

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

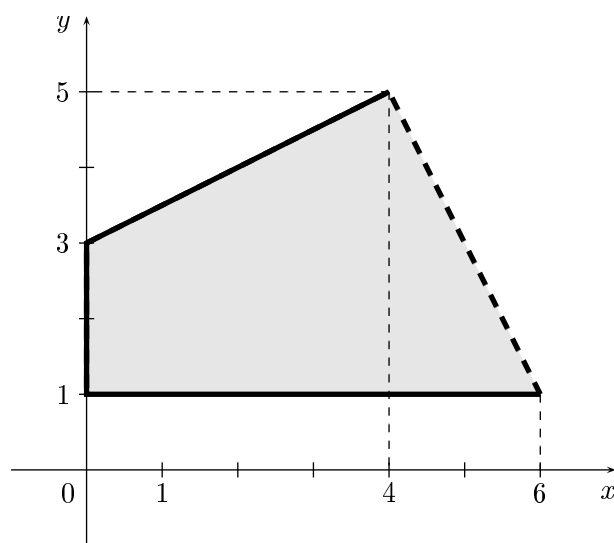
Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Oče želi razdeliti trem sinovom 14 560 SIT tako, da vsak naslednji sin dobi 20 % večji znesek kot njegov mlajši brat. Koliko dobi vsak sin? Zapiši odgovor.
2. Zapiši pogoje, ki enolično določajo množico točk na sliki.



3. Pri deljenju števila a s 7 dobimo ostanek 3, pri deljenju števila b s 7 pa ostanek 4. Kolikšen je ostanek pri deljenju kvadrata vsote števil a in b s 7? Odgovor utemelji.
4. Premer prednjega kolesa je 1,1 m, zadnjega pa 0,8 m. Kolikšno razdaljo smo prevozili, če je prvo kolo naredilo 69 obratov manj kot zadnje? Rezultat zaokroži na centimeter natančno. Za π uporabi približek $\frac{22}{7}$. Zapiši odgovor.
5. Nariši graf funkcije s predpisom $f(x) = -\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ in izračunaj ploščino lika, ki ga oklepa graf dane funkcije s koordinatnima osema.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

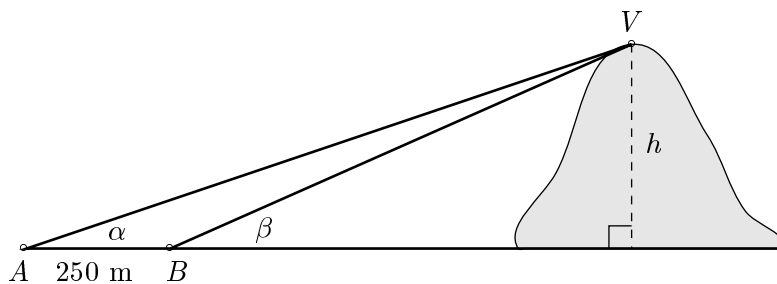
DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Poenostavi

$$\left[\frac{3b^{-3}}{2a(x-y)^{-1}} \right]^{-3} : \left[\frac{(2a^{-1}b^3)^2}{(x-y)^4} : \frac{9a^{-5}b^{-3}}{(x+y)^{-1}} \right].$$

2. Skupina geometrov želi določiti višino hriba. Iz kraja A v ravnini vznožja vidijo vrh hriba pod kotom $\alpha = 19^\circ 40'$, ko pa se po ravnem približajo hribu za 250 m, vidijo vrh pod kotom $\beta = 24^\circ$. Kako visok je hrib? Vmesne rezultate zaokroži na štiri decimalke, rezultat pa na celo število. Zapiši odgovor.



3. Kvadratna funkcija $f(x)$ doseže minimalno vrednost -2 za $x = 1$. Določi $f(x)$ tako, da bo veljalo $f(-3) + 4f(0) = 0$. Izračunaj $f(1 + \sqrt{5})$.
4. Kateta a in hipotenuza pravokotnega trikotnika sta v razmerju $12 : 13$. Če skrajšamo hipotenuzo za 23 cm in kateto a za 27 cm, dobimo nov pravokotni trikotnik, ki se mu dolžina druge katete ni spremenila. Izračunaj stranice prvotnega trikotnika.
5. Izdelati moramo 1320 parov smuči. Pri izdelavi s strojem A bi porabili 2 uri manj kot pri uporabi stroja B . Stroj B naredi 5 parov smuči manj na uro kot stroj A . Izračunaj čas izdelave smuči, če uporabimo oba stroja.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Reši enačbo:

$$\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$$

2. Kje dosežeta funkciji $f(x) = \sin 4x$ in $g(x) = -\cos 2x$ enako vrednost?

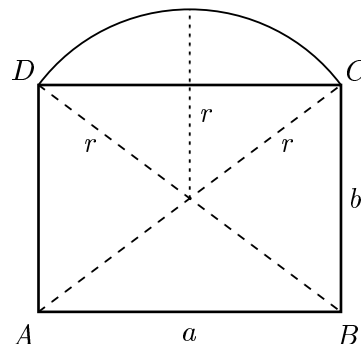
3. V živalski vrt naselijo družino risov. Število risov N po t letih ($t \geq 0$) določa funkcija $N = 10 \cdot e^{\frac{2}{5}t}$.

(a) Koliko risov šteje družina ob naselitvi?

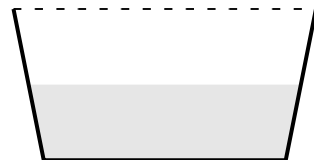
(b) Koliko let bi potrebovali v živalskem vrtu, da bi družina risov štela 100 članov? Rezultat zaokroži na celo število.

Zapiši odgovora.

4. Pavel ima podstrešno sobo v obliki pravokotnika $ABCD$ s stranicama $a = 4$ m in $b = 3$ m. Ker mu je pretesna, si jo bo razširil tako, kot kaže slika. Izračunaj, za koliko odstotkov se bo povečala površina sobe. Rezultat zaokroži na eno decimalno mesto.



5. Žleb za vodo je dolg 5 m in lahko zajame 1440 l vode. Presek žleba je enakokraki trapez s krakoma 52 cm in višino 48 cm. Koliko vode je v žlebu, če je napolnjen do polovice višine (glej sliko)?



Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-2}$. Za katere vrednosti x bo graf funkcije $f(x)$ ležal nad premico z enačbo $y = 1$?
2. Od 25 učencev so pri pisni nalogi štiri dobili oceno 5, pet oceno 4 in pet oceno 2. Koliko učencev je dobilo oceno 1 in koliko učencev oceno 3, če je bila povprečna ocena natanko 3? Zapiši odgovor.
3. Ničle polinoma $p(x) = x^3 - 13x^2 + 39x - 27$ so prvi trije členi naraščajočega geometrijskega zaporedja.
 - (a) Zapiši prvih pet členov in splošni člen zaporedja.
 - (b) Kateri člen danega geometrijskega zaporedja je rešitev enačbe $\log(15 - 3x) - \log x = \log(x - 1)$?
4. Dani so štiri pravokotniki z dolžino $a = 18$. Njihove širine tvorijo geometrijsko zaporedje. Obseg drugega pravokotnika je 60, tretji pravokotnik je kvadrat. Določi širine pravokotnikov.
5. Trije Butalci, Bingo, Bunko in Balko, so oropali banko in odnesli 22 vreč z bankovci. Postavili so jih v vrsto tako, da je bilo v prvi vreči najmanj denarja, v vsaki naslednji pa en šop bankovcev več kot v tisti pred njo. Šef Bingo je ukradene vreče denarja delil po načelu: prva meni (Bingu), druga tebi (Bunku), tretja meni (Bingu), četrta tebi (Balku), peta meni (Bingu), šesta tebi (Bunku) ... Nato so denar prešteli. Bunko in Balko sta ugotovila, da imata skupaj bajno vsoto 6 710 000 SIT. Veselila sta se tudi dejstva, da imata skupaj 110 000 SIT več kot njun šef. Tvoja naloga je, da ugotoviš, koliko denarja je bilo v prvi vreči. Zapiši odgovor.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

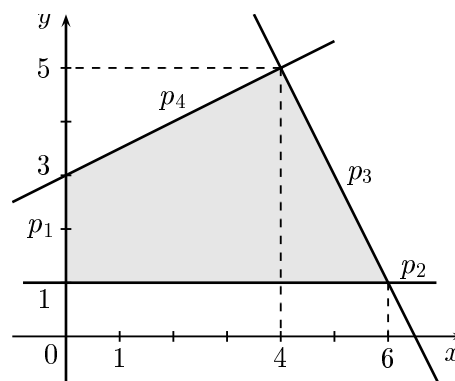
Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

- Ugotovitev: sinovi dobijo x , $1,2x$ 1 točka
 $1,44x$ 1 točka
Zapisana enačba $x + 1,2x + 1,44x = 14560$ 1 točka
Izračunan $x = 4000$ SIT 1 točka
Izračunano, koliko dobita drugi in tretji sin:
drugi 4800 SIT 0,5 točke
tretji 5760 SIT 0,5 točke
Zapisan odgovor 1 točka
- Zapisani pogoji: $p_1 : x \geq 0$ 0,5 točke
 $p_2 : y \geq 1$ 0,5 točke

Opomba: Pogoja morata biti natančno zapisana.

- Zapisana enačba premice $p_3 : y = -2x + 13$ 1 točka
Zapisana množica točk: $y < -2x + 13$ 1 točka
Zapisana enačba premice $p_4 : y = \frac{1}{2}x + 3$ 1 točka
Zapisana množica točk: $y \leq \frac{1}{2}x + 3$ 1 točka
Potreben in zadosten pogoj: $(x \geq 0) \wedge (y \geq 1) \wedge (y < -2x + 13) \wedge (y \leq \frac{1}{2}x + 3) \dots$ 1 točka



3. Zapis: $a = 7 \cdot x + 3$ 1 točka
 Zapis $b = 7 \cdot y + 4$ 1 točka
 $(a + b)^2 = (7x + 7y + 7)^2 =$ 1 točka
 $= (7 \cdot (x + y + 1))^2 =$ 1 točka
 $= 7 \cdot (7 \cdot (x + y + 1)^2)$ 1 točka
 Zapisana ugotovitev: *Ostanek je 0, saj je $(a + b)^2$ večkratnik števila 7.* 1 točka

Opomba: Rešitev, dobljeno s poskušanjem in preizkusom, točkujemo z dvema točkama.

4. Po enem obratu prevozimo $o = 2\pi r$ 1 točka
 S prednjim kolesom prevozimo $x \cdot 1,1\pi$ 1 točka
 Z zadnjim kolesom prevozimo $(x + 69) \cdot 0,8\pi$ 1 točka
 Zapisana enačba $x \cdot 1,1\pi = (x + 69) \cdot 0,8\pi$ 1 točka
 Izračunan $x = 184$ 1 točka
 Rešitev in zapisan odgovor: $o = 636,11$ m 1 točka

Opomba: Če rezultat ni pravilno zaokrožen, tekmovalec ne dobi zadnje točke.

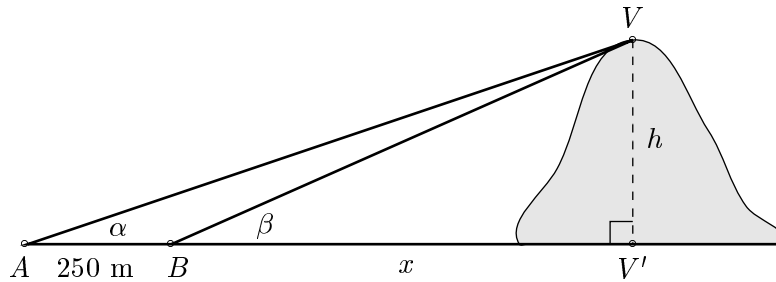
5. Zapis $f(x) = -\sqrt{(x - 3)^2}$ 1 točka
 Zapis $f(x) = -|x - 3|$ 1 točka
 Izračunana ničla (m), začetna vrednost (n): $m = 3, n = -3$ 1 točka
 Narisan graf funkcije $g(x) = -(x - 3)$ 1 točka
 Narisan graf funkcije $f(x) = -|x - 3|$ 1 točka
 Izračunana ploščina trikotnika $S = \frac{9}{2}$ 1 točka

Opomba: Če dijak nariše $g(x) = -x + 3$ in pravilno izračuna ploščino, dobi 4 točke.

Drugi letnik

1. Poenostavljen izraz $\left[\frac{3b^{-3}}{2a(x - y)^{-1}} \right]^{-3} = \frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 (x - y)^3}$ 1 točka
 Poenostavljen izraz $\frac{(2a^{-1}b^3)^2}{(x - y)^4} : \frac{9a^{-5}b^{-3}}{(x + y)^{-1}} = \frac{2^2 b^6}{a^2 (x - y)^4} \cdot \frac{a^5 b^3}{9(x + y)}$ 2 točki
 Poenostavljen izraz $\frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 (x - y)^3} \cdot \frac{a^2 (x - y)^4 \cdot 9(x + y)}{2^2 b^6 a^5 b^3} =$ 1 točka
 $= \frac{2}{3}(x^2 - y^2)$ ali $\frac{2}{3}(x - y)(x + y)$ 2 točki

2. Zapisana zveza $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{250+x}$ 1 točka
 Zapisana zveza $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{x}$ 1 točka
 Zapisana ugotovitev $x \cdot \operatorname{tg} \beta = (x + 250) \cdot \operatorname{tg} \alpha$ 1 točka
 Izražena spremenljivka $x: x = \frac{250 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$ 1 točka
 Izračunan $x = 1017,6538$ 0,5 točke
 Izračunan $h = x \cdot \operatorname{tg} \beta = 453,0595$ 0,5 točke
 Zapisan odgovor: 453 m 1 točka



3. Zapisana enačba kvadratne funkcije $y = a(x - 1)^2 - 2$ 1 točka
 Zapisani in vstavljeni podatki: za $f(-3) = 16 \cdot a - 2$ 1 točka
 za $4 \cdot f(0) = 4(a - 2)$ 1 točka
 Zapisana enačba $16 \cdot a - 2 + 4(a - 2) = 0$ 0,5 točke
 Izračun $a = \frac{1}{2}$ 1 točka
 Zapisana kvadratna funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$ ali $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ 0,5 točke
 Izračunano $f(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ 1 točka
4. Zapisane stranice prvega trikotnika: $a = 12x, b = b, c = 13x$ 0,5 točke
 Zapisane stranice drugega trikotnika: $a' = 12x - 27$ 0,5 točke
 $b' = b$
 $c' = 13x - 23$ 0,5 točke
 Zapisan Pitagorov izraz $b^2 = c^2 - a^2 = c'^2 - a'^2$ 1 točka
 Vstavljeni podatki $(13x)^2 - (12x)^2 = (13x - 23)^2 - (12x - 27)^2$ 1 točka
 Preoblikovana in urejena enačba $50x = 200$ 1 točka
 Izračunan $x = 4$ 0,5 točke
 Zapisane stranice prvega trikotnika: $a = 48$ cm, $b = 20$ cm, $c = 52$ cm 1 točka
5. Zapis: A na uro naredi x parov ... za 130 parov porabi t ur 1 točka
 Zapis: B na uro naredi $(x - 5)$ parov ... za 130 parov porabi $(t + 2)$ ur 1 točka
 Izražena spremenljivka $t = \frac{1320}{x}$ 0,5 točke
 Zapisana enačba $t \cdot x = (t + 2)(x - 5)$ 1 točka
 Urejena enačba $x^2 - 5x - 3300 = 0$ 1 točka
 Izračunan $x = 60$ 0,5 točke
 Izračunan čas $t_1 = \frac{1320}{(60+55)} = 11,48$ h 1 točka

Tretji letnik

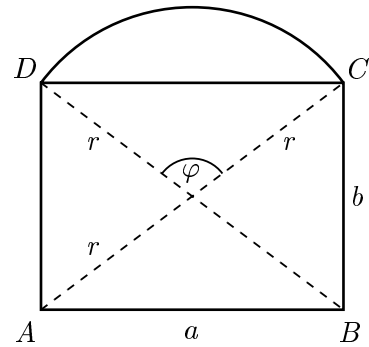
1. Potenciranje potence $\left(2 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x-1}}} = 4$ 0,5 točke
 Zapis števila 4 kot potenca 0,5 točke
 Množenje potenc $\left(2^{\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x-1}}} = 2^2$ 0,5 točke
 Potenciranje potenc $2^{\frac{(3\sqrt{x+3}) \cdot 2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}} = 2^2$ 0,5 točke
 Zapis enačbe $\frac{(3\sqrt{x+3}) \cdot 2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})} = 2$ 0,5 točke
 Odprava ulomkov $3\sqrt{x} + 3 = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ 0,5 točke
 Ureditev enačbe $5\sqrt{x} = 2x - 3$ 0,5 točke
 Kvadriranje $25x = 4x^2 - 12x + 9$ 1 točka
 Ureditev enačbe $4x^2 - 37x + 9 = 0$ 0,5 točke
 Obe rešitvi $x_1 = \frac{1}{4}$ in $x_2 = 9$ 0,5 točke
 Preiskus in izločitev rešitve $\frac{1}{4}$ 0,5 točke

2. Zapis $f(x) = g(x)$ ali $\sin 4x = -\cos 2x$ 0,5 točke
 $2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0$ 1 točka
 Zapis v obliki produkta: $\cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$ 1 točka
 Zapis enačb: $\cos 2x = 0$ 0,5 točke
 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ 0,5 točke
 Rešitev: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ 1 točka
 $x_2 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ 1 točka
 $x_3 = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 0,5 točke

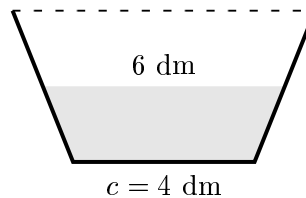
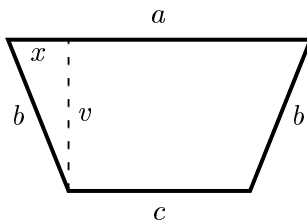
Opomba: Če je rezultat podan brez periode, odštejemo 0,5 točke.

3. (a) $t = 0$ 0,5 točke
 $N = 10 \cdot e^{\frac{2}{5} \cdot 0} = 10$ 1 točka
 Odgovor 0,5 točke
 (b) $N = 100 \Rightarrow 100 = 10 \cdot e^{\frac{2}{5}t}$ 0,5 točke
 $10 = e^{\frac{2}{5}t}$ 0,5 točke
 $\ln 10 = \ln e^{\frac{2}{5}t}$ 0,5 točke
 $\ln 10 = \frac{2}{5}t \ln e$ 0,5 točke
 $\ln 10 = \frac{2}{5}t$ 0,5 točke
 $t = \frac{5}{2} \ln 10 = 5,75646 \doteq 5,76$ 1 točka
 Odgovor: 6 let 0,5 točke

4. $(2r)^2 = a^2 + b^2$ 0,5 točke
 $r = 2,5$ m 0,5 točke
 $S = a \cdot b$ 0,5 točke
 $S = 12$ m² 0,5 točke
 $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{1,5}$ 0,5 točke
 $\varphi = 106,3^\circ$ 0,5 točke
Zapis $\frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ}$ 0,5 točke
Ploščina trikotnika $S_{\Delta} = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$ 0,5 točke
Razlika ploščin $S_1 = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$ 0,5 točke
Rezultat $S_1 = 2,8$ m² 0,5 točke
 $p \%$ = $\frac{2,8 \cdot 100}{12} =$ 0,5 točke
= 23,3 % 0,5 točke

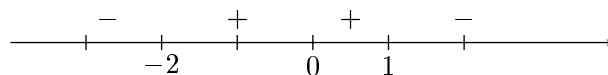


5. Skica 0,5 točke
 $S = \frac{V}{l} = 28,8$ dm² 0,5 točke
 $x^2 = b^2 - v^2$ 0,5 točke
 $x = 2$ cm 0,5 točke
 $a = c + 2x = c + 4$ 0,5 točke
Obrazec $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ 0,5 točke
Rezultat $c = 4$ dm 0,5 točke
 $\Rightarrow a = 8$ dm 0,5 točke
 $v = 2,4$ dm, $s = \frac{a+c}{2} = 6$ dm 0,5 točke
 $l = 50$ dm
Obrazec $V = \frac{4 \text{ dm} + 6 \text{ dm}}{2} \cdot 2,4 \text{ dm} \cdot 50 \text{ dm}$ 1 točka
Rezultat $V = 600$ dm³ = 600 ℓ 0,5 točke



Četrty letnik

1. Zapis pogoja $\frac{x-2}{x^2+x-2} > 1$ 0,5 točke
 $\frac{-x^2}{x^2+x-2} > 0$ 0,5 točke
Ničle $x_1 = 0$ (soda) 1 točka
Pola $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ 1 točka
Določeni predznaki funkcije 1 točka



- Rešitev $x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ 2 točki

2. Zapis enačbe $\frac{4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + x + 3y}{25} = 3$ 1 točka
 $x + y = 11$ 1 točka
 Reševanje sistema – postopek 1 točka
 Rešitvi: $x = 4$ 1 točka
 $y = 7$ 1 točka
 Odgovor: *Oceno 3 je dobilo 7 učencev, oceno 1 pa 4 učenci.* 1 točka
3. Ničle $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 9$ vsaka po 0,5 točke
- (a) Zaporedje: 1, 3, 9, 27, 81 (le v tem vrstnem redu) 0,5 točke
 $a_n = 3^{n-1}$ 1 točka
- (b) $\log \frac{15-3x}{x} = \log(x-1)$ 0,5 točke
 $\frac{15-3x}{x} = x-1$ 0,5 točke
 $x^2 + 2x - 15 = 0$ 0,5 točke
 Rešitev: $x_1 = -5$ 0,5 točke
 $x_2 = 3$ 0,5 točke
 Odgovor: *Rešitev enačbe je drugi člen zaporedja.* 0,5 točke
4. Označeni členi geometrijskega zaporedja b, bq, bq^2, bq^3 1,5 točke
 Zapis $2a + 2bq = 60$ 0,5 točke
 $a + bq = 30 \Rightarrow bq = 12$ 0,5 točke
 $a = bq^2 \Rightarrow bq^2 = 18$ 0,5 točke
 Reševanje sistema 1 točka
 $12 \cdot q = 18 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$ 0,5 točke
 $b = 8$ 0,5 točke
 Širine pravokotnikov: 8, 12, 18, 27 1 točka
5. Šopi šefa: $x + (x + 2) + \dots + (x + 20) = \frac{6\,600\,000}{k}$ 1 točka
 Šopi Bunka in Balka: $(x + 1) + (x + 3) + \dots + (x + 21) = \frac{6\,710\,000}{k}$ 1 točka
 Ureditev obeh enačb: 1 točka
 $11(x + 10) = \frac{6\,600\,000}{k}$ in
 $11(x + 11) = \frac{6\,710\,000}{k}$
 Rešitev sistema $x = 50$ 1 točka
 $k = 10\,000$ 1 točka
 Odgovor: *V prvi vreči je $x \cdot k = 500\,000$ SIT.* 1 točka