

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2016/17

1. skupina: Poslovna matematika

Četrtek, 9. marec 2017

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V podjetju, ki proizvaja male gospodinjske aparate, imajo 80 strojev. Stroji delajo po 8 ur dnevno. V mesecu marcu (23 delovnih dni) izdelajo 120.000 aparatov.

- a) Odločili so se za nakup novih strojev, ki bodo za 12 % zmogljivejši. Koliko ur dnevno bi morali obratovati novi stroji v mesecu aprilu (20 delovnih dni), da bi izdelali 130.000 aparatov. Upoštevajte, da je bilo dobavljenih le 75 strojev.

3 točke

- b) Koliko dni bi morali delati novi stroji, če bi dodatno dobavili še 5 novih strojev? Novi stroji bi delali po 6 ur na dan. Rezultat, ki ste ga izračunali, izrazite tudi v dnevih in urah.

4 točke

2. naloga

a) Razdelite 30.000 USD med štiri podjetnike, tako da:

- 20 % celotnega zneska razdelite tako, da prejme vsak naslednji za 500 USD manj kot prejšnji;
- $\frac{1}{2}$ celotnega zneska v razmerju 2 : 4 : 1 : 3;
- ostanek celotnega zneska pa na enake dele.

Koliko USD prejme vsak podjetnik?

4 točke

b) Četrti podjetnik se je odločil, da bo prejeti znesek razdelil trem najboljšim zaposlenim v podjetju po naslednjih kriterijih:

- obratno sorazmerno z odsotnostjo – prvi 20 dni, drugi 40 dni, tretji 15 dni
- premo sorazmerno s storilnostjo – prvi 500, drugi 200 in tretji 300 enot.

Koliko USD prejme vsak zaposleni?

3 točke

3. naloga

- a) Na neki šoli je v 3. letnik vpisanih 82 dijakov. V 3. a-razredu, ki ima 28 dijakov, je bilo ob koncu leta uspešnih 25 dijakov, v 3. b, ki ima 30 dijakov, je bilo uspešnih 26 dijakov, v 3. c, ki ima 24 dijakov, sta bila dva dijaka neuspešna.

Kateri razred je bil najuspešnejši?

4 točke

- b) V neko drugo srednjo šolo je 1. 9. vpisanih 640 dijakov. 5. septembra se je na to šola naknadno vpisalo še 5 dijakov, do 15. septembra pa še 2 dijaka. Koliko dijakov je na šoli 15. septembra? Koliko % dijakov se je naknadno vpisalo do 5. septembra? Kakšen je skupni % dijakov, ki so se vpisali naknadno?

3 točke

4. naloga

Podjetje »Domača zelenjava« d. o. o. se ukvarja s pridelavo zelenjave. Zaradi povečanega povpraševanja po slovenski zelenjavi namerava podjetje zaposliti še dodatnega delavca. Za delo na polju mora to podjetje nabaviti nov traktor. Ker nimajo trenutno dovolj lastnih sredstev, jim je banka odobrila posojilo, ki se bo obrestovalo po 8,8-% anticipativni obrestni meri in po navadnem obrestnem računu.

- a) Kolikšna mora biti višina najetega posojila, ki ga bo podjetje vrnilo čez 8 mesecev, če potrebuje za nakup traktorja znamke Ursus 18.000,00 EUR?

3 točke

- b) Ali bi podjetje z najetim posojilom v višini 20.000,00 EUR imelo dovolj denarja za nakup traktorja znamke Ford, ki stane 19.000,00 EUR?

4 točke



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2016/17

2. skupina: Statistika

Četrtek, 9. marec 2017

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Tabela 1: **Dijaki po izobraževalnih programih v Sloveniji v letih 2008 in 2014**

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje	370	361
Srednje poklicno izobraževanje	3.630	2.947
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje	8.484	7.711
Srednje splošno izobraževanje	8.519	6.774
Skupaj	21.003	17.793

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih in jo izrazite v odstotkih (*na 1 decimalno mesto natančno*).

2 točki

Tabela 2: **Struktura dijakov po izobraževalnih programih Sloveniji v letih 2008 in 2014** (v odstotkih)

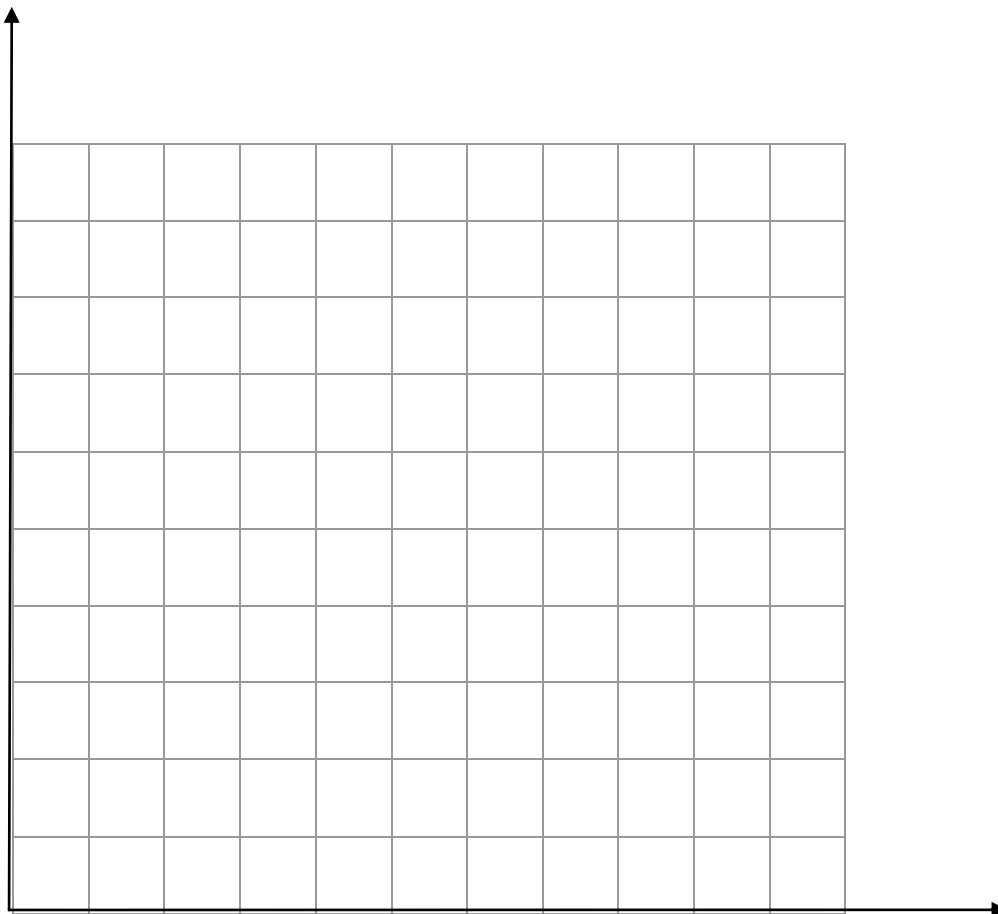
Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje		
Srednje poklicno izobraževanje		
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje		
Srednje splošno izobraževanje		
Skupaj		

- b) Razložite izračunano strukturo za leto 2014.

1 točka

- c) Strukturo dijakov po izobraževalnih programih v letih 2008 in 2014 prikažite grafično s strukturnima stolpcema.

3 točke



- d) Dopolnite besedilo.

1 točka

V srednjem poklicnem izobraževanju se je število dijakov v letu 2014 glede na leto 2008 **povečalo/zmanjšalo** za _____ odstotkov.

2. NALOGA



Neka občina bo ob občinskem prazniku izdala bilten. V biltenu bodo objavili tudi nekaj statističnih podatkov o treh sosednjih regijah, ki so jih zbrali za ta namen in so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 3: Površina, naselja, prebivalci in gospodinjstva v regijah Zelena, Rdeča in Bela

Regija	Površina v km ²	Število naselij	Število prebivalcev	Število gospodinjstev
Zelena	352	61	22.557	6.487
Rdeča	268	114	25.238	7.450
Bela	169	33	17.543	5.353

Vir: Izmišljeni podatki

a) Izračunajte gostoto prebivalcev za vse tri regije (na dve decimalni mesti natančno).

2 točki

b) Izračunajte število prebivalcev na gospodinjstvo za vse tri regije (na dve decimalni mesti natančno).

2 točki

c) Izračunajte število naselij na 100 km² za vse tri regije (na dve decimalni mesti natančno).

2 točki

Rešitve:

Regija	a)	b)	c)
Zelena			
Rdeča			
Bela			


- d) V Zeleni regiji je bilo v preteklem letu 2.350 turistov, od tega 67 % tujih. Določite število tujih turistov na 100 vseh turistov (*na dve decimalni mesti natančno*).

1 točka

3. NALOGA

Smučarski skoki postajajo zadnja leta zaradi izjemnih dosežkov naših tekmovalcev vse bolj popularni. Med slovenskimi skakalci je trenutno najboljši Peter Prevc, ki je v sezoni 2015/16 dosegel rekordno število zmag v primerjavi z ostalimi tekmovalci.

Tabela 3: Svetovni pokal - World Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016

Uvrstitev (doseženo mesto)	Skakalec	Število zmag	Skupno število doseženih točk	
1.	 PREVC Peter	15	2.303	
2.	 FREUND Severin	3	1.490	
3.	 GANGNES Kenneth	1	1.348	
4.	 HAYBOECK Michael	3	1.301	
5.	 FORFANG Johann Andre	1	1.240	
6.	 KRAFT Stefan	1	1.006	
7.	 TANDE Daniel-Andre	1	985	
8.	 KASAI Noriaki	0	909	
9.	 FREITAG Richard	0	680	
10.	 FANNEMEL Anders	1	670	

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smučarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski






- a) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojili ostali tekmovalci v primerjavi s Petrom Prevcem. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazni stolpec zgornje tabele.)

2 točki

- b) Severin Freund je osvojil za _____ odstotka **več/manj** točk, Kenneth Gangnes za _____ odstotka **več/manj** točk ter Michael Hayboeck za _____ odstotka **več/manj** točk kot Peter Prevc.

2 točki

Tabela 5: Pokal narodov - Nations Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016

Uvrstitev (doseženo mesto)	Država	Skupno število doseženih točk		
1.	 Norveška	7.202		
2.	 Slovenija	5.760		
3.	 Nemčija	5.409		
4.	 Avstrija	4.652		
5.	 Japonska	3.088		

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

- c) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojile ostale države v primerjavi s Slovenijo. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazna stolpca v tabeli.)

2 točki

- d) Razložite rezultate pod točko c.

1 točka

4. NALOGA

Na RIC-u so pripravili podatke o splošnem uspehu na poklicni maturi za programe srednjega strokovnega izobraževanja v spomladanskem roku 2016. Zaradi pomanjkanja črnila nekaj podatkov ni bilo vidnih:

Tabela 6: **Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016**

Število točk na PM	f_j		
8–10	242		
11–13	1.223		
14–16	1.803		
17–19	1.562		
20–22	701		
Skupaj	5.531		

Vir: Državni izpitni center

- a) Opredelite statistično populacijo, ki smo jo opazovali.

1 točka

- b) Katera statistična spremenljivka je bila predmet opazovanja in katera vrsta statistične spremenljivke je bila?

2 točki

- c) Izračunajte deleže dijakov po razredih in jih vnesite v tabelo zgoraj. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno.*)

2 točki

- d) Dopolnite besedilo.

_____ odstotka dijakov je doseglo 17 točk ali več.

1 točka

_____ dijakov je doseglo do 16 točk.

1 točka

Ime in priimek: _____

N1	N2	N3	N4

Razred: _____ Mentor: _____

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.
Dovoljena je uporaba žepnega računalja. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. Od maja 2016 do februarja 2017 smo spremljali ceno delnice A.

Podatki o povprečnih cenah delnice v evrih po posameznih mesecih v opazovanem obdobju so zbrani v drugi vrstici spodnje tabele. V nadaljnjih vrsticah so izračunana drseča povprečja cene delnice za petmesečna obdobja. S pojmom *drseča* poudarimo njihovo lastnost, da ob vsaki vključitvi novega podatka najstarejši podatek izključimo iz računa.

maj	jun.	jul.	avg.	sep.	okt.	nov.	dec.	jan.	feb.
19,80		18,60	9,80	11,80		15,00		12,80	14,80
15,00									
	13,00								
		11,00							
			11,60						

Rezultate v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

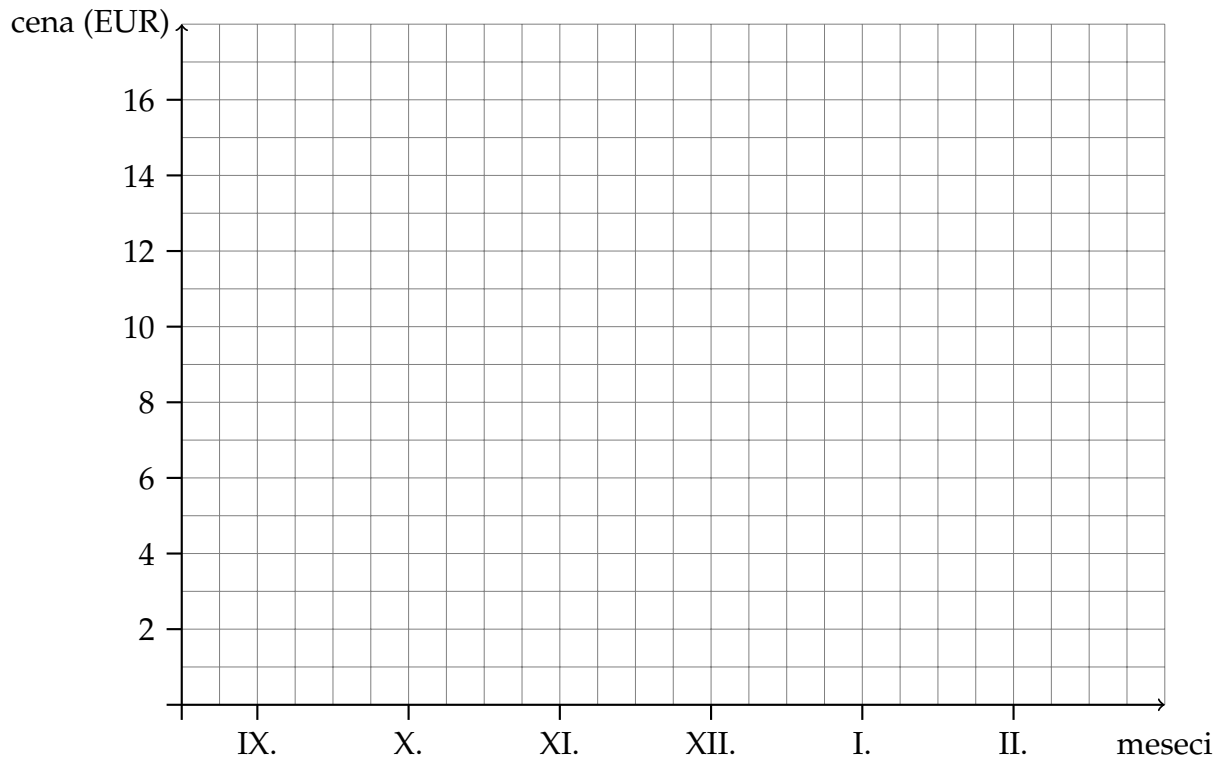
a) Privzemi, da so meseci enako dolgi. Dopolni tabelo.

[5 točk]

- b) Prednost drsečih povprečij je, da izravnajo gibanje oziroma volatilnost cen, kar nam omogoča, da lažje določimo trend v podatkih.

V dan koordinatni sistem nariši linijska diagrama mesečnih in drsečih povprečij za obdobje september 2016 – februar 2017. Pri tem vsako drseče povprečje prikaži pri zadnjem še vsebovanem mesecu; npr. prvo drseče povprečje 15,00 prikaži pri mesecu septembru.

[6 točk]



- c) Pravilo križanja priporoča, da delnico kupimo takrat, ko se njena cena povzpne za vsaj 10 % nad krivuljo drsečega povprečja, prodamo pa takrat, ko njena cena pade za vsaj 10 % pod to krivuljo. V nalogi odločitev sprejemamo na osnovi pravila križanja, trenutnega mesečnega povprečja in drsečega povprečja.

Ali je bilo v trenutku, ko smo določili mesečno povprečje in drseče povprečje za mesec november 2016, delnico A priporočljivo kupiti? Odgovor utemelji.

[3 točke]

- d) Kolikšna bo morala biti povprečna cena delnice A v marcu 2017, da bo ob njeni objavi priporočljivo delnico A prodati?

[6 točk]

2. Babica Metka se je ob rojstvu vnuka odločila, da mu bo v času njegovega osnovnošolskega izobraževanja ob koncu vsakega šolskega leta podarila 300 EUR žepnine. Da bi lahko to odločitev izpolnila, že kmalu po vnukovem rojstvu, to je 24. junija, vloži v banko potreben denar. Prvo žepnino bo vnuku izplačala natanko 7 let po pologu, zadnjo pa 15 let po pologu. Banka za dolgoročne depozite ponuja letno obrestno mero 4% z letnim obrestovanjem. Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Koliko denarja mora Metka vložiti v banko, da bo lahko poravnala vse žepnine? [10 točk]

b) Kolikšno je stanje na babičinem varčevalnem računu, ko vnuk zaključi peti razred, to je takoj po tem, ko mu izplača peto žepnino? [4 točke]

- c) Takoj po izplačilu pete žepnine banka objavi, da bo dolgoročne varčevalce nagradila s povišanjem obrestne mere na 5%. Kolikšen znesek lahko babica dvigne z varčevalnega računa, pa bo še vedno lahko izpolnila svojo odločitev? [6 točk]

3. V spodnji preglednici sta dani trenutni efektivni obrestni meri za enoletno in dveletno obdobje. Čas t do dosvetja merimo v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	3,55 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR. Prva je brezakuponska in ima dosvetje čez eno leto, druga pa je kuponska z dosvetjem čez dve leti in izplačuje letne kupone po 2% kuponski obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi ceni obveznic v času 0. [6 točk]

- b) Brata Jan in Žan sta pravkar prejela vsak po 10 000 EUR. Ker prejetega denarja trenutno ne potrebujeta, ga bosta vložila v obveznici. Jan bo ves denar vložil v brezakuponsko obveznico, Žan pa ves denar v kuponsko obveznico. Koliko obveznic bosta kupila? Število posameznih obveznic zaokroži na celo število. [4 točke]

c) Leto kasneje je podana efektivna obrestna mera $R(1,2) = 3,80\%$. Jan po tej obrestni meri na banki za eno leto investira prejete nominalne vrednosti svojih obveznic, Žan pa kupone, ki so jih izplačale njegove obveznice. S kolikšnim zneskom razpolaga vsak od bratov v trenutku 2, ko zapadejo še dveletne obveznice? [6 točk]

d) Kolikšna bi morala biti obrestna mera $R(1,2)$, da bi brata ob koncu dveletnega obdobja razpolagala z enakima zneskoma? [5 točk]

4. Opcijsko strategijo nakupni metuljev korak sestavimo tako, da

- kupimo evropsko nakupno opcijo A z izvršilno ceno $K_1 = 20$ EUR,
- kupimo evropsko nakupno opcijo C z izvršilno ceno $K_3 = 40$ EUR,
- prodamo (izdamo) dve evropski nakupni opciji B z izvršilno ceno $K_2 = 30$ EUR.

Vse naštete opcije imajo zapadlost T in so napisane na isto delnico.

a) Nariši grafa izplačil opcij A in B ob zapadlosti v odvisnosti od takratne cene delnice S_T .
[6 točk]

b) Ob zapadlosti opcij je cena delnice enaka $S_T = 35$ EUR. Kolikšno je izplačilo nakupnega metuljevega koraka?
[4 točke]

- c) Določi funkcijo izplačila nakupnega metuljevega koraka ob zapadlosti v odvisnosti od cene delnice S_T in nariši njen graf. [10 točk]

Stran s formulami

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico, ki izplačuje dividende

$$F_t = (S_t - I(t, T))(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- valutni terminski posel

$$F_t = S_t \frac{(1 + R_d)^{T-t}}{(1 + R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)})$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$R(t, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{1 + R(0, T) \cdot (T - t)}{1 + R(0, S) \cdot (S - t)} - 1 \right), \quad K = R(0, S, T)$$

$$V_t = \frac{N \cdot (R(t, S, T) - K) \cdot (T - S)}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}$$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času t , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- premija v času t , če delnica izplačuje dividende

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t - I(t, T)$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t - I(t, T) = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropske in ameriške opcije

$$c_t^E \leq c_t^A, \quad p_t^E \leq p_t^A$$



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2016/17

1. skupina: Poslovna matematika - REŠITVE

Četrtek, 9. marec 2017

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V podjetju, ki proizvaja male gospodinjske aparate, imajo 80 strojev. Stroji delajo po 8 ur dnevno. V mesecu marcu (23 delovnih dni) izdelajo 120.000 aparatov.

- a) Odločili so se za nakup novih strojev, ki bodo za 12 % zmogljivejši. Koliko ur dnevno bi morali obratovati novi stroji v mesecu aprilu (20 delovnih dni), da bi izdelali 130.000 aparatov. Upoštevajte, da je bilo dobavljenih le 75 strojev.

3 točke

Rešitev:

80 strojev	8 ur	23 dni	120.000 aparatov	100 %
↓	↑	↓	↑	↓
75 strojev	x ur	20 dni	130.000 aparatov	112 %

$$\begin{aligned}
 X : 8 &= 80 : 75 \\
 &= 23 : 20 \\
 &= 130.000 : 120.000 \\
 &= 100 : 112
 \end{aligned}$$

$$X = \frac{8 \cdot 80 \cdot 23 \cdot 130.000 \cdot 100}{75 \cdot 20 \cdot 120.000 \cdot 112} = \underline{\underline{9,49 \text{ ure}}}$$

Odgovor:

Če bi delali na 75 novih strojih, ki bi bili za 12 % zmogljivejši, bi morali delati 20 dni po 9,49 ure, da bi izdelali 130.000 aparatov.

1 točka – zapis sheme

1 točka – določitev odnosa količin

1 točka – nastavitev enačbe, rezultat in odgovor

- b) Koliko dni bi morali delati novi stroji, če bi dodatno dobavili še 5 novih strojev? Novi stroji bi delali po 6 ur na dan. Rezultat, ki ste ga izračunali, izrazite tudi v dnevih in urah.

4 točke

Rešitev:

80 strojev	8 ur	23 dni	120.000 aparatov	100 %
↓	↓	↑	↑	↓
80 strojev	6 ur	x dni	130.000 aparatov	112 %

$$\begin{aligned}
 X : 23 &= 80 : 80 \\
 &= 8 : 6 \\
 &= 130.000 : 120.000 \\
 &= 100 : 112
 \end{aligned}$$

$$X = \frac{23 \cdot 80 \cdot 8 \cdot 130.000 \cdot 100}{80 \cdot 6 \cdot 120.000 \cdot 112} = 29,66 \text{ dni} = 29 \text{ dni } 16 \text{ ur}$$

Odgovor:

Če bi delali na 80 strojih po 6 ur na dan, bi morali delati 29 dni in 16 ur.

1 točka – zapis sheme

1 točka – ugotovitev vrste sorazmerij

1 točka – nastavitev enačbe, rezultat

1 točka – zapis odgovora v dnevih in urah

2. naloga

a) Razdelite 30.000 USD med štiri podjetnike, tako da:

- 20 % celotnega zneska razdelite tako, da prejme vsak naslednji za 500 USD manj kot prejšnji;
- $\frac{1}{2}$ celotnega zneska v razmerju 2 : 4 : 1 : 3;
- ostanek celotnega zneska pa na enake dele.

Koliko USD prejme vsak podjetnik?

4 točke

Rešitev:

Podjetniki	1. delitev 20 % od 30.000 = 15.000		2. delitev $\frac{1}{2}$ od 30.000 = 15.000		3. delitev ostanek = 9.000	Skupaj v USD
	Deleži	Znesek	Deleži	Znesek	$x = \frac{9000}{4} = 2.250$	
A	x	2.250 \$	2x	3000 \$	2.250 \$	7.500 \$
B	x – 500	1.750 \$	4x	6000 \$	2.250 \$	10.000 \$
C	x – 1000	1.250 \$	1x	1500 \$	2.250 \$	5.000 \$
D	x – 1.500	750 \$	3x	4500 \$	2.250 \$	7.500 \$
	$4x - 3.000 = 6.000$ $x = 2.250$		$10x = 15.000$ $x = 1.500$		9.000	30.000

1 točka – izračun 1. delitve

1 točka – izračun 2. delitve

1 točka – izračun 3. delitve

1 točka – izračun deležev posameznih podjetnikov v USD

b) Četrty podjetnik se je odločil, da bo prejeti znesek razdelil trem najboljšim zaposlenim v podjetju po naslednjih kriterijih:

- obratno sorazmerno z odsotnostjo – prvi 20 dni, drugi 40 dni, tretji 15 dni
- premo sorazmerno s storilnostjo – prvi 500, drugi 200 in tretji 300 enot.

Koliko USD prejme vsak zaposleni?

3 točke

Rešitev:

zaposleni	dnevi odsotnosti	storilnost	skupen ključ	Skupaj v USD
A	$\frac{1}{20}$ ali $20 : 5 = 4$ obratno $\frac{1}{4}$	500	$125 x$	3.750 1T
B	$\frac{1}{40}$ ali $40 : 5 = 8$ obratno $\frac{1}{8}$	200	$25 x$	750 1T
C	$\frac{1}{15}$ ali $15 : 5 = 3$ obratno $\frac{1}{3}$	300	$100 x$	<u>3.000</u> 1T
				7.500

$$125 : 25 : 100 \quad /25$$

$$5 x + 1 x + 4 x = 7500$$

$$\underline{\underline{x = 750}}$$

ali

$$125 x + 25 x + 150 x = 7.500$$

$$\underline{\underline{x = 25}}$$

1 točka – izračun deleža 1. zaposlenega

1 točka – izračun deleža 2. zaposlenega

1 točka – izračun deleža 3. zaposlenega

3. naloga

- a) Na neki šoli je v 3. letnik vpisanih 82 dijakov. V 3. a-razredu, ki ima 28 dijakov, je bilo ob koncu leta uspešnih 25 dijakov, v 3. b, ki ima 30 dijakov, je bilo uspešnih 26 dijakov, v 3. c, ki ima 24 dijakov, sta bila dva dijaka neuspešna.

Kateri razred je bil najuspešnejši?

4 točke

Rešitev:

Razred	vsi dijaki	uspešni dijaki	uspešnost razreda
3. a	28	25	89,29 % 1T
3. b	30	26	86,67 % 1T
3. c	24	22	91,67 % 1T

Odgovor: Najuspešnejši razred je 3. C

1T

- 1 točka – izračun uspešnosti 3.a razreda
- 1 točka – izračun uspešnosti 3.b razreda
- 1 točka – izračun uspešnosti 3.c razreda
- 1 točka - določitev najuspešnejšega razreda

- b) V neko drugo srednjo šolo je 1. 9. vpisanih 640 dijakov. 5. septembra se je na to šola naknadno vpisalo še 5 dijakov, do 15. septembra pa še 2 dijaka. Koliko dijakov je na šoli 15. septembra? Koliko % dijakov se je naknadno vpisalo do 5. septembra? Kakšen je skupni % dijakov, ki so se vpisali naknadno?

3 točke

Rešitev:

15. septembra = $640 + 5 + 2 = 647$ 1T

% naknadno vpisanih do 5. septembra $5/(640 + 5) \times 100 = 0,775 \% = 0,78 \%$ 1T

SKUPNI % naknadno vpisanih na dan 15.sept. = $7/647 \times 100 = 1,08 \%$ 1T

- 1 točka – izračun števila dijakov na šoli 15. septembra
- 1 točka – izračun odstotka naknadno vpisanih dijakov do 5. septembra
- 1 točka – izračun skupnega odstotka naknadno vpisanih dijakov

4. naloga

Podjetje »Domača zelenjava« d. o. o. se ukvarja s pridelavo zelenjave. Zaradi povečanega povpraševanja po slovenski zelenjavi namerava podjetje zaposliti še dodatnega delavca. Za delo na polju mora to podjetje nabaviti nov traktor. Ker nimajo trenutno dovolj lastnih sredstev, jim je banka odobrila posojilo, ki se bo obrestovalo po 8,8-% anticipativni obrestni meri in po navadnem obrestnem računu.

- a) Kolikšna mora biti višina najetega posojila, ki ga bo podjetje vrnilo čez 8 mesecev, če potrebuje za nakup traktorja znamke Ursus 18.000,00 EUR?

3 točke

Rešitev:

$$G^- = 18.000,00 \text{ EUR}$$

$$p = 8,8 \%$$

$$m = 8 \text{ mesecev}$$

$$G = ? \text{ EUR}$$

$$G^- = G - \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$$

$$G = \frac{1200 \times G^-}{1200 - p \cdot m} = \frac{1200 \times 18.000,00}{1200 - 8,8 \times 8} = \underline{\underline{19.121,81 \text{ EUR}}}$$

Odgovor:

Višina posojila za nakup novega traktorja znamke Ursus ob danih kreditnih pogojih bi morala biti 19.121,81 EUR.

1 točka – nastavitev enačbe

1 točka – ureditev enačbe in pravilno vstavljeni podatki

1 točka – izračun

- b) Ali bi podjetje z najetim posojilom v višini 20.000,00 EUR imelo dovolj denarja za nakup traktorja znamke Ford, ki stane 19.000,00 EUR?

4 točke

Rešitev:

$$G = 20.000,00 \text{ EUR}$$

$$p = 8,8 \%$$

$$m = 8 \text{ mesecev}$$

$$G^- = ? \text{ EUR}$$

$$G^- = G - \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$$

$$G^- = G * \left(\frac{1200 - p \cdot m}{1200} \right) = 20.000,00 * \left(\frac{1200 - 8,8 \times 8}{1200} \right)$$

$$\text{ali} = 20.000,00 - \left(\frac{20.000,00 \times 8,8 \times 8}{1200} \right)$$

$$\text{ali} = 20.000,00 * \left(1 - \frac{8,8 \times 8}{1200} \right)$$

$$\underline{\underline{G^- = 18.826,67 \text{ EUR}}}$$

Odgovor:

Najeto posojilo ob danih pogojih v višini 20.000,00 EUR ne bi zadostovalo za nakup novega traktorja, saj bi manjkalo 173,33 EUR.

1 točka – nastavitev enačbe

1 točka – ureditev enačbe in pravilno vstavljeni podatki

1 točka – izračun

1 točka – odgovor



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2016/17

2. skupina: Statistika - REŠITVE

Četrtek, 9. marec 2017

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalno.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Tabela 1: Dijaki po izobraževalnih programih v Sloveniji v letih 2008 in 2014

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje	370	361
Srednje poklicno izobraževanje	3.630	2.947
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje	8.484	7.711
Srednje splošno izobraževanje	8.519	6.774
Skupaj	21.003	17.793

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih in jo izrazite v odstotkih (*na 1 decimalno mesto natančno*).

2 točki

Tabela 2: Struktura dijakov po izobraževalnih programih Sloveniji v letih 2008 in 2014 (v odstotkih)

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje	1,8	2,0
Srednje poklicno izobraževanje	17,3	16,6
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje	40,4	43,3
Srednje splošno izobraževanje	40,6	38,1
Skupaj	100,0	100,0

- 2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki
 1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih
 0 točk – več napak pri izračunanih strukturnih odstotkih

- b) Razložite izračunano strukturo za leto 2014.

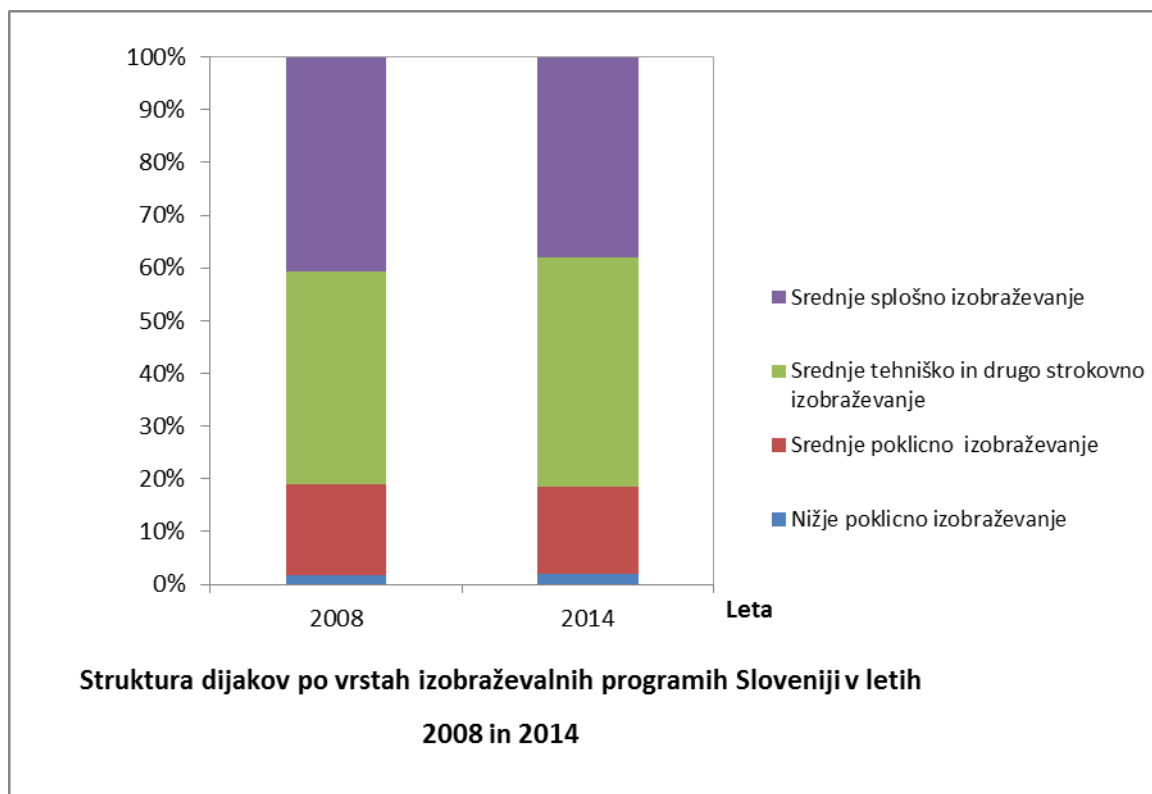
1 točka

V letu 2014 je 2 odstotka dijakov obiskovalo programe nižjega poklicnega izobraževanja, 16,6 odstotka dijakov je obiskovalo programe srednjega poklicnega izobraževanja, največ dijakov je obiskovalo programe srednjega tehniškega in drugega strokovnega izobraževanja, in sicer 43,3 odstotka dijakov, programe srednjega splošnega izobraževanja pa je obiskovalo 38,1 odstotka dijakov.

1 točka – vsi pravilno razloženi strukturni odstotki za leto 2014

- c) Strukturo dijakov po izobraževalnih programih v letih 2008 in 2014 prikažite grafično s strukturnima stolpcema.

3 točke



3 točke za pravilno narisano grafikon z naslovi osi in naslovom grafikona

Odbijemo točke v naslednjih primerih:

- 1 točka, če manjka naslov grafikona
- 1 točka, če manjkajo naslovi obeh osi

- d) Dopolnite besedilo.

1 točka

V srednjem poklicnem izobraževanju se je število dijakov v letu 2014 glede na leto 2008 **povečalo/zmanjšalo** za **18,82** odstotkov.

Izračun:

$$I_{2014/2008} = \frac{2947}{3630} \cdot 100 = 81,18$$

$$D_{2014/2008} \% = 81,18 - 100 = -18,82 \%$$

1 točka – pravilno podčrtan odgovor in pravilno vpisan odstotek.



2. NALOGA

Neka občina bo ob občinskem prazniku izdala bilten. V biltenu bodo objavili tudi nekaj statističnih podatkov o treh sosednjih regijah, ki so jih zbrali za ta namen in so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 3: Površina, naselja, prebivalci in gospodinjstva v regijah Zelena, Rdeča in Bela

Regija	Površina v km ²	Število naselij	Število prebivalcev	Število gospodinjstev
Zelena	352	61	22.557	6.487
Rdeča	268	114	25.238	7.450
Bela	169	33	17.543	5.353

Vir: Izmišljeni podatki

- a) Izračunajte gostoto prebivalcev za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).

2 točki

$$\text{Gostota prebivalstva} = \frac{\text{število prebivalcev}}{\text{površina}}$$

1 točka – pravilna nastavev izračuna statističnega koeficienta

1 točka – pravilno izračunani koeficienti za vse tri regije

- b) Izračunajte število prebivalcev na gospodinjstvo za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).

2 točki

$$K_1 = \frac{\text{število prebivalcev}}{\text{število gospodinjstev}}$$

1 točka – pravilna nastavev izračuna statističnega koeficienta

1 točka – pravilno izračunani koeficienti za vse tri regije

- c) Izračunajte število naselij na 100 km² za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).

2 točki

$$K_2 = \frac{\text{število naselij}}{\text{površina}} \cdot 100$$

1 točka – pravilna nastavev izračuna statističnega koeficienta

1 točka – pravilno izračunani koeficienti za vse tri regije

Rešitve:

Regija	a)	b)	c)
Zelena	64,08	3,48	17,33
Rdeča	94,17	3,39	42,54
Bela	103,80	3,28	19,53

- d) V Zeleni regiji je bilo v preteklem letu 2.350 turistov, od tega 67 % tujih. Določite število tujih turistov na 100 vseh turistov (*na dve decimalni mesti natančno*).

1 točka

Št. tujih turistov: 1575

$$K_3 = \frac{\text{število tujih turistov}}{\text{število vseh turistov}} \cdot 100 = \frac{1575}{2350} \cdot 100 =$$

67,02 tujih turistov na 100 vseh turistov

1 točka nastavitev izračuna in izračunan koeficient

3. NALOGA

Smučarski skoki postajajo zadnja leta zaradi izjemnih dosežkov naših tekmovalcev vse bolj popularni. Med slovenskimi skakalci je trenutno najboljši Peter Prevc, ki je v sezoni 2015/16 dosegel rekordno število zmag v primerjavi z ostalimi tekmovalci.

Tabela 3: **Svetovni pokal - World Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016**

Uvrstitev (doseženo mesto)	Skakalec	Število zmag	Skupno število doseženih točk	I _j /Prevc
1.	 PREVC Peter	15	2.303	100,0
2.	 FREUND Severin	3	1.490	64,7
3.	 GANGNES Kenneth	1	1.348	58,5
4.	 HAYBOECK Michael	3	1.301	56,5
5.	 FORFANG Johann Andre	1	1.240	53,8
6.	 KRAFT Stefan	1	1.006	43,7
7.	 TANDE Daniel-Andre	1	985	42,8
8.	 KASAI Noriaki	0	909	39,5
9.	 FREITAG Richard	0	680	29,5
10.	 FANNEMEL Anders	1	670	29,1

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

- a) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojili ostali tekmovalci v primerjavi s Petrom Prevcem. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazni stolpec zgornje tabele.)

2 točki






2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi s stalno osnovo
 1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih
 0 točk – 2 napaki ali več pri izračunanih indeksih

- b) Severin Freund je osvojil za **35,3** odstotka **več/manj** točk, Kenneth Gangnes za **41,5** odstotka **veča/manj** točk ter Michael Hayboeck za **43,5** odstotka **več/manj** točk kot Peter Prevc.

2 točki

2 točki – vsi pravilno dopolnjeni in podčrtani odgovori
 1 točka – 1 napaka pri dopolnjenih in podčrtanih odgovorih
 0 točk – 2 napaki ali več pri dopolnjenih in podčrtanih odgovorih

Tabela 5: Pokal narodov - Nations Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016

Uvrstitev (doseženo mesto)	Država	Skupno število doseženih točk	I _{J/SLO}	D _{J/SLO} v %
1.	 Norveška	7.202	125,0	25,0
2.	 Slovenija	5.760	100,0	-
3.	 Nemčija	5.409	93,9	-6,1
4.	 Avstrija	4.652	80,8	-19,2
5.	 Japonska	3.088	53,6	-46,4

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

- c) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojile ostale države v primerjavi s Slovenijo. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazna stolpca v tabeli.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi s stalno osnovo

1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih

0 točk – 2 napaki ali več pri izračunanih indeksih

- d) Razložite rezultate pod točko c.

1 točka

Norveška je dosegla za 25 odstotkov več točk kot Slovenija, Nemčija je dosegla za 6 odstotkov manj točk, Avstrija za 19,2 odstotka manj točk in Japonska za 46,4 odstotka manj točk v primerjavi s Slovenijo.

1 točka – za vse pravilno pojasnjene rezultate

4. NALOGA

Na RIC-u so pripravili podatke o splošnem uspehu na poklicni maturi za programe srednjega strokovnega izobraževanja v spomladanskem roku 2016. Zaradi pomanjkanja črnila nekaj podatkov ni bilo vidnih:

Tabela 6: **Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016**

Število točk na PM	f_j	f_j^o	F_j
8–10	242	0,044	242
11–13	1.223	0,221	1.465
14–16	1.803	0,326	3.268
17–19	1.562	0,282	4.830
20–22	701	0,127	5.531
Skupaj	5.531	1,000	

Vir: Državni izpitni center

- a) Opredelite statistično populacijo, ki smo jo opazovali.

1 točka

Statistična populacija:

Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016.

1 točka pravilno opredeljena statistična populacija

- b) Katera statistična spremenljivka je bila predmet opazovanja in katera vrsta statistične spremenljivke je bila?

2 točki

Statistična spremenljivka: splošni uspeh (v točkah)

Vrsta statistične spremenljivke: številska, diskretna sprem.

1 točka za pravilno opredeljeno statistično spremenljivko

1 točka za pravilno opredeljeno vrsto spremenljivke

- c) Izračunajte deleže dijakov po razredih in jih vnesite v tabelo zgoraj. (Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani deleži dijakov

1 točka – 1 napaka pri izračunanih deležih dijakov

0 točk – več napak pri izračunanih deležih dijakov

d) Dopolnite besedilo.

40,9 odstotka dijakov je doseglo 17 točk ali več.

1 točka

3.268 dijakov je doseglo do 16 točk.

1 točka

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. Od maja 2016 do februarja 2017 smo spremljali ceno delnice A.

Podatki o povprečnih cenah delnice v evrih po posameznih mesecih v opazovanem obdobju so zbrani v drugi vrstici spodnje tabele. V nadaljnjih vrsticah so izračunana drseča povprečja cene delnice za petmesečna obdobja. S pojmom *drseča* poudarimo njihovo lastnost, da ob vsaki vključitvi novega podatka najstarejši podatek izključimo iz računa.

maj	jun.	jul.	avg.	sep.	okt.	nov.	dec.	jan.	feb.
19,80	15,00	18,60	9,80	11,80	9,80	15,00	8,60	12,80	14,80
15,00									
	13,00								
		13,00							
			11,00						
				11,60					
					12,20				

Rezultate v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Privzemi, da so meseci enako dolgi. Dopolni tabelo.

[5 točk]

Rešitev

V tabeli so podatki, ki jih je potrebno izračunati, zapisani z modro.

Povprečna cena delnice junija je

$$5 \cdot 15 - (19,8 + 18,6 + 9,8 + 11,8) = 15,00 \text{ EUR.}$$

Povprečna cena delnice oktobra je

$$5 \cdot 13 - (15 - 18,6 - 9,8 - 11,8) = 9,80 \text{ EUR.}$$

Tretje drseče povprečje je

$$\frac{18,6 + 9,8 + 11,8 + 9,8 + 15}{5} = 13,00 \text{ EUR.}$$

Povprečna cena delnice decembra je

$$5 \cdot 11 - (9,8 - 11,8 - 9,8 - 15) = 8,60 \text{ EUR.}$$

Šesto drseče povprečje je

$$\frac{9,8 + 15 + 8,6 + 12,8 + 14,8}{5} = 12,20 \text{ EUR.}$$

Točkovanje

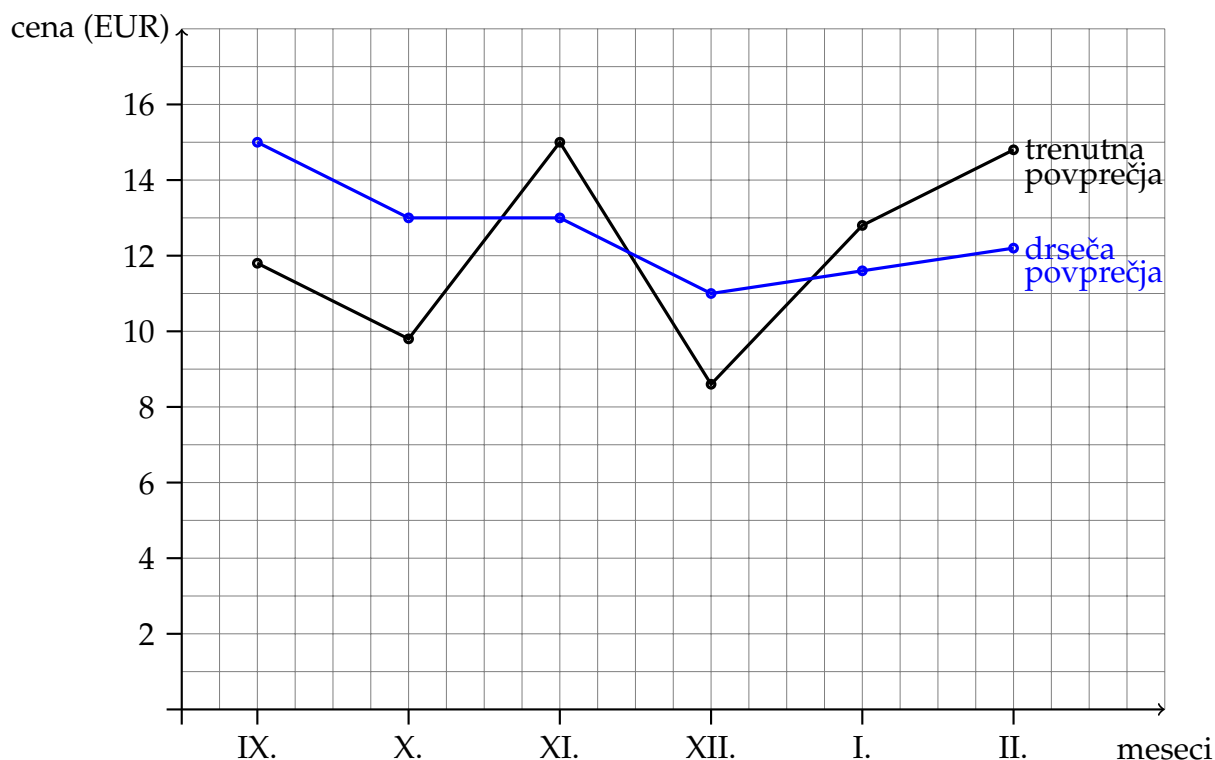
Vsaka pravilno izračunana vrednost 1 točka.

Prenosov napak pri tem vprašanju ne upoštevamo.

- b) Prednost drsečih povprečij je, da izravnajo gibanje oziroma volatilnost cen, kar nam omogoča, da lažje določimo trend v podatkih.

V dan koordinatni sistem nariši linijska diagrama mesečnih in drsečih povprečij za obdobje september 2016 – februar 2017. Pri tem vsako drseče povprečje prikaži pri zadnjem še vsebovanem mesecu; npr. prvo drseče povprečje 15,00 prikaži pri mesecu septembru. [6 točk]

Rešitev



Točkovanje

Linijski diagram trenutnih povprečij 2*+1 točka.

Linijski diagram drsečih povprečij 2*+1 točka.

Po 2 postopkovni točki damo v primeru, ko tekmovalec narobe izpolni tabelo v a).

Po 1 postopkovno točko damo, če tekmovalec glede na a) ustrezno označi 3 od 6 točk.

Daljice v diagramu so obvezne, poudarjanje točk (krajšč) ni potrebno.

Če v sliki ni označeno (npr. pripis ali legenda), kateremu tipu povprečij pripada posamezna lomljena črta, skupaj damo največ 4 točke.

Diagrama sta lahko zamaknjena, če tekmovalec drugače razume oznake na abscisi.

- c) Pravilo križanja priporoča, da delnico kupimo takrat, ko se njena cena povzpne za vsaj 10 % nad krivuljo drsečega povprečja, prodamo pa takrat, ko njena cena pade za vsaj 10 % pod to krivuljo. V nalogi odločitev sprejemamo na osnovi pravila križanja, trenutnega mesečnega povprečja in drsečega povprečja.

Ali je bilo v trenutku, ko smo določili mesečno povprečje in drseče povprečje za mesec november 2016, delnico A priporočljivo kupiti? Odgovor utemelji. [3 točke]

Rešitev

Drseče povprečje za mesec november je bilo 13,00 EUR.

Meja, pri kateri je bil priporočljiv nakup, je bila

$$1,1 \cdot 13 = 14,30 \text{ EUR.}$$

Takratno mesečno povprečje je bilo 15,00 EUR.

Ker je $15 > 14,30$, je bilo delnico priporočljivo kupiti.

Točkovanje

Izbira pravih vrednosti povprečij (13 in 15 EUR) 1* točka.

Izračun meje (zadošča navedba faktorja 1,1) 1 točka.

Sklep 1* točka.

Postopkovni točki damo v primeru, ko tekmovalec narobe izpolni tabelo v a).

- d) Kolikšna bo morala biti povprečna cena delnice A v marcu 2017, da bo ob njeni objavi priporočljivo delnico A prodati? [6 točk]

Rešitev

Označimo povprečno ceno v marcu z x , drseče povprečje bo zato

$$\frac{15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x}{5}.$$

Veljati mora

$$\begin{aligned}x &< \frac{15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x}{5} \cdot 0,9, \\5x &< (15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x) \cdot 0,9, \\x &< \frac{(15 + 8,6 + 12,8 + 14,8) \cdot 0,9}{4,1} = 11,24.\end{aligned}$$

Povprečna cena v marcu mora biti nižja od 11,24 EUR.

Točkovanje

Razumevanje, da neznano trenutno povprečje nastopa tudi v drsečem povprečju, 1 točka.

Pravilna neenačba (lahko enačba) za neznano povprečje 2* točki.

Postopkovni točki damo v primeru, ko tekmovalec narobe izpolni tabelo v a).

Rešitev neenačbe (lahko enačbe) 2*+1 točka.

Če tekmovalec rešuje enačbo in ne navede intervalske rešitve (npr. z znakom <), odbijemo 1 točko.

2. Babica Metka se je ob rojstvu vnuka odločila, da mu bo v času njegovega osnovnošolskega izobraževanja ob koncu vsakega šolskega leta podarila 300 EUR žepnine. Da bi lahko to odločitev izpolnila, že kmalu po vnukovem rojstvu, to je 24. junija, vloži v banko potreben denar. Prvo žepnino bo vnuku izplačala natanko 7 let po pologu, zadnjo pa 15 let po pologu. Banka za dolgoročne depozite ponuja letno obrestno mero 4% z letnim obrestovanjem. Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

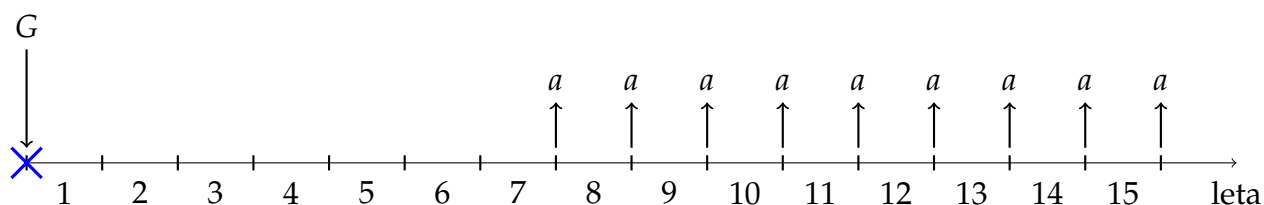
- a) Koliko denarja mora Metka vložiti v banko, da bo lahko poravnala vse žepnine? [10 točk]

Rešitev

Letna obrestna mera je $p\% = 4\%$, letni obrestni faktor je $r = 1,04$.

Letno izplačilo je $a = 300$ EUR. Iščemo začetni vložek G .

Denarne tokove po letih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na trenutek vplačila glavnice.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$G = \frac{a}{r^7} + \frac{a}{r^8} + \dots + \frac{a}{r^{14}} + \frac{a}{r^{15}},$$

$$G = \frac{a}{r^{15}}(r^8 + r^7 + \dots + r + 1),$$

$$G = \frac{a}{r^{15}} \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1},$$

$$G = \frac{300}{1,04^{15}} \cdot \frac{1,04^9 - 1}{1,04 - 1},$$

$$G = 1762,88 \text{ EUR.}$$

Metka mora v banko vložiti 1762,88 EUR.

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 3 točke.

Obrestni faktor 1 točka.

Enačba na osnovi ekvivalence glavnice 2* točki.

Izpostavljanje in vsota geometrijske vrste 1*+2* točki.

Rezultat 1 točka.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

- b) Kolikšno je stanje na babičinem varčevalnem računu, ko vnuk zaključi peti razred, to je takoj po tem, ko mu izplača peto žepnino? [4 točke]

Rešitev

Stanje na varčevalnem računu je enako trenutni vrednosti še ne izplačanih žepnin:

$$\begin{aligned}G_1 &= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \frac{a}{r^4}, \\G_1 &= \frac{a}{r^4}(r^3 + r^2 + r + 1), \\G_1 &= \frac{a}{r^4} \cdot \frac{r^4 - 1}{r - 1}, \\G_1 &= \frac{300}{1,04^4} \cdot \frac{1,04^4 - 1}{1,04 - 1}, \\G_1 &= 1\,088,97 \text{ EUR.}\end{aligned}$$

Stanje na računu po izplačilu pete žepnine je 1 088,97 EUR.

Točkovanje

Enačba, iz katere je možno izraziti neznanu glavnico, 2* točki.

Rezultat 2 točki (upoštevamo odstopanja, ki so posledica zaokroževanja v a)).

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

- c) Takoj po izplačilu pete žepnine banka objavi, da bo dolgoročne varčevalce nagradila s povišanjem obrestne mere na 5 %. Kolikšen znesek lahko babica dvigne z varčevalnega računa, pa bo še vedno lahko izpolnila svojo odločitev? [6 točk]

Rešitev

Novi letni obrestni faktor enak $r_1 = 1,05$.

Da bo babica lahko izplačala vse žepnine, mora na varčevalnem računu imeti

$$\begin{aligned}G_2 &= \frac{a}{r_1} + \frac{a}{r_1^2} + \frac{a}{r_1^3} + \frac{a}{r_1^4}, \\G_2 &= \frac{a}{r_1^4}(r_1^3 + r_1^2 + r_1 + 1), \\G_2 &= \frac{a}{r_1^4} \cdot \frac{r_1^4 - 1}{r_1 - 1}, \\G_2 &= \frac{300}{1,05^4} \cdot \frac{1,05^4 - 1}{1,05 - 1}, \\G_2 &= 1\,063,79 \text{ EUR.}\end{aligned}$$

Babica lahko dvigne $G_1 - G_2 = 25,18$ EUR.

Točkovanje

Novi obrestni faktor 1 točka.

Nova glavnica 2*+1 točka.

Rezultat 2 točki (upoštevamo odstopanja, ki so posledica zaokroževanja).

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

3. V spodnji preglednici sta dani trenutni efektivni obrestni meri za enoletno in dveletno obdobje. Čas t do dospelja merimo v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	3,55 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR. Prva je brezkuponska in ima dospelje čez eno leto, druga pa je kuponska z dospeljem čez dve leti in izplačuje letne kupone po 2 % kuponski obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

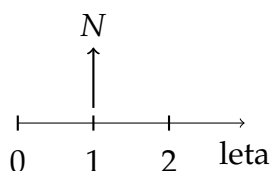
- a) Določi ceni obveznic v času 0.

[6 točk]

Rešitev

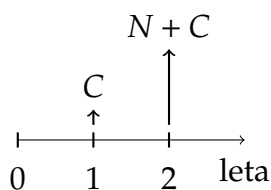
Ceni obveznic dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

Brezkuponska obveznica izplača nominalno vrednost $N = 100$ EUR čez eno leto.



$$P_1 = N \cdot D(0, 1) = \frac{N}{1 + R(0, 1)} = \frac{100}{1 + 0,02} = 98,04 \text{ EUR}$$

Kuponska obveznica izplača kupona $C = 0,02 \cdot 100 = 2$ EUR čez eno in dve leti ter nominalno vrednost $N = 100$ EUR čez dve leti.



$$P_2 = C \cdot D(0, 1) + (N + C) \cdot D(0, 2)$$

$$P_2 = \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{N + C}{(1 + R(0, 2))^2}$$

$$P_2 = \frac{2}{1 + 0,02} + \frac{102}{(1 + 0,0355)^2}$$

$$P_2 = 97,09 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov brezkuponske obveznice (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Pravilno računanje diskontnega faktorja 1 točka.

Cena brezkuponske obveznice 1 točka.

Višina kupona kuponske obveznice 1 točka.

Shema denarnih tokov kuponske obveznice (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Cena kuponske obveznice 1 točka.

- b) Brata Jan in Žan sta pravkar prejela vsak po 10 000 EUR. Ker prejetega denarja trenutno ne potrebujeta, ga bosta vložila v obveznici. Jan bo ves denar vložil v brezkuponsko obveznico, Žan pa ves denar v kuponsko obveznico. Koliko obveznic bosta kupila? Število posameznih obveznic zaokroži na celo število. [4 točke]

Rešitev

Jan bo kupil $\frac{10\,000}{98,04} = 102$ brezkuponski obveznici.

Žan bo kupil $\frac{10\,000}{97,09} = 103$ kuponske obveznice.

Točkovanje

Vsak rezultat 1*+1 točka.

- c) Leto kasneje je podana efektivna obrestna mera $R(1,2) = 3,80\%$. Jan po tej obrestni meri na banki za eno leto investira prejete nominalne vrednosti svojih obveznic, Žan pa kupone, ki so jih izplačale njegove obveznice. S kolikšnim zneskom razpolaga vsak od bratov v trenutku 2, ko zapadejo še dveletne obveznice? [6 točk]

Rešitev

Jan v trenutku $t = 1$ prejme nominalne vrednosti v skupnem znesku

$$M_1 = 102 \cdot 100 = 10\,200 \text{ EUR.}$$

Znesek položi na banko in leto kasneje razpolaga z

$$M_1(1 + R(1,2)) = 10\,200(1 + 0,038) = 10\,587,60 \text{ EUR.}$$

Žan v trenutku $t = 1$ prejme kupone v skupni višini

$$M_2 = 103 \cdot 2 = 206 \text{ EUR,}$$

ki jih položi na banko. Leto kasneje razpolaga z

$$M_2(1 + R(1,2)) = 206(1 + 0,038) = 213,83 \text{ EUR.}$$

Hkrati prejme še druge kupone in nominalne vrednosti dveletnih obveznic v skupni višini

$$M_3 = 103 \cdot (100 + 2) = 10\,506 \text{ EUR.}$$

Skupaj ima 10 719,83 EUR.

Točkovanje

Janova začetna in končna glavnic 2*+1 točka.

Žanova začetna glavnic na bančnem računu (kuponi) 1* točka.

Žanova končna glavnic 1*+1 točka.

Postopkovne točke damo pri prenosu napake iz vprašanja b).

- d) Kolikšna bi morala biti obrestna mera $R(1,2)$, da bi brata ob koncu dveletnega obdobja razpolagala z enakima zneskoma? [5 točk]

Rešitev

Jan v trenutku $t = 2$ razpolaga z $M_1(1 + R(1,2)) = 10\,200(1 + R(1,2))$ EUR.

Žan v trenutku $t = 2$ razpolaga z $M_2(1 + R(1,2)) + M_3 = 206(1 + R(1,2)) + 10\,506$ EUR.

Izenačimo zneska

$$10\,200(1 + R(1,2)) = 206(1 + R(1,2)) + 10\,506$$

$$9994(1 + R(1,2)) = 10\,506$$

$$1 + R(1,2) = \frac{10\,506}{9994}$$

$$R(1,2) = \frac{10\,506}{9994} - 1$$

$$R(1,2) = 5,12\%$$

Obrestna mera mora biti 5,12%.

Točkovanje

Enačba, iz katere je možno izraziti $R(1,2)$, 2*+1 točka.

Postopkovne točke damo, če tekmovalec narobe določi posamezne glavnice v c).

Rezultat 1*+1 točka.

4. Opcijsko strategijo nakupni metuljev korak sestavimo tako, da

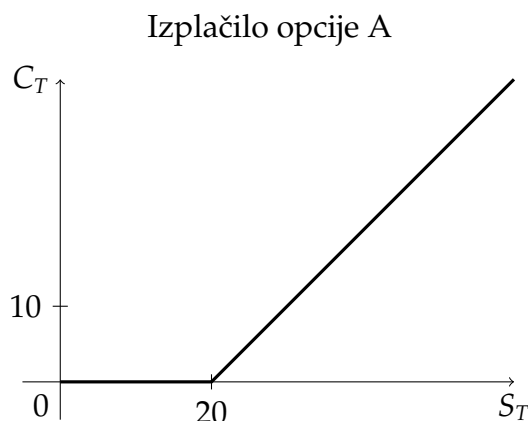
- kupimo evropsko nakupno opcijo A z izvršilno ceno $K_1 = 20$ EUR,
- kupimo evropsko nakupno opcijo C z izvršilno ceno $K_3 = 40$ EUR,
- prodamo (izdamo) dve evropski nakupni opciji B z izvršilno ceno $K_2 = 30$ EUR.

Vse naštetje opcije imajo zapadlost T in so napisane na isto delnico.

- a) Nariši grafa izplačil opcij A in B ob zapadlosti v odvisnosti od takratne cene delnice S_T . [6 točk]

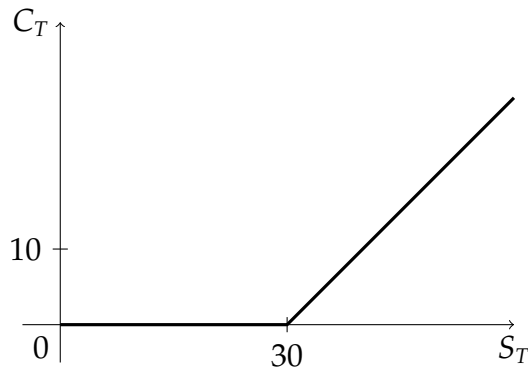
Rešitev

Izplačilo opcije A je odsekoma linearna funkcija $\max\{S_T - K_1, 0\} = \max\{S_T - 20, 0\}$.



Izplačilo opcije B je odsekoma linearna funkcija $\max\{S_T - K_2, 0\} = \max\{S_T - 30, 0\}$ in je neodvisno od tega, ali smo opcijo kupili ali prodali.

Izplačilo opcije B



Točkovanje

Grafa 3+3 točke.

Na grafih izplačil mora biti označeno ali razvidno:

- Kritična točka, kjer se črta lomi.
- Kot 45° , razen če tekmovalec z oznakami na ordinati utemelji drugačen kot.

Graf izplačil opcije B upoštevamo tudi, če je prezrcaljen preko abscise (zaradi kratke pozicije), ima večji naklon (zaradi dveh opcij v portfelju), ali oboje.

- b) Ob zapadlosti opcij je cena delnice enaka $S_T = 35$ EUR. Kolikšno je izplačilo nakupnega metuljevega koraka? [4 točke]

Rešitev

Opciji A in B se splečata, opcija C pa se ne spleča.

Izvršimo opcijo A in dobimo $S_T - K_1 = 35 - 20 = 15$ EUR.

Kupec opcij B opciji izvrši, plačati mu moramo $2 \cdot (S_T - K_2) = 2 \cdot (35 - 30) = 10$ EUR

Denarnih tokov iz opcije C ni.

Naše skupno izplačilo je $15 - 10 = 5$ EUR.

Točkovanje

Izplačilo posameznih opcij (z ali brez upoštevanja količin v portfelju) 1+1+1 točka.

Rezultat 1 točka.

- c) Določi funkcijo izplačila nakupnega metuljevega koraka ob zapadlosti v odvisnosti od cene delnice S_T in nariši njen graf. [10 točk]

Rešitev

Izplačilo opcije A je

$$\max\{S_T - K_1, 0\} = \max\{S_T - 20, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 20 \\ S_T - 20; & S_T > 20 \end{cases} .$$

Opcija je na meji pri $S_T = 20$ EUR. Izplačilo (terjatev) opcij B je

$$-2 \cdot \max\{S_T - K_2, 0\} = -2 \cdot \max\{S_T - 30, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 30 \\ -2 \cdot (S_T - 30); & S_T > 30 \end{cases} .$$

Opciji sta na meji pri $S_T = 30$ EUR. Izplačilo opcije C je

$$\max\{S_T - K_3, 0\} = \max\{S_T - 40, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 40 \\ S_T - 40; & S_T > 40 \end{cases}.$$

Opcija je na meji pri $S_T = 40$ EUR.

Izplačilo portfelja X_T določimo z obravnavo na štirih intervalih. Delilne točke lahko umestimo v levi ali desni interval.

- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $S_T \leq 20$, se ne splača nobena od opcij in izplačilo koraka je $X_T = 0$.
- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $20 < S_T \leq 30$, se splača samo opcija A in dobimo izplačilo

$$X_T = S_T - 20$$

- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $30 < S_T \leq 40$, se splačata opciji A in B. Z izvršitvijo opcije A dobimo izplačilo v višini $S_T - 20$, kupcu opcij B pa plačamo $2 \cdot (S_T - 30) = 2S_T - 60$. Ostane nam izplačilo

$$X_T = S_T - 20 - 2S_T + 60 = 40 - S_T.$$

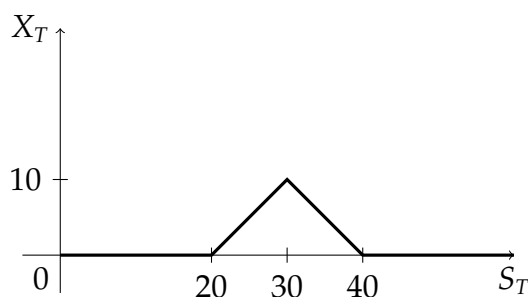
- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $S_T > 40$, se splačajo vse opcije. Z izvršitvijo opcije A dobimo izplačilo v višini $S_T - 20$, z izvršitvijo opcije C dobimo izplačilo $S_T - 40$. Kupcu opcij B plačamo $2 \cdot (S_T - 30) = 2S_T - 60$. Ostane nam izplačilo

$$X_T = S_T - 20 + S_T - 40 - 2S_T + 60 = 0.$$

Izplačilo metuljevega koraka X_T ob zapadlosti opcij je

$$X_T = \begin{cases} 0; & S_T \leq 20 \\ S_T - 20; & 20 < S_T \leq 30 \\ 40 - S_T; & 30 < S_T \leq 40 \\ 0; & 40 < S_T \end{cases}$$

Izplačilo nakupnega metuljevega koraka



Točkovanje

Vsak predpis (navedba območja S_T in predpis X_T) 2 točki, skupaj 8 točk.

Na grafu izplačil (skupaj 2 točki) mora biti razvidno:

- Kritične točke; 1 točka.
- Oblika (konstanta, rast, padanje, konstanta); 1 točka.

Do grafa izplačil lahko tekmovalec pride s seštevanjem grafov.