}{3x^2+5}\leq 5$ in zato velja $0\leq f(x)\leq\sqrt{5}$ za vsa realna števila x. Tako imamo le tri možnosti $f(x)=0$, $f(x)=1$ ali $f(x)=2$.

Enačba $\sqrt{\frac{15x^2+2}{3x^2+5}}=0$ nima realnih rešitev, saj $15x^2+2$ ne more biti enako 0 za nobeno realno število x. Enačbo $\sqrt{\frac{15x^2+2}{3x^2+5}}=1$ kvadriramo in odpravimo ulomke, da dobimo $15x^2+2=3x^2+5$. Od tod izrazimo $x^2=\frac{1}{4}$ oziroma $x=\pm\frac{1}{2}$. Podobno iz enačbe $\sqrt{\frac{15x^2+2}{3x^2+5}}=2$ izrazimo $x^2=6$ oziroma $x=\pm\sqrt{6}$. Preizkus pokaže, da so vse rešitve res prave.

Vrednost fukcije $f(x)$ je celo število takrat, ko je $x=\pm\frac{1}{2}$ ali $x=\pm\sqrt{6}$.

Sklep, da je korenjenec vedno pozitiven, saj je x realno število .... 1 točka
Preoblikovanje korenjenca do oblike $5-\frac{23}{3x^2+5}$ .... 2 točki
Ugotovitev, da je $0\leq f(x)\leq\sqrt{5}$ za vsa realna števila x .... 2 točki
Sklep, da je $f(x)=0$, $f(x)=1$ ali $f(x)=2$ .... 3 točke
Preoblikovanje enačbe $f(x)=0$ do $15x^2+2=0$ .... 1 točka
Sklep, da enačba $f(x)=0$ nima realnih rešitev .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe $f(x)=1$ do $15x^2+2=3x^2+5$ .... 1 točka
Enačba $f(x)=1$ ima rešitvi $x=\pm\frac{1}{2}$ .... 2 točki
Preizkus rešitev .... 2 točki
Preoblikovanje enačbe $f(x)=2$ do $15x^2+2=12x^2+20$ .... 1 točka
Enačba $f(x)=2$ ima rešitvi $x=\pm\sqrt{6}$ .... 2 točki
Preizkus rešitev .... 2 točki

2. način. Naj bo $f(x)=n$, kjer je $n\geq 0$ celo število. Enakost kvadriramo, da dobimo $\frac{15x^2+2}{3x^2+5}=n^2$. Odpravimo ulomke in enačbo preuredimo do $(15-3n^2)x^2=5n^2-2$. Ker je $15-3n^2\neq 0$ za vsa cela števila n, lahko enačbo delimo z $15-3n^2$, da dobimo

$$x^2=\frac{5n^2-2}{15-3n^2}.$$

Torej mora biti $\frac{5n^2-2}{15-3n^2}\geq 0$. Število $n=0$ očitno ne ustreza temu pogoju, za $n\geq 1$ pa je $5n^2-2>0$, zato mora biti tudi $15-3n^2>0$. Od tod sledi $n^2<5$ oziroma $n\leq 2$. Imamo torej le dve možnosti, $n=1$ ali $n=2$. Pri $n=1$ dobimo $x^2=\frac{1}{4}$ oziroma

$x = \pm\frac{1}{2}$, pri $n = 2$ pa dobimo $x^2 = 6$ oziroma $x = \pm\sqrt{6}$. Preizkus pokaže, da so vse rešitve res prave.

Zapis enačbe $f(x) = n$**, kjer je** $n \geq 0$ **celo število** .... **1 točka**
Preoblikovanje enačbe do $(15 - 3n^2)x^2 = 5n^2 - 2$ .... **1 točka**
Utemeljen sklep, da je $\frac{5n^2-2}{15-3n^2} \geq 0$ .... **3 točke**
Ugotovitev, da število $n = 0$ **ne ustreza temu pogoju** .... **2 točki**
Ugotovitev, da za $n \geq 1$ **velja** $5n^2 - 2 > 0$ .... **1 točka**
Sklep $15 - 3n^2 > 0$ .... **1 točka**
Sklep $n^2 < 5$ **oziroma** $n \leq 2$ .... **1 točka**
Preverjanje možnosti $n = 1$ .... **1 točka**
Rešitev $x^2 = \frac{1}{4}$ **oziroma** $x = \pm\frac{1}{2}$ .... **2 točki**
Preizkus rešitev .... **2 točki**
Preverjanje možnosti $n = 2$ .... **1 točka**
Rešitev $x = \pm\sqrt{6}$ .... **2 točki**
Preizkus rešitev .... **2 točki**

B2. Ker so x, y in z zaporedni členi geometrijskega zaporedja, velja $y^2 = xz$. Levo stran enakosti zmnožimo in poenostavimo

$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2 - xy + xz + xy - y^2 + yz + xz - yz + z^2 = x^2 + 2xz - y^2 + z^2.$$

Z upoštevanjem zveze $xz = y^2$ dobimo

$$x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

kar je desna stran dane enakosti. S tem je enakost dokazana.

Odprava oklepajev na levi strani enakosti .... 3 točke
Preoblikovanje leve strani enakosti do $x^2 + 2xz - y^2 + z^2$ .... 3 točke
Upoštevanje zveze $y^2 = xz$ .... 4 točke
Preoblikovanje $x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2$ .... 3 točke
Preoblikovanje $x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .... 3 točke
Sklep, da je leva stran enakosti enaka desni .... 4 točke

2. način. Ker so x, y in z zaporedni členi geometrijskega zaporedja, jih lahko zapišemo v obliki $x = a$, $y = aq$ in $z = aq^2$, kjer je q kvocient zaporedja. Slednje vstavimo v levo stran enakosti in jo poenostavimo

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x-y+z) &= (a + aq + aq^2)(a - aq + aq^2) = a^2(1+q+q^2)(1-q+q^2) = \\ &= a^2(1 - q + q^2 + q - q^2 + q^3 + q^2 - q^3 + q^4) = a^2(1 + q^2 + q^4),\end{aligned}$$

ter v desno stran enakosti

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = a^2(1 + q^2 + q^4).$$

Ker sta rezultata enaka, je s tem enakost dokazana.

Upoštevanje $x = a$, $y = aq$ in $z = aq^2$ .... 4 točke
Preoblikovanje leve strani enakosti do $(a + aq + aq^2)(a - aq + aq^2)$ .... 2 točki
Preoblikovanje leve strani enakosti do $a^2(1 + q^2 + q^4)$ .... 4 točke
Preoblikovanje desne strani enakosti do $a^2 + a^2q^2 + a^2q^4$ .... 2 točki
Preoblikovanje desne strani enakosti do $a^2(1 + q^2 + q^4)$ .... 4 točke
Sklep, da je leva stran enakosti enaka desni .... 4 točke