

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. in 2. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Otroci so na Mojčini rojstnodnevni zabavi pojedli $\frac{2}{3}$ torte. Nato je Franci pojedel še $\frac{1}{4}$ ostanka torte. Kolikšen del torte je ostal?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{11}{12}$

A2. V anketi so učitelje matematike vprašali, koliko let že poučujejo matematiko. Odgovore so ponazorili s prikazom s stolpci. Kolikšen odstotek učiteljev poučuje več kot 5 in ne več kot 15 let?

- (A) 15 (B) 30 (C) 40 (D) 55 (E) 70

A3. Vseh trimestrnih števil, katerih vsota števk je enaka 5, je:

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

A4. Osemnajst milijonov ljudi na svetu ima rojstni dan na isti dan. Koliko odstotkov je to, če vemo, da je na svetu približno 7,5 milijarde ljudi?

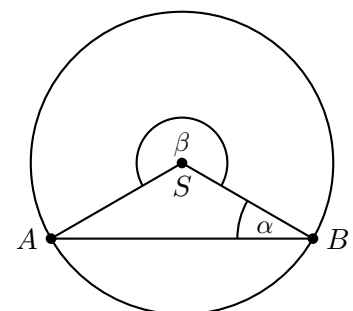
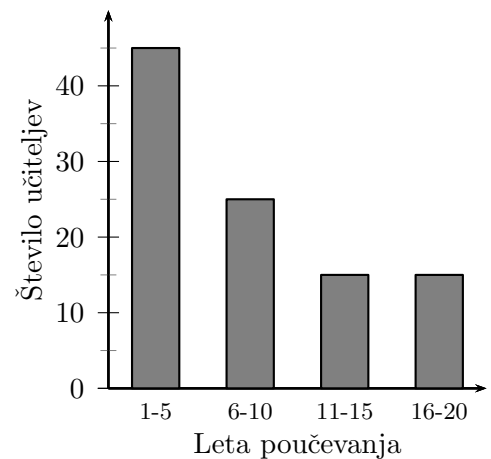
- (A) 0,002 (B) 0,024 (C) 0,24 (D) 2,4 (E) 24

A5. Točka S je središče kroga. Kot β je velik 240° . Kolikšna je razlika velikosti kotov $\beta - \alpha$?

- (A) 200° (B) 205° (C) 210° (D) 215° (E) 220°

A6. Katera izmed danih enačb določa najbolj strmo premico?

- (A) $y = -3x + 5$ (B) $y = 5x + \frac{1}{3}$ (C) $y = x - 3$
(D) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (E) $y = -\frac{1}{3}x + 8$



A7. Na ključavnici za zaklepanje kolesa lahko nastavimo 3-mestno kodo. Na vsakem izmed treh mest lahko izberemo eno izmed števk od 0 do 9. Največ koliko različnih kod lahko nastavimo?

- (A) 30 (B) 100 (C) 300 (D) 9^3 (E) 1000

A8. Če posodo napolnimo z vodo do vrha, tehta 17 kg, če pa jo z vodo napolnimo do polovice, tehta 9,5 kg. Koliko tehta prazna posoda?

- (A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 1,5 kg (D) 2 kg (E) 3 kg

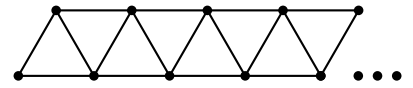
B1. Preglednica kaže število prodanih prenosnih telefonov v tednu.

Znamka	Ponedeljek	Torek	Sreda	Četrtek	Petek
Samsung	10	14	1	3	12
HTC	2	15	8	12	2
LG	2	4	0	0	3
Apple	1	0	3	6	2

- A. Katere znamke telefonov so v tem tednu prodali največ?
- B. Koliko telefonov so v tem tednu prodali povprečno na dan?
- C. Tedensko prodajo telefonov znamke Samsung ponazorite s tortnim (krožnim) prikazom.

- B2.** Na parceli želimo strojno izvrtati valjasto vrtino premera 80 cm. Prvi meter vrtanja stane 10 evrov, vsak naslednji pa 4 evre več od predhodnega.
- A. Kako dolga je najdaljša toga žica, ki jo lahko po 1,5 m vrtanja spravimo v vrtino?
 - B. Koliko stane izkop petega metra vrtine?
 - C. Koliko bi plačali za 5 m globoko vrtino, če nam ob plačilu z gotovino priznajo 5 % popusta?

B3. Zoja je imela 55 vžigalic dolžine 5 cm. Vse je porabila za oblikovanje niza enakostraničnih trikotnikov, kot prikazuje slika.



- A. Koliko enakostraničnih trikotnikov je v nizu, ki ga je oblikovala Zoja?
- B. Kateri geometrijski lik je oblikovala Zoja?
- C. Na kvadratni centimeter natančno izračunajte ploščino Zojinega lika.
- D. Kolikšna je razdalja med dvema najbolj oddaljenima ogliščema tega geometrijskega lika?
- E. Koliko vžigalic bi Zoja potrebovala za podoben niz z n enakostraničnimi trikotniki?

Naloga za 3. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Število $-\sqrt{5}$ je rešitev enačbe:

- (A) $\sqrt{x} = -5$ (B) $x^2 = \sqrt{5}$ (C) $x^2 + 5 = 0$ (D) $x^2 = -5$ (E) $x^2 = 5$

A2. Vseh trimestnih števil, katerih vsota števk je enaka 5, je:

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

A3. Osemnajst milijonov ljudi na svetu ima rojstni dan na isti dan. Koliko odstotkov je to, če vemo, da je na svetu približno 7,5 milijarde ljudi?

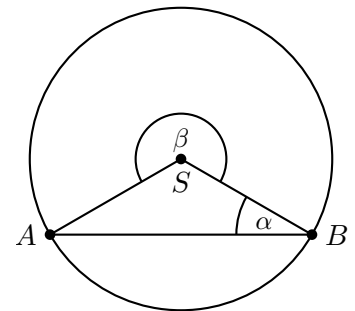
- (A) 0,002 (B) 0,024 (C) 0,24 (D) 2,4 (E) 24

A4. Točka S je središče kroga. Kot β je velik 240° . Kolikšna je razlika velikosti kotov $\beta - \alpha$?

- (A) 200° (B) 205° (C) 210° (D) 215° (E) 220°

A5. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 9x + 20$. Katera trditev je pravilna?

- (A) Vsota obeh ničel funkcije je 20.
 (B) Graf funkcije seka ordinatno os v točki $(-9, 20)$.
 (C) Funkcija ima dve različni realni ničli.
 (D) Graf funkcije se dotika abscisne osi.
 (E) Vodilni koeficient je 9.



A6. Na ključavnici za zaklepanje kolesa lahko nastavimo 3-mestno kodo. Na vsakem izmed treh mest lahko izberemo eno izmed števk od 0 do 9. Največ koliko različnih kod lahko nastavimo?

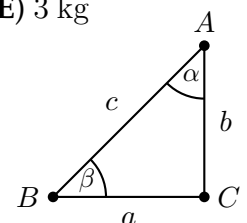
- (A) 30 (B) 100 (C) 300 (D) 9^3 (E) 1000

A7. Če posodo napolnimo z vodo do vrha, tehta 17 kg, če pa jo z vodo napolnimo do polovice, tehta 9,5 kg. Koliko tehta prazna posoda?

- (A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 1,5 kg (D) 2 kg (E) 3 kg

A8. Na sliki je pravokotni trikotnik. Katera izjava ni pravilna?

- (A) $a = c - (b + c)$ (B) $\sin \beta = \frac{a}{c}$ (C) $S = \frac{ab}{2}$
 (D) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (E) $\alpha + \beta = 90^\circ$



B1. Preglednica kaže število prodanih prenosnih telefonov v tednu.

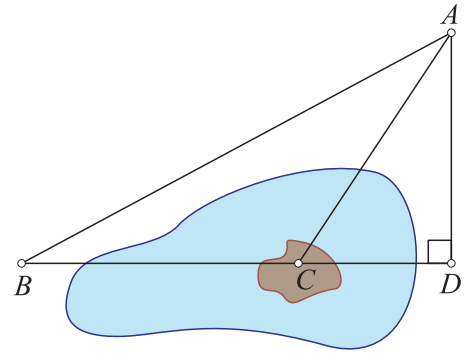
Znamka	Ponedeljek	Torek	Sreda	Četrtek	Petek
Samsung	10	14	1	3	12
HTC	2	15	8	12	2
LG	2	4	0	0	3
Apple	1	0	3	6	2

- A. Katere znamke telefonov so v tem tednu prodali največ?
- B. Koliko telefonov so v tem tednu prodali povprečno na dan?
- C. Tedensko prodajo telefonov znamke Samsung ponazorite s tortnim (krožnim) prikazom.

- B2.** Na parceli želimo strojno izvrtati valjasto vrtino premera 80 cm. Prvi meter vrtanja stane 10 evrov, vsak naslednji pa 4 evre več od predhodnega.
- A. Kako dolga je najdaljša toga žica, ki jo lahko po 1,5 m vrtanja spravimo v vrtino?
 - B. Koliko stane izkop petega metra vrtine?
 - C. Koliko bi plačali za 5 m globoko vrtino, če nam ob plačilu z gotovino priznajo 5 % popusta?

B3. Vila Luxa se nahaja na lokaciji C na otočku sredi jezera, Hiša Krasna pa na lokaciji B . Razdalja med točkama A in D je 10 km, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 28^\circ$.

- A. Koliko je velik kot $\sphericalangle CAD$?
- B. Koliko kilometrov je točka A oddaljena od točke C ?
Izračunajte na dve decimalni natančno.
- C. Kolikšna je razdalja med Vilo Luxo in Hišo Krasno?



Rešitve nalog in točkovnik za 1. in 2. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z $-0,5$ točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

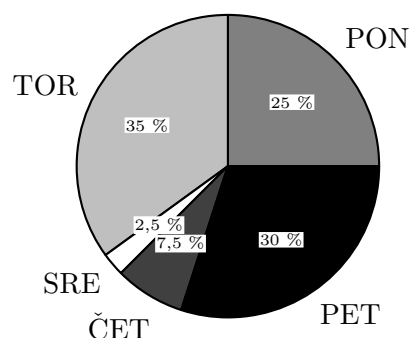
1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	D	C	C	B	E	D

- A1.** Otroci so najprej pojedli $\frac{2}{3}$ torte, ostala je $\frac{1}{3}$ torte. Franci je od te tretjine pojedel četrto, kar je $\frac{1}{12}$ torte. Ostalo je še $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ torte.
- A2.** V anketi je bilo zajetih 100 učiteljev. 40 učiteljev ima delovno dobo daljšo kot 5 let in krajšo od 15 let, kar predstavlja 40 % vseh učiteljev.
- A3.** Petnajst trimestrnih števil ima vsoto števk enako 5. Ta števila so: 500, 401, 410, 104, 140, 311, 131, 113, 221, 212, 122, 320, 302, 230, 203.
- A4.** $18 \cdot 10^6$ od $7,5 \cdot 10^9 = 0,0024$. To pomeni, da ima 0,24 % ljudi rojstni dan na isti dan.
- A5.** Kot pri oglišču S enakokrakega trikotnika ABS je velik $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, kot α pa $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Razlika kotov $\beta - \alpha$ je enaka $240^\circ - 30^\circ = 210^\circ$.
- A6.** Izmed danih enačb določa najbolj strmo premico enačba $y = 5x + \frac{1}{3}$.
- A7.** Na vsakem mestu lahko izbiramo izmed deset števk, zato lahko nastavimo $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ različnih kod.
- A8.** Po besedilu naloge lahko zapišemo sistem dveh enačb: $p + v = 17$ in $p + \frac{1}{2}v = 9,5$. Posoda p tehta 2 kg, voda v v njej pa 15 kg.

DALJŠE NALOGE

B1. Največ prodanih telefonov je bilo blagovne znamke Samsung. V petih dneh je bilo prodanih 100 telefonov oz. v povprečju 20 na dan. Za prikaz podatkov s tortnim prikazom izdelamo preglednico:

	Samsung	Rel. frekv. [%]	Središčni kot [°]
PON	10	25	90
TOR	14	35	126
SRE	1	2,5	9
ČET	3	7,5	27
PET	12	30	108
Σ	40	100	360



- A.** Največ so prodali Samsungovih aparatov 1 t
- B.** Povprečna prodaja na dan je 20 telefonov. 2 t
- C.** Izračunane velikosti središčnih kotov v tortnem prikazu. 1 t
 Pravilno narisani središčni koti. 1 t
 Narisan tortni prikaz z ustrežno legendo. 2 t
- B2.** Toga palica je diagonala osnega preseka valja s premerom 0,8 m in višino 1,5 m. Njeno dolžino izračunamo s Pitagorovim izrekom $d = \sqrt{0,8^2 + 1,5^2} = 1,7$ m. Izkop prvega metra stane 10 €, drugega metra 14 €, tretjega 18 €, četrtega 22 € in petega 26 €.
 Za 5 m globoko vrtino bomo plačali $10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 90$ €, s priznanim popustom pa 85,50 €.
- A.** Toga palica je dolga 1,7 m. 2 t
- B.** Izkop petega metra vrtine stane 26 €. 2 t
- C.** Pet metrov globoka vrtina stane 90 €, 2 t
 oz. s popustom 85,50 €. 1 t
- B3.** Zoja je iz 55 vžigalic sestavila trapez, ki ga sestavlja 27 enakostraničnih trikotnikov, vsak ima ploščino $\frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,825$ cm². Ploščina trapeza je $27 \cdot 10,825$ cm² = 292,275 cm² ≈ 292 cm². Najdlje sta oddaljeni krajišči osnovnice a , to je 70 cm. Za vsak nov trikotnik doda 2 vžigalici, razen za prvega, ko je porabila še eno dodatno. Za n trikotnikov je porabila $2n + 1$ vžigalic.
- A.** Sestavila je 27 enakostraničnih trikotnikov. 2 t
- B.** Celoten lik je trapez. 1 t
- C.** Ploščina trikotnika je 10,825 cm², 1 t
 ploščina trapeza pa 292 cm². 1 t
- D.** Najdaljša razdalja je 70 cm. 1 t
- E.** Za n trikotnikov potrebuje $2n + 1$ vžigalic. 1 t

Rešitve nalog in točkovnik za 3. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z $-0,5$ točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

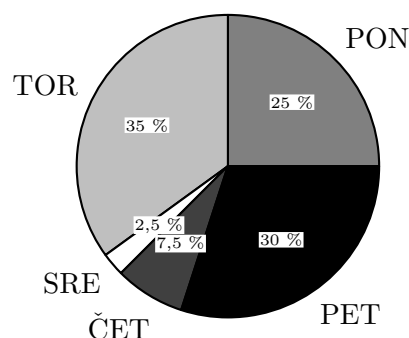
1	2	3	4	5	6	7	8
E	D	C	C	C	E	D	B

- A1.** Enačba $x^2 = 5$ ima rešitvi $x = \pm\sqrt{5}$, torej je število $-\sqrt{5}$ rešitev te enačbe.
- A2.** Petnajst trimestnih števil ima vsoto števk enako 5. Ta števila so: 500, 401, 410, 104, 140, 311, 131, 113, 221, 212, 122, 320, 302, 230, 203.
- A3.** $18 \cdot 10^6$ od $7,5 \cdot 10^9 = 0,0024$. To pomeni, da ima 0,24 % ljudi rojstni dan na isti dan.
- A4.** Kot pri oglišču S enakokrakega trikotnika ABS je velik $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, kot α pa $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Razlika kotov $\beta - \alpha$ je enaka $240^\circ - 30^\circ = 210^\circ$.
- A5.** Funkcija ima ničli $x = 5$ in $x = 4$, torej dve različni realni ničli.
- A6.** Na vsakem mestu lahko izbiramo izmed deset števk, zato lahko nastavimo $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ različnih kod.
- A7.** Iz besedila naloge lahko zapišemo sistem dveh enačb: $p + v = 17$ in $p + \frac{1}{2}v = 9,5$. Posoda p tehta 2 kg, voda v v njej pa 15 kg.
- A8.** Izjava $\sin \beta = \frac{a}{c}$ ni pravilna.

DALJŠE NALOGE

B1. Največ prodanih telefonov je bilo blagovne znamke Samsung. V petih dneh je bilo prodanih 100 telefonov oz. v povprečju 20 na dan. Za prikaz podatkov s tortnim prikazom izdelamo preglednico:

	Samsung	Rel. frekv. [%]	Središčni kot [°]
PON	10	25	90
TOR	14	35	126
SRE	1	2,5	9
ČET	3	7,5	27
PET	12	30	108
Σ	40	100	360



- A. Največ so prodali Samsungovih aparatov 1 t
- B. Povprečna prodaja na dan je 20 telefonov. 2 t
- C. Izračunane velikosti središčnih kotov v tortnem (krožnem) prikazu. 1 t
 - Pravilno narisani središčni koti. 1 t
 - Narisan tortni prikaz z ustrežno legendo. 2 t

B2. Toga palica je diagonala osnega preseka valja s premerom 0,8 m in višino 1,5 m. Njeno dolžino izračunamo s Pitagorovim izrekom $d = \sqrt{0,8^2 + 1,5^2} = 1,7$ m. Izkop prvega metra stane 10 €, drugega metra 14 €, tretjega 18 €, četrtega 22 € in petega 26 €. Za 5 m globoko vrtino bomo plačali $10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 90$ €, s priznanim popustom pa 85,50 €.

- A. Toga palica je dolga 1,7 m. 2 t
- B. Izkop petega metra vrtine stane 26 €. 2 t
- C. Pet metrov globoka vrtina stane 90 €, 2 t
 - oz. s popustom 85,50 €. 1 t

B3. Trikotnik BCA je enakokrak. Kot ACB je velik $180^\circ - 2 \cdot 28^\circ = 124^\circ$, zato je kot DCA velik 56° . Ker je trikotnik CDA pravokoten, je kot CAD velik 34° . Razdaljo $|AC|$ lahko izračunamo z $\cos 34^\circ = \frac{10}{|AC|}$ oz. $|AC| = 12,06$ km. Ker je trikotnik BCA enakokrak, velja $|BC| = |AC| = 12,06$ km.

- A. Velikost kota $\sphericalangle CAD = 34^\circ$ 2 t
- B. Zapisana enačba $\cos 34^\circ = \frac{10}{|AC|}$ 1 t
 - Izračunana razdalja $|AC| = 12,06217$ km. 2 t
 - Pravilno zaokrožena razdalja 12,06 km. 1 t
- C. Razdalja $|BC| = 12,06$ km. 1 t