Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 1. letnik

N1	N2

Čas reševanja: 45 minut.

1. (a) V domu za starejše občane so praznovali rojstni dan najstarejše oskrbovanke. Pripravili so 15 litrov napitka iz domačega hruškovega soka, razredčenega z vodo, tako da je bilo v napitku $20\ \%$ vode. Ker je bil še vedno presladek, so dolili še 5 litrov vode. Izračunaj delež naravnega soka v $\%$ v dobljenem napitku.

   (b) V tem domu imajo na voljo skupaj 141 sob. 70 sob je enoposteljnih, ostale so dvo in troposteljne sobe. Če so vse sobe popolnoma zasedene, je v domu 240 oskrbovancev. Koliko imajo dvoposteljnih in koliko triposteljnih sob?

(10 točk)

2. Za realni števili x in y, kjer $x \neq 0$, $y \notin \{-2, 0, 2\}$ in $x + y \neq 0$, poenostavi izraz:

$$\frac{xy^{2018} + 2xy^{2017}}{y^{2016} - 4y^{2014}} \cdot \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + x^{-1}\right) : \left(xy^{-2} - \frac{1}{y} + x^{-1}\right)\right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}} - \frac{y^2 + 2y}{y + 2}.$$

(10 točk)

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 2. letnik

N1	N2

Čas reševanja: 45 minut.

1. Dani sta točki $A(-2, 1)$ in $B(1, -11)$ v pravokotnem koordinatnem sistemu.

   (a) Določi koordinate točke C, ki leži na abscisni osi, da bo ploščina trikotnika ABC enaka $64,5$.

   (b) Graf linearne funkcije gre skozi točko A. Če bi bil smerni koeficient za 3 večji, bi šel graf skozi točko B. Določi predpis za to linearno funkcijo.

(10 točk)

2. Poenostavi izraz:

$$2(xy^{-1}-1)^{-p}(x^2y^{-2}-1)^p-\left(\frac{x+y}{y}\right)^p.$$

Za $x=-2$, $y=-\frac{1}{2}$ in $p=-3$ izračunaj vrednost izraza.

(10 točk)

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 3. letnik

N1	N2

Čas reševanja: 45 minut.

1. Dan je pravokotni trikotnik ABC (pravi kot v oglišču C) s podatki $c = 8$ cm in $v_c = \sqrt{7}$ cm ($a > b$). Natančno izračunaj ploščino trikotnika, polmer trikotniku očrtanega kroga in dolžini katet.

(10 točk)

2. Dana je kvadratna funkcija f s predpisom $f(x) = (m-1)x^2 + mx + m$, kjer $m \neq 1$.

   (a) Za $m = 3$ izračunaj najmanjšo vrednost funkcije f.

   (b) Poišči vsa realna števila m, da bo funkcija f strogo negativna za vsak x.

(10 točk)

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Naloge za 4. letnik

N1	N2

Čas reševanja: 45 minut.

1. Zadnji člen geometrijskega zaporedja s količnikom 2 je 112, vsota vseh členov pa 217. Koliko členov tega zaporedja moramo sešteti? Izračunaj še prvi člen tega zaporedja.

(10 točk)

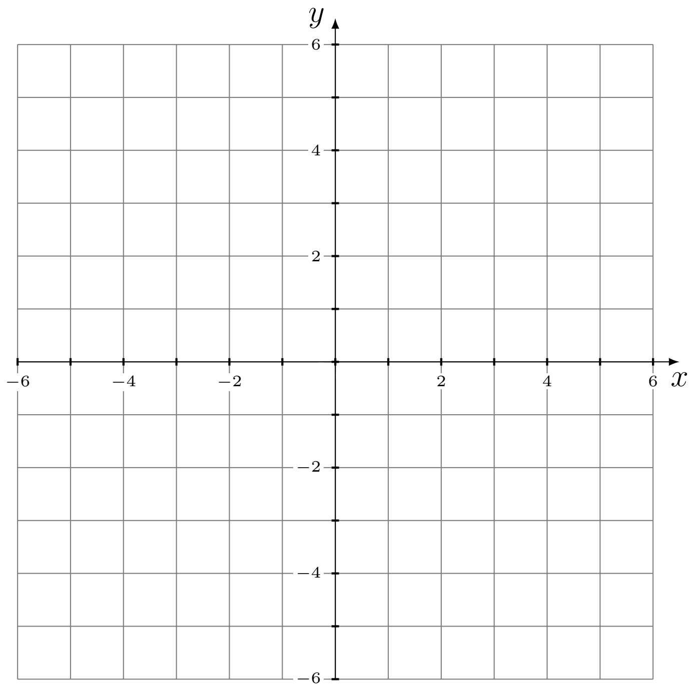
2. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

(a) Izračunaj ničle, pole, asimptoto in nariši graf funkcije f.

(b) Izračunaj presečišča grafa funkcije f s premico $y = 2$.

(c) Določi zalogo vrednosti funkcije f.

(10 točk)



18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Rešitve za prvi letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

1.

(a) V 15 litrih soka je 20% od 15 litrov, torej 3 litri vode. Naravnega soka je torej 12 litrov v 20 litrih napitka, kar pomeni, da je delež naravnega soka 60%.

(b) Ugotovimo, da je dvoposteljnih in troposteljnih sob skupaj $141-70=71$. Zapišemo $D+T=71$. Skupaj je v dvoposteljnih in troposteljnih sobah $2D+3T=170$ oskrbovancev. Rešimo sistem enačb in dobimo $D=43$ in $T=28$.

Izračun ali ugotovitev, da so prvotno v soku primešani 3 litri vode .... 1 točka
Naravnega soka je 12 litrov .... 1 točka
Vsega napitka je 20 litrov .... 1 točka
Izračun deleža naravnega soka 60% .... 1 točka

Ugotovimo, da je dvoposteljnih in troposteljnih sob skupaj $141-70=71$ .... 1 točka
Število oskrbovancev v dvoposteljnih in troposteljnih sobah je 170 .... 1 točka
Zapis sistema enačb .... 1+1 točka
Reševanje sisema enačb .... 1* točka
Odgovor .... 1 točka

Opomba: Če izračuna, da je v napitku 80% soka, tudi dobi točko in prve alineje.

2. Števec prvega ulomka $xy^{2018}+2xy^{2017}$ preoblikujemo v $xy^{2017}(y+2)$, imenovalec $y^{2016}-4y^{2014}$ pa preoblikujemo v $y^{2014}(y-2)(y+2)$. Prvi ulomek okrajšamo in dobimo $\frac{xy^3}{y-2}$. Izraz $\frac{x^2}{y^3}+x^{-1}$ preoblikujemo v $\frac{x^3+y^3}{xy^3}$. Razstavimo vsoto kubov. Izraz $xy^{-2}-\frac{1}{y}+x^{-1}$ preoblikujemo v $\frac{x^2-xy+y^2}{xy^2}$. Izraz $\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$ preoblikujemo v $\frac{x(x+y)^2}{x+y}=x(x+y)$. Zadnji ulomek razstavimo in

okrajšamo, dobimo y.
Prvi člen poenostavimo in dobimo $\frac{y^2}{y-2}$. Od tega izraza odštejemo y in dobimo $\frac{2y}{y-2}$.

Izpostavljanje $xy^{2018}+2xy^{2017}=xy^{2017}(y+2)$ **.......... 1 točka**
Izpostavljanje in razstavljanje $y^{2016}-4y^{2014}=y^{2014}(y^2-4)=y^{2014}(y-2)(y+2)$ **.... 1 točka**
Preoblikovanje prvega ulomka v $\frac{xy^3}{y-2}$ **.......... 1 točka**
Preoblikovanje $\left(\frac{x^2}{y^3}+x^{-1}\right)$ **v** $\frac{x^3+y^3}{xy^3}$ **.......... 1 točka**
Razstavljanje vsote kubov .... 1 točka
Preoblikovanje $xy^{-2}-\frac{1}{y}+x^{-1}$ **v** $\frac{x^2-xy+y^2}{xy^2}$ **.......... 1 točka**
Preoblikovanje $\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$ **v** $\frac{x(x+y)^2}{x+y}=x(x+y)$ **.......... 1 točka**
Preoblikovanje $\frac{y^2+2y}{y+2}$ **v** y **.......... 1 točka**
Upoštevanje deljenja, krajšanje ulomkov, da iz prvega člena dobimo $\frac{y^2}{y-2}$ **........ 1 točka**
Izračun $\frac{y^2}{y-2}-y=\frac{2y}{y-2}$ **.......... 1 točka**

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Rešitve za drugi letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

1.

(a) Iščemo absciso točke $C(x,0)$. Uporabimo obrazec za izračun ploščine

$$S=\frac{1}{2}\cdot o\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix},$$

vstavimo koordinate točk A, B, C in pomnožimo z 2 da dobimo $129=o\cdot\begin{vmatrix}3 & -12\\ x+2 & -1\end{vmatrix}$. Izračunamo determinanto in dobimo zvezo $129=o\cdot(12x+21)$. Če je orientacija $o=+1$, dobimo rešitev $x_1=9$, če pa je orientacija $o=-1$, dobimo rešitev $x_2=-\frac{25}{2}$. Za točko C tako dobimo dve možnosti $C_1=(9,0)$ in $C_2=(-\frac{25}{2},0)$.

(b) Iščemo linearno funkcijo $f(x)=k\cdot x+n$. Upoštevamo, da gre graf skozi točko A in dobimo enačbo $1=-2k+n$. Če je k za 3 večji, gre graf skozi B in dobimo enačbo $-14=k+n$. Rešimo dobljeni sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama in dobimo $f(x)=-5x-9$.

Zapis ali uporaba obrazca za izračun ploščine $S=\frac{1}{2}\cdot o\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}$ **........1 točka**
Preoblikovanje v enačbo $129=o\cdot(12x+21)$ **ali** $129=|12x+21|$ **....................1 točka**
Rešitev $x_1=9$ **in** $x_2=-\frac{25}{2}$ **..1+1 točka**
Zapis $C_1=(9,0)$ **in** $C_2=(-\frac{25}{2},0)$ **..1 točka**

Zapis ali uporaba enačbe za linearno funkcijo $f(x)=k\cdot x+n$ **....................1 točka**
Enačba za točko A**:** $1=-2k+n$ **..1 točka**
Enačba, če je k **za** 3 **večji in gre graf skozi** B**:** $-14=k+n$ **........................1 točka**

Reševanje sistema enačb .... 1 točka
Zapis $f(x) = -5x - 9$ **.. 1 točka**

2. Uredimo prvi oklepaj $(xy^{-1} - 1)^{-p} = \left(\frac{x}{y} - 1\right)^{-p} = \left(\frac{x-y}{y}\right)^{-p} = \left(\frac{y}{x-y}\right)^{p}$ in drugi oklepaj $(x^2y^{-2} - 1)^p = \left(\frac{x^2-y^2}{y^2}\right)^p$. Oklepaja pomnožimo med seboj, števec drugega oklepaja razstavimo in dobimo produkt $\left(\frac{y}{x-y}\right)^p \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{y^2}\right)^p = \left(\frac{y}{x-y}\right)^p \cdot \left(\frac{(x-y)(x+y)}{y^2}\right)^p$. Ker je eksponent obeh oklepajev enak, damo v skupni oklepaj in okrajšamo $\left(\frac{y(x-y)(x+y)}{(x-y)y^2}\right)^p = \left(\frac{x+y}{y}\right)^p$. Dobimo izraz $2\left(\frac{x+y}{y}\right)^p - \left(\frac{x+y}{y}\right)^p$. Odštejemo in dobimo $\left(\frac{x+y}{y}\right)^p$. Vstavimo vrednosti za x, y, p in dobimo rezultat $\frac{1}{125}$.

Zapis potence z negativnim eksponentom $xy^{-1} = \frac{x}{y}$ **.............................. 1 točka**
Zapis v obliki ulomka $xy^{-1} - 1 = \frac{x-y}{y}$ **.. 1 točka**
Zapis v obliki ulomka $x^2y^{-2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{y^2}$ **.. 1 točka**
Razstavljanje $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ **... 1 točka**
Krajšanje $\frac{y(x-y)(x+y)}{(x-y)y^2} = \frac{x+y}{y}$ **... 2 točki**
Poenostavljen izraz $2\left(\frac{x+y}{y}\right)^p - \left(\frac{x+y}{y}\right)^p = \left(\frac{x+y}{y}\right)^p$ **.................................. 1 točka**
Vstavljene vrednosti spremenljivk $x = -2$**,** $y = -\frac{1}{2}$ **in** $p = -3$**. .... 1* točka**
Izračun $\frac{-2-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$ **.. 1 točka**
Rezultat 5^{-3} **ali** $\frac{1}{125}$ **.. 1 točka**

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Rešitve za tretji letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

---

1. Ploščina trikotnika ABC je $S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{2} = 4\sqrt{7}$ cm^2. Polmer trikotniku očrtanega kroga je $R = \frac{c}{2} = 4$ cm. Z x in $c-x$ označimo pravokotni projekciji katet na hipotenuzo c. Uporabimo višinski izrek $v_c^2 = x(c-x)$. Dobimo kvadratno enačbo $x^2 - 8x + 7 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = 7$ in $x_2 = 1$. Z uporabo Pitagorovega izreka za dolžini katet a in b dobimo $a^2 = 7^2 + (\sqrt{7})^2$ in $b^2 = 1^2 + (\sqrt{7})^2$. Izračunamo dolžini katet $a = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ cm in $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

Izračun ploščine trikotnika $S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{2} = 4\sqrt{7}$ **cm^2 .... 1 točka**
Izračun polmera trikotniku očrtanega kroga $R = \frac{c}{2} = 4$ **cm .... 1 točka**
Uporaba višinskega izreka $v_c^2 = x(c-x)$ **oz.** $7 = x(8-x)$ **.......... 1 točka**
Zapis kvadratne enačbe $x^2 - 8x + 7 = 0$ **.......... 1 točka**
Rešitvi kvadratne enačbe sta $x_1 = 7$**,** $x_2 = 1$ **.......... 1+1 točka**
Uporaba Pitagorovega izreka $a^2 = 7^2 + (\sqrt{7})^2$**,** $b^2 = 1^2 + (\sqrt{7})^2$ **.......... 1+1 točka**
Izračun dolžine katet $a = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ **cm,** $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **cm .... 1+1 točka**

2.

(a) Najmanjša vrednost kvadratne funkcije je pri $q = \frac{-D}{4a}$. Izračunamo diskriminanto $D = -15$. Izračunamo najmanjšo vrednost $q = \frac{15}{8}$.

(b) Funkcija f bo negativna za vsak x, ko bosta izpolnjena pogoja $(m-1<0)$ in $D<0$. Diskriminanta kvadratne funkcije f je $D = m^2 - 4(m-1)m = -3m^2 + 4m$. Upoštevamo, da je $D<0$ in dobimo kvadratno neenačbo $-3m^2 + 4m < 0$. Izračunamo rešitvi kvadratne neenačbe $-3m^2 + 4m = 0$ in dobimo $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{4}{3}$. Rešitve kvadratne neenačbe so $m < 0$ ali $m > \frac{4}{3}$. Upoštevamo pogoja $(m-1<0)$ in $D<0$ ter dobimo rezuiltat $m < 0$.

Zapis ali upoštevanje $q = \frac{-D}{4a}$ .... **1 točka**
Izračun diskriminante $D = -15$ .... **1 točka**
Izračun najmanjše vrednosti $q = \frac{15}{8}$ .... **1 točki**

Zapis ali upoštevanje ($m - 1 < 0$**) in** $D < 0$ .... **1 točki**
Zapis ali upoštevanje $D = m^2 - 4(m-1)m = -3m^2 + 4m$ .... **1 točka**
Zapis ali upoštevanje $-3m^2 + 4m < 0$ .... **1 točka**
Reševanje kvadratne neenačbe .... **1* točka**
izračun $m_1 = 0$**,** $m_2 = \frac{4}{3}$ .... **1 točka**
Zapis ali upoštevanje rešitev kvadratne neenačbe $m < 0$ **ali** $m > \frac{4}{3}$ .... **1 točka**
Rezultat $m < 0$ .... **1 točka**

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 15. marec 2018

Rešitve za četrti letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

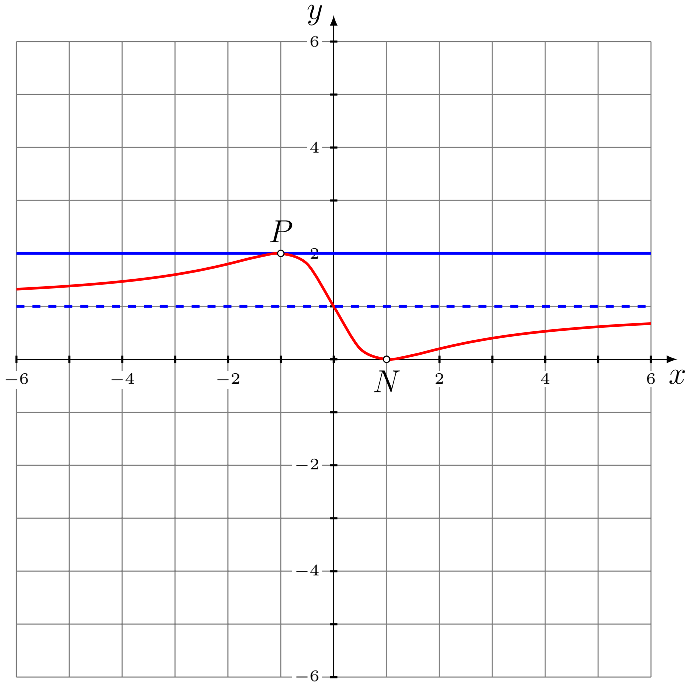
---

1. Po vstavitvi podatkov v splošni člen geometrijskega zaporedja dobimo $112 = a_1 \cdot 2^{n-1}$. Iz enačbe izrazimo prvi člen $a_1 = \frac{112}{2^{n-1}} = \frac{224}{2^n}$. Vstavimo podatke v obrazec za izračun končne geometrijske vrste in dobimo $217 = \frac{a_1(2^n-1)}{2-1}$. Vstavimo izražen prvi člen $217 = \frac{224}{2^n}(2^n - 1)$. Po ureditvi enačbe dobimo $\frac{224}{2^n} = 7$. Preoblikujemo v enačbo $2^n = 32$. Rešimo eksponentno enačbo $2^5 = 32$ in dobimo rešitev enačbe $n = 5$. Sešteti moramo prvih pet členov geometrijskega zaporedja. Izračunamo prvi člen $a_1 = \frac{112}{2^4} = \frac{224}{2^5}$ in dobimo rešitev enačbe $a_1 = 7$.

Vstavitev podatkov v splošni člen geometrijskega zaporedja $112 = a_1 \cdot 2^{n-1}$ ...... 1 točka
Izražen prvi člen $a_1 = \frac{112}{2^{n-1}} = \frac{224}{2^n}$ ...... 1 točka
Upoštevanje obrazca za izračun končne geometrijske vrste $217 = \frac{a_1(2^n-1)}{2-1}$ ...... 1 točka
Vstavitev prvega člena $217 = \frac{224}{2^n}(2^n - 1)$ ...... 1* točka
Ureditev enačbe $\frac{224}{2^n} = 7$ ...... 1 točka
Preoblikovanje v enačbo $2^n = 32$ ...... 1 točka
Reševanje eksponentne enačbe ...... 1* točka
Rešitev enačbe $n = 5$ ...... 1 točka
Odgovor ...... 1 točka
Izračun prvega člena $a_1 = 7$ ...... 1 točka

2.

(a) Funkcija ima dvojno ničlo v $x = 1$. Pola nima. Vodoravna asimptota je v $y = 1$. Funkcija seka ordinatno os v točki $N(0, 1)$. Narišemo graf funnkcije f.



(b) Zapišemo enačbo: $\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = 2$. Po ureditvi dobimo enačbo: $x^2 + 2x + 1 = 0$. Dvojna rešitev te enačbe je $x = -1$. Zapišemo presečišče $P(-1, 2)$.

(c) Zapišemo zalogo vrednosti funkcije f: $Z_f = [0, 2]$.

Zapis dvojne ničle v $x = 1$ .... 1 točka
Ugotovitev, da funkcija nima pola .... 1 točka
Zapis vodoravne asimptote $y = 1$ .... 1 točka
Zapis presečišča funkcije z ordinatno osjo $N(0, 1)$ .... 1 točka
Natančno narisan graf funkcije .... 1 točka

Zapis enačbe $\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = 2$ .... 1 točka
Ureditev enačbe do oblike $x^2 + 2x + 1 = 0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x = -1$ .... 1 točka
Zapis presečišča funkcije s premico $P(-1, 2)$ .... 1 točka

Zapis zaloge vrednosti funkcije f: $Z_f = [0, 2]$ .... 1 točka