**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tomaž Košir

Klara Pugelj

Aleš Toman

Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

Ljubljana, september 2016

Naslov:
Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

Avtorji:
Tomaž Košir, Klara Pugelj, Aleš Toman

Strokovni pregled:
Damjana Kokol Bukovšek

Izdalo:
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1. izdaja

Številka publikacije DMFA:
2008

1. elektronska izdaja, Ljubljana 2016

Dostopno brezplačno na naslovu
http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Gradiva/FMS_gradivo_2016.pdf

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7:336(079)(0.034.2)
311:336(079)(0.034.2)

KOŠIR, Tomaž, 1962-
Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike [Elektronski vir] / Tomaž Košir, Klara Pugelj, Aleš Toman. – 1. elektronska izd. – El. knjiga. – Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 2016

Način dostopa (URL):
http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Gradiva/FMS_gradivo_2016.pdf

ISBN 978-961-91896-6-5 (pdf)
1. Pugelj, Klara 2. Toman, Aleš, 1983-
286970368

Kazalo

1 Obrestne mere in obrestovanje

Obresti so nadomestilo za uporabo nekega zneska, ki ga je posojilodajalec za določen čas prepustil posojilojemalcu. V vsakdanjem življenju so obresti donos na sredstva, ki smo jih kot varčevalci zaupali banki, ali pa breme pri posojilih, ki jih najemamo v banki [7].

S principi obrestovanja se dijakinje in dijaki srečate pri pouku matematike. Učni načrt za matematiko v gimnaziji med drugimi vključuje naslednje cilje [8]:

Dijakinje in dijaki:

- razlikujejo navadno in obrestno obrestovanje,
- razlikujejo med konformno in relativno obrestno mero,
- uporabijo načelo ekvivalence glavnic,
- poiščejo realne primere obrestovanja, napovejo pričakovanja in se odločijo na osnovi simulativnih izračunov,
- izračunajo anuiteto in izdelajo amortizacijski načrt.

Gradivo za obravnavo navedenih ciljev najdete v veljavnih gimnazijskih učbenikih za matematiko, v njih najdete tudi računske zglede. Še več računskih zgledov pa lahko najdete v visokošolski zbirki nalog iz Matematike za poslovne in ekonomske vede [4].

Cilj tega poglavja bo zato zlasti natančno opredelili pojme in oznake, ki jih bomo uporabljali v nadaljnjih poglavjih tega gradiva in tekmovalnih nalogah.

1.1 Sedanja in prihodnja vrednost glavnice

Včasih nas zanima, s kolikšnim zneskom bomo razpolagali v prihodnosti, če danes na banko položimo znani znesek. Včasih moramo izračunati, koliko denarja je potrebno naložiti danes, da bomo v prihodnosti lahko poravnali znane obveznosti. To so nekateri od razlogov, zakaj bomo potrebovali obrestni račun.

S pojmom glavnica G označujemo denarno vrednost, ki se obrestuje oziroma diskontira (razobrestuje). Če (**začetno**) **glavnico** G na banko naložimo danes (čas $t = 0$), bo v prihodnosti (čas $t = T$) vredna

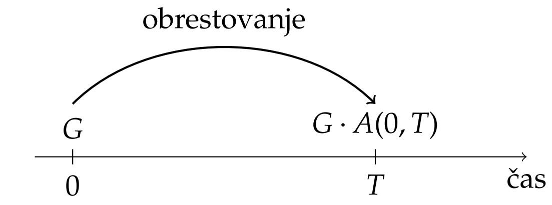
$$G \cdot A(0, T),$$

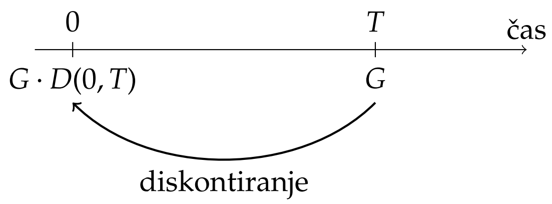
kjer je $A(0, T)$ **obrestovalni faktor** za obdobje $[0, T]$, in pravimo, da glavnico G **obrestujemo**. Če pa želimo vedeti, koliko je (**končna**) **glavnica** G, ki jo bomo dobili v času $t = T$, vredna danes (čas $t = 0$), moramo glavnico G **diskontirati** ali **razobrestiti** na sedanji trenutek. Tako dobimo sedanjo vrednost

$$G \cdot D(0, T),$$

kjer je $D(0, T)$ **diskontni faktor** za obdobje $[0, T]$.

Obrestovanje in diskontiranje prikažemo še s sliko.





Razliki $G \cdot A(0, T) - G$ ali $G - G \cdot D(0, T)$ med vrednostjo glavnice v času T in časom 0 rečemo **obresti**, ki jih označimo z o.

Čeprav je uporaba obrestovalnih in diskontnih faktorjev na videz enostavna, v praksi znesek obresti običajno računamo s pomočjo obrestne mere in tipa obrestovanja. **Obrestna mera** je številka, pogosto izražena v odstotkih, **tip obrestovanja** pa pravilo, kako iz obrestne mere določimo obrestovalni in diskontni faktor.

Pri tem bomo privzeli, da se obresti obračunajo od začetne glavnice in se ob koncu obrestovalnega obdobja pripišejo glavnici (**kapitalizacija obresti**). Temu rečemo **dekurzivno** obrestovanje. Obstaja še **anticipativno** obrestovanje, ki pa je v praksi zelo redko in ga v tem gradivu v celoti izpustimo.

Ker velja

$$A(0, T) \cdot D(0, T) = 1$$

oziroma

$$D(0, T) = \frac{1}{A(0, T)},$$

bomo v nadaljevanju govorili samo o obrestovanju (začetne) glavnice G in obrestovalnih faktorjih $A(0, T)$.

1.2 Navadno obrestovanje

Pri **navadnem obrestovanju** se ves čas obrestovanja obrestuje le začetna glavnica G, obresti o glavnici pripišemo le enkrat, to je ob koncu obrestovalnega obdobja. V slovenski literaturi [4, 7] so se uveljavile naslednje oznake in obrazci:

- Letna obrestna mera je označena s $p\,\%$.
  Obrestna mera v višini 10 % nam tako določa $p\,\% = 10\,\%$ oziroma $p = 10$.

- Trajanje obrestovanja merimo v letih (ℓ), mesecih (m) ali dnevih (d).
  Dveletno obdobje označimo z $\ell = 2$, polletno z $m = 6$, tedensko pa z $d = 7$.

Obrazci za izračun obresti o so naslednji:

leta	meseci	dnevi
$o = \dfrac{G \cdot p \cdot \ell}{100}$	$o = \dfrac{G \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$	$o = \dfrac{G \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365}$

Vsi obrazci določajo, da je znesek obresti sorazmeren začetni glavnici G, obrestni meri $R = \frac{p}{100}$ in času obrestovanja $T = \ell = \frac{m}{12} = \frac{d}{365}$, merjenem v letih. Enotno lahko zapišemo

$$o = G \cdot R \cdot T,$$

obrestovana vrednost glavnice pa je

$$G \cdot A(0, T) = G + o = G \cdot (1 + R \cdot T).$$

Zgled 1.1. Na banko položimo 1000 EUR. Kolikšna je končna vrednost depozita, če je letna obrestna mera enaka 5 %, obrestovanje navadno, ročnost depozita pa

a) pol leta;

b) eno leto;

c) dve leti?

Rešitev.

a) Glavnica depozita je $G = 1000$ EUR, letna obrestna mera $p\,\% = 5\,\%$, ročnost depozita pa $m = 6$ mesecev. Znesek obresti je $o = G \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12} = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1}{2} = 25$ EUR, končna vrednost glavnice pa $G_{1/2} = G + o = 1025$ EUR.

b) Čas obrestovanja je $\ell = 1$ leto, izračunamo obresti $o = G \cdot \frac{p}{100} \cdot \ell = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 1 = 50$ EUR in dobimo končno glavnico $G_1 = G + o = 1050$ EUR.

c) Podobno kot zgoraj za $\ell = 2$ leti izračunamo $G_2 = 1000 + 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 2 = 1100$ EUR.

V Zbirki nalog iz finančne matematike [6] je obrestna mera pri navadnem obrestovanju označena z L, čas obrestovanja pa označen s T in vselej merjen v letih.

1.3 Diskretno obrestno obrestovanje

Pri **obrestnem obrestovanju** se obresti pripišejo glavnici tudi pred ročnostjo kredita ali depozita in se v naslednjem obrestovalnem obdobju obrestujejo skupaj z glavnico. Pri **diskretnem** obrestnem obrestovanju pripis obresti (**kapitalizacijo**) izvajamo periodično. Če obresti pripisujemo letno, govorimo o letni kapitalizaciji obresti ali letnem obrestovanju, če obresti pripisujemo mesečno, govorimo o mesečni kapitalizaciji ali mesečnem obrestovanju, ...

Najenostavnejše je **letno obrestovanje** z letno obrestno mero $p\,\%$. Tu začetna glavnica G v ℓ letih naraste na

$$G_\ell = G\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^\ell = Gr^\ell.$$

Količino $r = 1 + \dfrac{p}{100}$ imenujemo **letni obrestovalni faktor**.

Če letno obrestno mero namesto s $p\,\%$ označimo z R, trajanje obrestovanja pa s T, kjer je T naravno število let, lahko zapišemo obrestovalni faktor

$$A(0,T) = (1+R)^T \text{ za } T \in \mathbb{N}.$$

Zgled 1.2. Na banko, ki uporablja letno obrestno mero 20 %, položimo 500 EUR.

a) Koliko obresti zberemo v petih letih, če je obrestovanje navadno?

b) Koliko obresti zberemo v petih letih, če je obrestovanje letno?

c) Koliko let po pologu bodo obresti pri letnem obrestovanju prvič presegle dvakratnik obresti pri navadnem obrestovanju?

Rešitev.

a) Glavnica depozita je $G = 500$ EUR, letna obrestna mera $p\,\% = 20\,\%$, ročnost depozita pa $\ell = 5$ let. Znesek obresti je $o = G \cdot \frac{p}{100} \cdot \ell = 500 \cdot 0{,}2 \cdot 5 = 500$ EUR. Glavnica se v petih letih podvoji.

b) Letni obrestovalni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}2$.

Vrednost začetne glavnice po petih letih je $G_5 = Gr^5 = 500 \cdot 1{,}2^5 = 1244{,}16$ EUR, prislužene obresti zato znašajo $o = G_5 - G = 744{,}16$ EUR.

c) Pri navadnem obrestovanju v ℓ letih prislužimo $o_n = G \cdot \frac{p}{100} \cdot \ell$ obresti.

Pri letnem obrestovanju v ℓ letih prislužimo $o_d = Gr^\ell - G = G(1 + \frac{p}{100})^\ell - G$ obresti.

Rešujemo neenačbo

$$G\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^\ell - G > 2 \cdot G \cdot \frac{p}{100} \cdot \ell.$$

Glavnica G se krajša

$$\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^\ell - 1 > 2 \cdot \frac{p}{100} \cdot \ell$$
$$1{,}2^\ell - 1 > 0{,}4\ell$$

Enačbe ne moremo rešiti analitično. Iz nalog a) in b) vemo, da bo $\ell > 5$. Prav tako vemo, da leva stran (eksponentna funkcija) raste veliko hitreje kot desna stran (linearna funkcija).

Poskušamo

ℓ	$1{,}2^\ell - 1$	$0{,}4\ell$
6	1,99	2,4
7	2,58	2,8
8	3,30	3,2

in dobimo vrednost $\ell = 8$. V osmih letih bomo z navadnim obrestovanjem prislužili 800 EUR obresti, z letnim obrestovanjem pa 1649,91 EUR.

Tudi pri bolj pogosti kapitalizaciji običajno podamo letno obrestno mero $p\,\%$ ali R in določimo, kako poteka obrestovanje v krajših časovnih obdobjih.

Naj nam naravno število k pove, kolikokrat na leto obrestujemo. Če obrestujemo letno, je $k = 1$, če obrestujemo polletno, je $k = 2$, če obrestujemo mesečno, je $k = 12$, ... Pri diskretnem obrestnem obrestovanju znamo določiti obrestovano vrednost glavnice po n obrestovalnih obdobjih.

Relativno obrestovanje in nominalna obrestna mera

Če v enem letu izvedemo k kapitalizacij, **relativni obdobni obrestovalni faktor** izračunamo po obrazcu

$$r = 1 + \frac{p}{100 \cdot k},$$

vrednost začetne glavnice po n obrestovalnih obdobjih pa znaša

$$G_n = Gr^n.$$

Če letno obrestno mero namesto s $p\,\%$ označimo z R, trajanje obrestovanja pa izrazimo v letih, torej $T = \frac{n}{k}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, lahko zapišemo obrestovalni faktor

$$A\Big(0, \frac{n}{k}\Big) = \Big(1 + \frac{R}{k}\Big)^n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Obrestni meri R rečemo **nominalna** obrestna mera pri diskretnem obrestnem obrestovanju. Beseda »nominalna« nam avtomatično pove, da uporabljamo relativni princip.

Zgled 1.3. Na banki, ki uporablja letno obrestno mero 6 %, si sposodimo 1500 EUR. Koliko znaša naš dolg po enem letu, če je obrestovanje obrestno relativno in kapitalizacija

a) letna;

b) četrtletna;

c) mesečna?

Rešitev.

a) Glavnica kredita je $G = 1500$ EUR, letna obrestna mera $p\,\% = 6\,\%$, zanima nas stanje dolga po $\ell = 1$ letu. Letni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}06$. Končni dolg znaša $G_1 = Gr = 1500 \cdot 1{,}06 = 1590$ EUR.

b) Četrtletni obrestovalni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 4} = 1{,}015$, dolg se obrestuje $n = 4$ četrtletja. Končni dolg znaša $G_4 = Gr^4 = 1500 \cdot 1{,}015^4 = 1592{,}05$ EUR.

c) Mesečni obrestovalni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 12} = 1{,}005$, dolg se obrestuje $n = 12$ mesecev. Končni dolg znaša $G_{12} = Gr^{12} = 1500 \cdot 1{,}005^{12} = 1592{,}52$ EUR.

Konformno obrestovanje in efektivna obrestna mera

Če v enem letu izvedemo k kapitalizacij, **konformni obdobni obrestovalni faktor** izračunamo po obrazcu

$$r = \sqrt[k]{1 + \frac{p}{100}} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/k},$$

vrednost začetne glavnice po n obrestovalnih obdobjih pa znaša

$$G_n = Gr^n.$$

Če letno obrestno mero namesto s $p\,\%$ označimo z R, trajanje obrestovanja pa izrazimo v letih, torej $T = \frac{n}{k}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, lahko zapišemo obrestovalni faktor

$$A\left(0, \frac{n}{k}\right) = (1 + R)^{n/k} \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Obrestni meri R rečemo **efektivna** obrestna mera pri diskretnem obrestnem obrestovanju. Beseda »efektivna« nam avtomatično pove, da uporabljamo konformni princip.

Zgled 1.4. Banka A uporablja 8 % letno obrestno mero in konformno četrtletno obrestovanje. Na banko položimo 100 EUR.

a) Določi višino privarčevanih sredstev pol leta, leto ter leto in pol po pologu.

b) Koliko obresti prislužimo v četrtem četrtletju obrestovanja?

c) Banka B prav tako uporablja 8 % letno obrestno mero in navadno obrestovanje. Tudi pri njej položimo 100 EUR. Ob koncu katerega četrtletja v prvem letu varčevanja se stanji na bankah A in B najbolj razlikujeta?

Rešitev.

a) Označimo začetni polog z $G = 100$ EUR ter letno obrestno mero s $p\,\% = 8\,\%$.

Četrtletni konformni obrestovalni faktor je $r = \sqrt[4]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[4]{1{,}08}$.

Po pol leta imamo $G_2 = Gr^2 = G\,\sqrt[4]{1{,}08}^2 = 100\,\sqrt{1{,}08} = 103{,}92$ EUR.

Po enem letu imamo $G_4 = Gr^4 = 100 \cdot 1{,}08 = 108$ EUR.

Po letu in pol imamo $G_6 = Gr^6 = 100\sqrt{1{,}08}^3 = 112{,}24$ EUR.

b) Po treh četrtletjih imamo $G_3 = Gr^3 = 100\,\sqrt[4]{1{,}08}^3 = 105{,}94$ EUR, po enem letu pa 108 EUR. Razlika 2,06 EUR so obresti, ki jih prislužimo v četrtem četrtletju.

c) Primerjamo stanji na bankah ob koncu posameznega četrtletja. V banki B v vsakem četrtletju ustvarimo $o = G \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4} = 2$ EUR obresti.

konec četrtletja	Banka A	Banka B	Razlika
1	$100\,\sqrt[4]{1{,}08} = 101{,}94$	102	0,06
2	$100\,\sqrt{1{,}08} = 103{,}92$	104	0,08
3	$100\,\sqrt[4]{1,08}^3 = 105{,}94$	106	0,06
4	$100 \cdot 1{,}08 = 108$	108	0

Razlika je največja ob koncu drugega četrtletja.

1.4 Zvezno obrestno obrestovanje

Pri **zveznem obrestnem obrestovanju** oziroma na kratko **zveznem obrestovanju** obresti neprestano pripisujemo glavnici. Ustrezni obrestovalni faktor dobimo kot limito obrestovalnega faktorja diskretnega obrestnega obrestovanja, ko gre število obdobij k proti neskončnosti in je obrestna mera R neodvisna od k.

Zvezno obrestovanje z nominalno obrestno mero

Zvezno obrestovanje z dano **nominalno** obrestno mero R dobimo kot limito **relativnega** diskretnega obrestovanja.

Naj bo najprej $T = 1$ leto. Če eno leto razdelimo na k obrestovalnih obdobij, nas zanima vrednost glavnice po k obrestovalnih obdobjih. V limiti dobimo obrestovalni faktor

$$A(0,1) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{R}{k}\right)^k = e^R.$$

Podobno sklepamo pri poljubnem času $T \in \mathbb{R}$, saj do takrat obrestujemo[1] $(k \cdot T)$-krat, npr. v $T = 2$ letih obrestujemo $2k$-krat. V limiti dobimo

$$A(0,T) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{R}{k}\right)^{k\cdot T} = e^{R\cdot T}.$$

V Zbirki nalog iz finančne matematike [6] je nominalna obrestna mera pri zveznem obrestovanju označena z Y in imenovana **moč obresti**.

Zgled 1.5. Pri banki smo se zadolžili za 1000 EUR pri nominalni obrestni meri 15 %. Izračunaj naš dolg čez 2 leti, če je obrestovanje:

a) obrestno s polletnim pripisom obresti;

b) obrestno s četrtletnim pripisom obresti;

c) zvezno obrestno.

Rešitev.

a) Glavnica je $G = 1000$ EUR, nominalna obrestna mera $R = 0{,}15$. Dveletni obrestovalni faktor je $A(0,2) = (1+\frac{R}{2})^4 = 1{,}075^4$, končni dolg pa $G \cdot A(0,2) = 1000 \cdot 1{,}075^4 = 1335{,}47$ EUR.

b) Obrestovalni faktor je $A(0,2) = (1+\frac{R}{4})^8 = 1{,}0375^8$, končni dolg pa $G \cdot A(0,2) = 1000 \cdot 1{,}0375^8 = 1342{,}47$ EUR.

c) Obrestovalni faktor je $A(0,2) = e^{R\cdot 2} = e^{0{,}3}$, končni dolg pa $G \cdot A(0,2) = 1000e^{0{,}3} = 1349{,}86$ EUR.

[1] Sklep je smiseln, če je T večkratnik dolžine obrestovalnega obdobja $\frac{1}{k}$. Pri zelo velikem k so ti večkratniki tako blizu skupaj, da lahko T obravnavamo kot realno število.

Zvezno obrestovanje z efektivno obrestno mero

Zvezno obrestovanje z dano **efektivno** obrestno mero R dobimo kot limito **konformnega** obrestovanja. Naj bo spet najprej $T = 1$ leto. Ustrezen obrestni faktor je

$$A(0,1) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1+R}^{\,k} = 1 + R.$$

Podobno sklepamo pri poljubnem času $T \in \mathbb{R}$ in dobimo

$$A(0,T) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1+R}^{\,k\cdot T} = (1+R)^T.$$

Zgled 1.6. Na banko smo položili 1000 EUR. Banka uporablja letno efektivno obrestno mero 20 %. Izračunaj višino privarčevanih sredstev pol leta in eno leto po pologu, če je obrestovanje:

a) obrestno s polletnim pripisom obresti;

b) obrestno s četrtletnim pripisom obresti;

c) zvezno obrestno.

Rešitev.

a) Glavnica je $G = 1000$ EUR, nominalna obrestna mera $R = 0{,}2$.

Polletni obrestovalni faktor je $A(0, \frac{1}{2}) = \sqrt{1+R} = \sqrt{1{,}2}$, obrestovani polog po pol leta pa $G \cdot A(0, \frac{1}{2}) = 1000\sqrt{1{,}2} = 1095{,}45$ EUR.

Letni obrestovalni faktor je $A(0,1) = \sqrt{1+R}^{\,2} = 1{,}2$, obrestovani polog po enem letu pa $G \cdot A(0,1) = 1000 \cdot 1{,}2 = 1200$ EUR.

b) Polletni obrestovalni faktor je $A(0, \frac{1}{2}) = \sqrt[4]{1+R}^{\,2} = \sqrt{1{,}2}$, letni pa $A(0,1) = \sqrt[4]{1+R}^{\,4} = 1{,}2$. Zneska sta enaka kot v nalogi **a)**.

c) Polletni obrestovalni faktor je $A(0, \frac{1}{2}) = (1+R)^{1/2} = \sqrt{1{,}2}$, letni pa $A(0,1) = (1+R)^1 = 1{,}2$. Zneska sta enaka kot v nalogi **a)**.

1.5 Neto sedanja vrednost

Obrestovalnih in diskontnih faktorjev ne uporabljamo samo pri računanju obresti pri depozitih ali kreditih. Uporabljamo jih tudi, ko želimo primerjati denarne tokove ob različnih časih. Na primer 100 EUR danes in 100 EUR čez eno leto nimata enake vrednosti. Če imamo 100 EUR danes, jih lahko naložimo na banko in bomo imeli čez eno leto poleg 100 EUR tudi pripadajoče obresti. Tako je danes 100 EUR vredno več kot 100 EUR čez eno leto. Tega se moramo zavedati, kadar **sprejemamo odločitve ali izbire**, ki prinašajo ali terjajo denarne tokove v različnih časovnih trenutkih.

Iz tega razloga vpeljemo pojem **neto sedanja vrednost** (NSV), ki nam pove, koliko so skupaj danes vredni znani denarni tokovi, povezani z izbrano odločitvijo. To pomeni, da moramo vse denarne tokove iz prihodnosti diskontirati na današnji trenutek. Pri tem sedanje vrednosti donosov prištevamo, sedanje vrednosti investicij pa odštevamo. **Kadar se odločamo med možnostmi z različnimi neto sedanjimi vrednostmi, izberemo tisto z višjo neto sedanjo vrednostjo.**

Zgled 1.7. Dedek je vnuku prvošolcu obljubil plačilo po 100 EUR ob koncu vsakega šolskega leta v naslednjih 9 letih. Prvo plačilo bo čez natanko eno leto. Kolikšna je neto sedanja vrednost vseh izplačil, če upoštevamo letno obrestno mero 5 % pri letnem obrestovanju?

Rešitev.

Letni obrestovalni faktor je 1,05, letni diskontni faktor pa $\frac{1}{1{,}05}$.

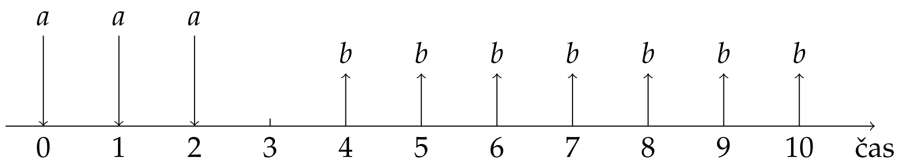
Vse prihodnje denarne tokove diskontiramo na čas 0.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NSV} &= \frac{100}{1{,}05} + \frac{100}{1{,}05^2} + \cdots + \frac{100}{1{,}05^8} + \frac{100}{1{,}05^9} = \\
&= \frac{100}{1{,}05^9} \cdot \left(1{,}05^8 + 1{,}05^7 + \cdots + 1{,}05 + 1\right) = \\
&= \frac{100}{1{,}05^9} \cdot \frac{1{,}05^9 - 1}{1{,}05 - 1} = \\
&= 710{,}78 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

Zgled 1.8. Gradbeno podjetje načrtuje nov gradbeni projekt in išče investitorje. V prvih treh letih bi investitorji morali na začetku vsakega leta plačati 1000 EUR, nato bi od vključno konca četrtega leta dalje 7-krat ob koncu vsakega leta prejeli 500 EUR. Ali se nam splača investirati v gradbeni projekt, če je letna obrestna mera 4 % in obrestovanje letno?

Rešitev.

Pripravimo shemo denarnih tokov. Posamezno investicijo označimo z $a = 1000$ EUR, posamezen donos pa z $b = 500$ EUR.



Letni obrestovalni faktor je $r = 1{,}04$, letni diskontni faktor pa $\frac{1}{r}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NSV} &= -a - \frac{a}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^4} + \frac{b}{r^5} + \cdots + \frac{b}{r^{10}} = \\
&= -\frac{a}{r^2}(r^2 + r + 1) + \frac{b}{r^{10}}(r^6 + r^5 + \cdots + r + 1) = \\
&= -\frac{a}{r^2}(r^2 + r + 1) + \frac{b}{r^{10}} \cdot \frac{r^7 - 1}{r - 1} = \\
&= -\frac{1000}{1{,}04^2}(1{,}04^2 + 1{,}04 + 1) + \frac{500}{1{,}04^{10}} \cdot \frac{1{,}04^7 - 1}{1{,}04 - 1} = \\
&= -218{,}19 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

Neto sedanja vrednost investicije je negativna, zato se nam investicija v gradbeno podjetje ne splača. Bolje je denar naložiti na banko.

1.6 Trenutne in terminske obrestne mere

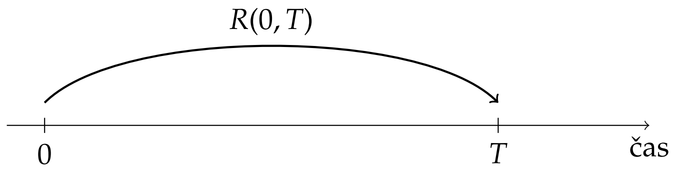
Doslej smo privzeli, da je obrestna mera $p\,\%$ ali R neodvisna od dospetja. V praksi to ni res. Banke nam za dolgoročne depozite ponujajo višje obrestne mere kot za kratkoročne. Z dolgoročnim varčevanjem torej prislužimo več obresti iz dveh razlogov: ker banka uporablja višjo obrestno mero in ker obrestovanje poteka dalj časa. Podobno je pri kreditih. **Praviloma so obrestne mere za daljša obdobja višje od obrestnih mer za krajša obdobja**, ni pa nujno.

V tem razdelku bomo pri vsaki obrestni meri R natančno določili, za kako dolgo obdobje velja. Obrestno mero $R(0,T)$ imenujemo **trenutna obrestna mera**. To je obrestna mera, ki je določena v času $t=0$ in velja za obdobje od 0 do T. Takšne so bile vse obrestne mere doslej, le da nismo posebej izpostavili dolžine obrestovalnega obdobja.

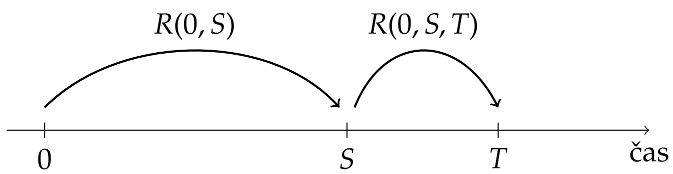
Poleg trenutnih obrestnih mer se lahko v času $t=0$ pogodimo tudi za obrestno mero za transakcijo, ki se bo začela v času S in končala v času T za $0<S<T$. To obrestno mero označimo z $R(0,S,T)$ in jo imenujemo **terminska obrestna mera**.

Višino terminske obrestne mere določimo s primerjavo dveh investicij:

- Pri prvi investiciji v času 0 na banko položimo 1 EUR in ga obrestujemo neprekinjeno do časa T po trenutni obrestni meri $R(0,T)$.



- Pri drugi investiciji najprej v času 0 na banko položimo 1 EUR in ga obrestujemo do časa S po trenutni obrestni meri $R(0,S)$. Nato obrestovani znesek **reinvestiramo** za obdobje od S do T po terminski obrestni meri $R(0,S,T)$.



Ker so vse obrestne mere določene v času 0, morata obe investiciji v času T prinesti enak obrestovani znesek. Temu rečemo **zakon ene cene**.

Terminske obrestne mere so definirane za vse vrste obrestovanj. Seveda pa skupaj lahko uporabljamo le trenutne in terminske obrestne mere pri istemu tipu obrestovanja.

Pri **navadnem obrestovanju** imamo

$$1+R(0,T)\cdot T=\Big(1+R(0,S)\cdot S\Big)\cdot\Big(1+R(0,S,T)\cdot(T-S)\Big),$$

oziroma

$$R(0,S,T)=\frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)\cdot T}{1+R(0,S)\cdot S}-1\right).$$

Če uporabljamo **letno obrestovanje**, mora veljati:

$$\left(1+R(0,T)\right)^T = \left(1+R(0,S)\right)^S \cdot \left(1+R(0,S,T)\right)^{T-S},$$

oziroma

$$R(0,S,T) = \left(\frac{\left(1+R(0,T)\right)^T}{\left(1+R(0,S)\right)^S}\right)^{\frac{1}{T-S}} - 1.$$

Pri tem je $S, T \in \mathbb{N}$.

Kadar uporabljamo **zvezno obrestovanje** in podamo **nominalne** obrestne mere, velja

$$e^{R(0,T)\cdot T} = e^{R(0,S)\cdot S} \cdot e^{R(0,S,T)\cdot(T-S)}.$$

Z logaritmiranjem najprej dobimo

$$R(0,T)\cdot T = R(0,S)\cdot S + R(0,S,T)\cdot(T-S),$$

nato pa še

$$R(0,S,T) = \frac{R(0,T)\cdot T - R(0,S)\cdot S}{T-S}.$$

Če pri zveznem obrestovanju namesto nominalne uporabljamo **efektivne** obrestne mere, velja

$$\left(1+R(0,T)\right)^T = \left(1+R(0,S)\right)^S \cdot \left(1+R(0,S,T)\right)^{T-S},$$

oziroma

$$R(0,S,T) = \left(\frac{\left(1+R(0,T)\right)^T}{\left(1+R(0,S)\right)^S}\right)^{\frac{1}{T-S}} - 1.$$

Formuli sta na videz enaki kot pri letnem obrestovanju, le da je tu $S, T \in \mathbb{R}$.

Z navedenimi formulami lahko izračunamo terminske obrestne mere iz trenutnih obrestnih mer ali obratno.

Zgled 1.9. Predpostavimo naslednje trenutne obrestne mere (m = mesec):

T	1 m	3 m	6 m	9 m
$R(0,T)$	3,00 %	3,20 %	3,30 %	3,50 %

Izračunajmo nekaj možnih terminskih obrestnih mer, če so v tabeli podane:

a) obrestne mere pri navadnem obrestovanju;

b) nominalne obrestne mere pri zveznem obrestovanju;

c) efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju.

Rešitev.

a) Čas merimo v letih. Iz tabele razberemo trenutne obrestne mere:

$$R(0, \tfrac{1}{12}) = 3{,}00\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{2}) = 3{,}30\,\%$$
$$R(0, \tfrac{1}{4}) = 3{,}20\,\% \qquad R(0, \tfrac{3}{4}) = 3{,}50\,\%$$

Po danih formulah izračunamo terminske obrestne mere:

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{4}) = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} \left(\frac{1 + R(0, \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4}}{1 + R(0, \frac{1}{12}) \cdot \frac{1}{12}} - 1 \right) = 6 \left(\frac{1 + 0{,}032 \cdot \frac{1}{4}}{1 + 0{,}03 \cdot \frac{1}{12}} - 1 \right) = 3{,}29\,\%$$

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}35\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}37\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) = 3{,}84\,\%$$

b)

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{4}) = \frac{R(0, \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4} - R(0, \frac{1}{12}) \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = 6(0{,}032 \cdot \tfrac{1}{4} - 0{,}03 \cdot \tfrac{1}{12}) = 3{,}30\,\%$$

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}36\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}40\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) = 3{,}90\,\%$$

Opomnimo, da so navedene točne vrednosti terminskih obrestnih mer.

c)

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{4}) = \left(\frac{\left(1 + R(0, \frac{1}{4})\right)^{1/4}}{\left(1 + R(0, \frac{1}{12})\right)^{1/12}} \right)^{\frac{1}{1/4 - 1/12}} - 1 = \left(\frac{(1 + 0{,}032)^{1/4}}{(1 + 0{,}03)^{1/12}} \right)^{6} - 1 = 3{,}30015\,\%$$

$$R(0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}36010\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = 3{,}40010\,\% \qquad R(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) = 3{,}90116\,\%$$

Če rezultate zaokrožimo na dve decimalni mesti, opazimo, da so vrednosti terminskih nominalnih in efektivnih obrestnih mer pri zveznem obrestovanju enake, dejansko pa se razlikujejo na nadaljnjih decimalkah. Razlike so majhne, ker gre za kratka obdobja in majhne razlike v višini obrestnih mer za različna dospetja.

Iz prakse vemo, da so obrestne mere odvisne ne le od dospetja, temveč tudi od vrste transakcije. Banke nam za kredite in dovoljeno negativno stanje na bančnem računu »ponujajo« višje obrestne mere kot za depozit ali pozitivno stanje na bančnem računu. Kljub temu v finančni matematiki privzamemo, da so **obrestne mere neodvisne od vrste transakcije, torej si po isti obrestni meri sposodimo ali investiramo**. To je res za transakcije, ko si denar med sabo posojajo velike banke in finančne institucije.

Za primer si poglejmo obrestno mero Euribor. Ta je izračunana kot povprečje obrestnih mer, po katerih bi si velike banke evrskega območja med sabo posojale denar (v evrih). Vsak delovnik določijo obrestne mere Euribor za različna dospetja. Spodnja preglednica prikazuje izbrane trenutne obrestne mere Euribor na prvi delovni dan v juliju izbranih let (m = mesec).

Datum	Dospetje 1 m	3 m	6 m	9 m	12 m
1. 7. 2008	4,448 %	4,955 %	5,145 %	5,273 %	5,418 %
2. 7. 2012	0,372 %	0,652 %	0,928 %	1,077 %	1,213 %
1. 7. 2016	−0,363 %	−0,290 %	−0,182 %	−0,119 %	−0,052 %

Vir: European Money Markets Institute [13].

Obrestne mere za daljša dospetja so višje od obrestnih mer za krajša dospetja. Obrestne mere so bile na začetku krize izjemno visoke, nato so močno padle in v letu 2015 večinoma postale negativne. Pri **negativni obrestni meri** je obrestovani znesek nižji od začetne glavnice. Do negativnih obrestnih mer lahko pride, ko si denar med seboj posojajo velike banke. Kasneje bomo videli, da si včasih po negativni obrestni meri denar lahko sposodi tudi država. Nekatere centralne banke so v želji, da bi spodbudile ekonomsko aktivnost, začele uporabljati negativne obrestne mere za depozite poslovnih bank, torej jim zaračuvajo nekakšno »ležarino«. To je povzročilo, da imajo sedaj tudi nekatere druge obrestne mere negativne vrednosti. Zaradi obrestnih pribitkov so končne obrestne mere, ki jih banke uporabljajo za poslovanje s svojimi komitenti, praviloma pozitivne.

Videli smo že, da se višina obrestnih mer s časom spreminja. To lahko investitorji izkoristijo za zaslužek, lahko pa jim prinese izgube, saj prihodnjih obrestnih mer ne poznamo. Preden si ogledamo primer, vpeljimo še oznako $R(t, S, T)$ za terminsko obrestno mero, za katero se dogovorimo v času t in jo uporabimo za investicije v obdobju od S do T, kjer je $t \le S < T$. Pri tem $R(S, S, T) = R(S, T)$ pomeni trenutno obrestno mero v času S, ki velja za obdobje od S do T.

Zgled 1.10. Danes poznamo naslednje dolarske (USD) nominalne obrestne mere pri zveznem obrestovanju:

T	1	2	3
$R(0,T)$	3,00 %	4,00 %	4,60 %

Terminski nominalni obresti sta enaki $R(0, 1, 2) = 5{,}00\,\%$ in $R(0, 2, 3) = 5{,}80\,\%$.

Privzemimo, da so obrestne mere za posojila enake tistim za depozite. Denimo, da si investitor sedaj izposodi 100.000 USD za eno leto in prejeti znesek investira za dve leti.

Čez eno leto bo moral vrniti $100.000e^{0,03} = 103.045{,}45$ USD. Ta znesek si takrat sposodi po takratni trenutni nominalni obrestni meri $R(1, 2)$ za eno leto in z njim takoj poplača dolg.

Ob koncu drugega leta potem investitor prejme obrestovani znesek $100.000e^{0,04\cdot 2} = 108.328{,}71$ USD iz investicije v času 0, poravnati pa mora dolg za drugo posojilo, skupaj z obrestmi.

- Če bo $R(1, 2) = 3{,}00\,\%$ (obrestne mere bodo ostale enake), potem bo imel investitor ob koncu drugega leta dobiček v znesku
$$108.328{,}71 - 106.183{,}65 = 2145{,}06 \text{ USD}.$$
- Če bo $R(1, 2) = 6{,}00\,\%$ (obrestne mere bodo močno narasle), potem bo imel investitor ob koncu drugega leta izgubo, saj
$$108.328{,}71 - 109.417{,}42 = -1088{,}71 \text{ USD}.$$

- Če bo $R(1, 2) = 5{,}00\,\%$, potem bo investitorju ob koncu drugega leta ostalo

  $$108.328{,}71 - 108.328{,}70 \doteq 0 \text{ USD}.$$

  Investicijska strategija ne bo prinesla dobička ali izgube[2], če se bo v prihodnosti obrestna mera ujemala z vnaprej izračunano terminsko obrestno mero.

Zgoraj opisan način investiranja je bil razlog za eno največjih znanih finančnih izgub v zgodovini; za bankrot okrožja Orange v Kaliforniji v ZDA. Tamkajšnji skrbnik zakladnice je v začetku 90-ih let prejšnjega stoletja nekaj let zaporedoma uspešno izkoriščal obrestne mere na trgu, ki se niso spreminjale; ob koncu prvega leta je veljalo približno $R(1, T + 1) \approx R(0, T)$ za vsa dospetja T in obrestne mere za daljša obdobja so bile višje od tistih za krajša. Ko so obestne mere leta 1994 hitro zrasle, je imela zakladnica velike izgube in prišlo je do bankrota okrožja Orange. Z 1,7 milijarde dolarjev izgube je to še danes ena izmed največjih znanih trgovalnih izgub v zgodovini [2, 14].

1.7 Naloge

Naloga 1.1. Na banko položimo 60.000 EUR. Letna obrestna mera znaša 8 %. Izračunaj obresti, ki jih zberemo do konca devetmesečnega obdobja, če je obrestovanje

a) relativno s trimesečno kapitalizacijo;

b) konformno s trimesečno kapitalizacijo.

Rešitve. a) 3672,48 EUR b) 3565,15 EUR

Naloga 1.2. Petkrat vložimo v banko vsak mesec po 100 EUR, prvič danes. Letna obrestna mera je 5 %, kapitalizacija mesečna in obrestovanje konformno.

a) Koliko znašajo prihranki takoj po zadnjem pologu?

b) Koliko znašajo prihranki eno leto po prvem pologu, če sredstev vmes nismo dvignili ali dodatno položili?

Rešitve. a) 504,09 EUR b) 520,76 EUR

Naloga 1.3. Želimo prejemati letno rento v znesku 500 EUR petkrat ob koncu leta, prvič čez 7 let.

a) Kolikšno glavnico moramo vložiti danes, če znaša letna obrestna mera 6 % in imamo letni pripis obresti?

b) Kolikšno pa, če je pripis obresti polleten po relativni obrestni meri?

Rešitve. a) 1484,78 EUR b) 1473,62 EUR

Naloga 1.4. Podjetnik bi moral plačati dolg v treh enakih zaporednih letnih obrokih po 7000 EUR, prvi obrok takoj. Namesto tega se je dogovoril za odlog plačila in plačilo v šestih enakih letnih obrokih, prvič čez eno leto.

[2] Dobljeni cent je posledica zaokroževanja zneskov v času 1 in 2.

a) Kolikšni bodo novi obroki, če upnik uporablja 5 % letno obrestno mero in leten pripis obresti?

b) Koliko znaša podjetnikov dolg?

Rešitve. a) 3943,48 EUR b) 20.015,87 EUR

Naloga 1.5. Na banki vežemo 1000 EUR za pol leta. Po pol leta je stanje na računu 1020 EUR.

a) Določi letno obrestno mero, če banka uporablja navadno obrestovanje.

b) Določi nominalno obrestno mero, če banka uporablja polletno oziroma mesečno obrestovanje.

c) Določi nominalno obrestno mero, če banka uporablja zvezno obrestovanje.

Rešitve. a) 4 % b) 4 % oz. 3,97 % c) 3,96 %

Naloga 1.6. Banka pri poslovanju s svojimi komitenti uporablja naslednje trenutne obrestne mere in letno obrestovanje:

t	1	2	3	4
$R(0,t)$	3,00 %	3,50 %	3,90 %	4,30 %

Podjetnik ve, da bo čez eno leto potreboval 30.000 EUR kredita, ki ga bo lahko povrnil v enkratnem znesku dve leti po najemu. Že danes bi si rad zagotovil prihodnjo obrestno mero in s tem ceno kredita.

a) Izračunaj terminsko obrestno mero $R(0,1,3)$ pri letnem obrestovanju. Rezultat v odstotnem zapisu zaokroži na štiri decimalke.

b) Banka podjetniku ne želi ponuditi vnaprej znane obrestne mere. Dokaži, da si podjetnik z ustrezno kombinacijo takojšnjega kredita in depozita vseeno lahko zagotovi vnaprej znano ceno kredita. Privzemi, da so obrestne mere za kredit in depozit enake.

c) Ceno kredita iz **b)** izrazi z obrestno mero pri letnem obrestovanju.

Rešitve. a) 4,3529 %
b) Danes si sposodi 29.126,21 EUR za tri leta in jih investira za eno leto.
Čez eno leto dvigne 30.000 EUR, čez tri leta vrne 32.668,61 EUR.
c) 4,3529 %

2 Obveznice

V tem poglavju bomo spoznali kuponske in brezkuponske obveznice. Oboje uvrščamo med dolžniške vrednostne papirje. Izdajajo jih predvsem države, banke in velika podjetja in si tako sposojajo denar, kupci obveznic pa s tem postanejo njihovi posojilodajalci.

2.1 Dolžniški vrednostni papirji

Količina dobrin, ki jih lahko za 100 EUR kupimo danes, je manjša od količine dobrin, ki smo jih lahko za 100 EUR kupili pred petimi leti. Rast cen dobrin imenujemo **inflacija**. Zamislimo si, da si danes sposodimo 100 EUR in posojilodajalcu obljubimo, da jih bomo z obrestmi vred vrnili čez eno leto. Če se bo letna obrestna mera ujemala z letno stopnjo inflacije, si bo posojilodajalec čez eno leto z našim vračilom lahko privoščil enako količino dobrin, kot če bi 100 EUR potrošil danes. Če pa bo obrestna mera presegala stopnjo inflacije, si bo zaradi obresti lahko čez eno leto privoščil več.

Dovolj visoka obrestna mera posojilodajalca motivira, da nam začasno posodi svoj denar. Ena najstarejših nalog bank je vloga posrednika v takšnem posojilu. Komitenti s presežkom denarja tega hranijo na banki v obliki **depozitov** in s tem ohranjajo njegovo kupno moč, prejeta sredstva pa lahko banka v vmesnem času v obliki **kredita** (posojila) posodi komitentom, ki jim trenutno denarja primanjkuje.

Na tak način si denar lahko sposojamo posamezniki in manjša podjetja. Pomembna lastnost naših kreditov je, da so njihove glavnice majhne v primerjavi s celotnim kapitalom, s katerim razpolaga banka. Denar pa si morajo sposojati tudi velika podjetja in države. Uradniki s finančnih ministrstev ne morejo oditi na banko in v imenu države zaprositi za večmilijardni kredit. Še težje bi takšen kredit dobili direktorji velikih podjetij. Podjetje lahko v neugodnih gospodarskih razmerah propade in dolga ne povrne, skupaj z njim pa bi propadla še banka, ki bi podjetju odobrila kredit.

Rešitev problema je razbitje posojila na veliko število manjših posojil, ki jih država ali podjetje sklene z različnimi posojilodajalci. Če si država želi sposoditi milijardo EUR, znesek razbije v milijon **apoenov** (apoen je zaokroženi znesek, na katerega se glasi vrednostni papir) po 1000 EUR in jih na **avkciji** (dražbi) proda velikemu številu kupcev.

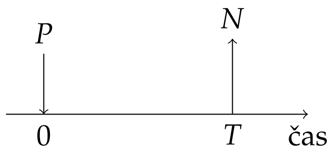
Apoen takšnega posojila je **obveznica** in je najenostavnejši **dolžniški vrednostni papir**. Kupci obveznic v resnici posodijo denar državi ali velikemu podjetju, obveznica pa je dokument, ki jim zagotavlja vračilo posojila. Pri tem je posojilo lahko povrnjeno v enkratnem znesku (brezkuponska obveznica) ob koncu kreditnega obdobja (dospetje obveznice), lahko pa je del posojila povrnjen že pred dospetjem v obliki kuponov (kuponske obveznice). Prvi lastniki obveznice kupijo na avkciji (**primarni trg**). Nekateri nato obveznice držijo do dospetja, drugi pa jih pred dospetjem prodajo na **sekundarnem trgu**. Z obveznicam se trguje na borzah in neborznih trgih.

2.2 Brezkuponske obveznice

Brezkuponska obveznica je najenostavnejši dolžniški vrednostni papir. Z njo se izdajatelj obveže, da nam bo na določen dan v prihodnosti (**dospetje** obveznice) izplačal **nominalno vrednost** obveznice, mi pa za nakup takšne obveze danes plačamo **ceno** ali **vrednost** obveznice.

Označimo trenutek avkcije oziroma izdaje obveznice s $t = 0$, takratno ceno obveznice s P, nominalno vrednost pa z N. Čas do dospetja merimo v letih, trenutek dospetja pa označimo s T. Ločimo kratkoročne obveznice z dospetjem do enega leta, srednjeročne z dospetjem med enim in petimi leti, ter dolgoročne obveznice z dospetjem nad petimi leti. Brezkuponske obveznice z dospetji daljšimi od enega leta so redke.

Spodnja slika prikazuje denarne tokove brezkuponske obveznice s stališča investitorja, ki obveznico kupi na avkciji in jo drži do dospetja. V času 0 zanjo plača ceno P, ob dospetju v času T pa prejme nominalno vrednost N.

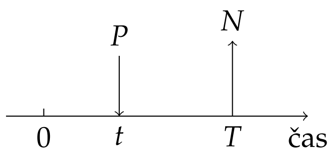


Denarna tokova povezujeta P in N diskontni in obrestovalni faktor $D(0, T)$ in $A(0, T)$,

$$P = N \cdot D(0, T),$$
$$N = P \cdot A(0, T).$$

Cena obveznice je ob izdaji enaka sedanji vrednosti njene nominalne vrednosti. Če je $P < N$ se obveznica prodaja pod nominalno vrednostjo in pravimo, da se prodaja z **diskontom** $N - P$. Če pa je $P > N$, se obveznica prodaja nad nominalno vrednostjo in pravimo, da se prodaja s **premijo** $P - N$.

Povsem enako sklepamo, če obveznico v času $t \in (0, T)$ kupimo na sekundarnem trgu. Ustrezne denarne tokov prikazuje spodnja slika.



Cena obveznice je v trenutku t še vedno enaka sedanji vrednosti njene nominalne vrednosti, le prodajalec je druga oseba, kot če bi obveznico kupili na avkciji. Velja

$$P = N \cdot D(t, T).$$

Če v enačbo vstavimo $t = 0$, dobimo že znano formulo. Čeprav smo ceno obveznice obakrat označili s P, ceni v splošnem nista enaki. **Ceno brezkuponske obveznice torej vselej določimo z diskontiranjem njenega prihodnjega denarnega toka.**

Namesto z diskontnim faktorjem lahko zvezo med ceno in nominalno vrednostjo obveznice izrazimo z obrestnimi merami. Pri tem skoraj vedno uporabljamo zvezno obrestovanje z efektivno[3] obrestno mero R. Ob izdaji tako zapišemo

$$P = \frac{N}{\left(1 + R(0, T)\right)^T} = N\left(1 + R(0, T)\right)^{-T},$$

[3] V Zbirki rešenih nalog iz finančne matematike [6] je uporabljeno zvezno obrestovanje z nominalno obrestno mero Y. Zaradi razlike v dogovoru so v Zbirki faktorji $\left(1 + R(0, T)\right)^T$ zamenjani z $e^{-Y(0,T) \cdot T}$.

kasneje pa

$$P = \frac{N}{\big(1 + R(t,T)\big)^{T-t}} = N\big(1 + R(t,T)\big)^{-(T-t)}.$$

Zgled 2.1. Dani sta naslednji efektivni obrestni meri z zveznim obrestovanjem:

T	0,5	1,0
$R(0,T)$	2,00 %	3,00 %

Brezkuponski obveznici imata nominalni vrednosti 100 EUR, prva ima dospetje čez pol leta, druga pa čez eno leto.

a) Določi ceni obveznic.

b) Kako in za koliko odstotkov se spremenita ceni obveznic, če se obrestni meri v hipu povišata za eno odstotno točko?

Rešitev.

a) Obveznici imata nominalni vrednosti $N = 100$ EUR. Prva ima dospetje $T_1 = \frac{1}{2}$ leta in zato ceno

$$P_1 = \frac{N}{\big(1 + R(0, \frac{1}{2})\big)^{1/2}} = \frac{100}{\sqrt{1 + 0{,}02}} = 99{,}01 \text{ EUR}.$$

Druga ima dospetje $T_2 = 1$ leto in ceno

$$P_2 = \frac{N}{1 + R(0,1)} = \frac{100}{1 + 0{,}03} = 97{,}09 \text{ EUR}.$$

b) Po hipni spremembi obrestnih mer cena prve obveznice znaša

$$\widetilde{P}_1 = \frac{100}{\sqrt{1 + 0{,}02 + 0{,}01}} = 98{,}53 \text{ EUR}.$$

Sprememba cene je $\Delta P_1 = \widetilde{P}_1 - P_1 = -0{,}48$ EUR oziroma

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = -\frac{0{,}48}{99{,}01} = -0{,}48\,\%.$$

Cena prve obveznice je padla za 0,48 %.

Podobno računamo za drugo obveznico.

$$\widetilde{P}_2 = 96{,}15 \text{ EUR} \qquad \Delta P_2 = -0{,}94 \text{ EUR} \qquad \frac{\Delta P_2}{P_2} = -0{,}97\,\%$$

Cena druge obveznice je padla za 0,97 %.

2.3 Zakladne menice Republike Slovenije

Zakladne menice Republike Slovenije so brezkuponske obveznice, ki jih izdaja Republika Slovenija. Njihovi apoeni imajo nominalno vrednost 1000 EUR, skupna nominalna vrednost izdaje pa se določi ob vsaki izdaji posebej; zneski so praviloma nizki.

Ministrstvo za finance na elektronskih avkcijah izdaja trimesečne, šestmesečne, dvanajstmesečne in osemnajstmesečne zakladne menice, predvideni datumi avkcij so objavljeni na začetku koledarskega leta. V prvi polovici leta 2016 so bile vse zakladne menice izdane s premijo, torej so investitorji ob nakupu plačali ceno, višjo od nominalne vrednosti, ki jo povrne država ob dospetju menice [18].

Oglejmo si izvleček obvestila, ki ga je Ministrstvo za finance objavilo po izdaji šestmesečne zakladne menice v začetku junija 2016 [20]:

> Rezultati avkcije zakladnih menic SZ89 (1. izdaja),
> ki je bila v torek, 7. 6. 2016.
>
> Na avkciji zakladnih menic z oznako SZ89 (1. izdaja) in ISIN kodo SI0002501581 je bilo preko primarnih vpisnikov podanih 68.000 lotov ponudb, od tega je Ministrstvo za finance sprejelo 4000 lotov ponudb v skupni vrednosti 4.000.000,00 EUR po enotni ceni 100,071 %. Na podlagi enotne cene, sprejete na avkciji, znaša nominalna letna obrestna mera za vpisane zakladne menice SZ89 (1. izdaja) −0,14 %.
>
> Obveznosti iz SZ89 (1. izdaja) bodo dospele dne 8. 12. 2016.

Izdana šestmesečna zakladna menica je 89. po vrsti, ISIN[4] koda je mednarodno identifikacijska številka tega vrednostnega papirja. Avkcija menic je potekala 7. 6. 2016. Ponudbe za nakup je lahko neposredno oddajalo šest slovenskih in ena tuja banka (primarni vpisniki), vsi ostali pa le preko primarnih vpisnikov [15].

Ponudniki so bili pripravljeni kupiti 68.000 apoenov v skupni vrednosti 68 milijonov EUR, a je Ministrstvo izdalo le 4000 apoenov s skupno nominalno vrednostjo štiri milijone EUR. Kupci, ki so oddali najboljše ponudbe, so apoene kupili po enotni ceni

$$P = 100,071\,\% \cdot 1000 = 1000{,}71 \text{ EUR},$$

plačilo cene je bilo izvedeno 9. 6. 2016. Nominalno vrednost $N = 1000$ EUR bo izplačana 8. 12. 2016, to je 182 dni po plačilu cene.

Pravila obrestovanja so pri zakladnih menicah zelo specifična in odstopajo od standarda, predstavljenega v prejšnjem razdelku. Obresti se izračunavajo z uporabo navadnega obrestnega računa, dekurzivnega načina obrestovanja in z upoštevanjem dejanskega števila dni do dospetja ter normiranih 360 dni v letu (**določilo A/360**) [16]. Dospetje opisane zakladne menice je torej $T = \frac{182}{360}$ leta.

Ceno in nominalno vrednost povezuje obrestna mera R preko enačbe $N = P(1 + R \cdot T)$, od koder dobimo

$$R = \frac{1}{T}\left(\frac{N}{P} - 1\right) = \frac{360}{182}\left(\frac{1000}{1000{,}71} - 1\right) = -0{,}14\,\%.$$

Trgovanje z zakladnimi menicami Republike Slovenije je možno na organiziranem trgu vrednostnih papirjev Ljubljanske borze (sekundarni trg).

[4] International Securities Identification Number.

2.4 Kuponske obveznice

Kuponska obveznica poleg izplačila nominalne vrednosti N ob dospetju T ponuja še izplačila **kuponov** pred in ob dospetju. Običajno so vsi kuponi enaki in njihovo višino označimo s C. Višina kuponov je določena ob izdaji in je v času življenja obveznice izdajatelj ne more spremeniti. Prav tako so ob izdaji obveznice znani trenutki izplačil kuponov, ki jim rečemo **kuponski datumi**.

Običajno ima ob izdaji kuponska obveznica do dospetja celo število let. Obveznice z letnimi kuponi izplačujejo kupone enkrat letno v enakih časovnih razmikih, prvič leto po izdaji, zadnjič pa ob dospetju skupaj z nominalno vrednostjo. Obveznice s polletnimi kuponi izplačujejo kupone vsakih šest mesecev, prvič pol leta po izdaji, zadnjič pa ob dospetju obveznice skupaj z nominalno vrednostjo. Obveznice z bolj pogostimi izplačili kuponov so redke, princip izplačevanja kuponov pa podoben.

Višino kupona C in nominalno vrednost obveznice N povezuje **kuponska obrestna mera** obveznice c. Označimo z Δ dolžino medkuponskega obdobja, merjeno v letih. Spoznali smo že, da je običajno $\Delta \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Tedaj velja

$$C = N \cdot \Delta \cdot c.$$

Zgled 2.2. Nariši shemo prihodnjih denarnih tokov triletne kuponske obveznice z nominalno vrednostjo 1000 EUR in kuponsko obrestno mero 4 %, če:

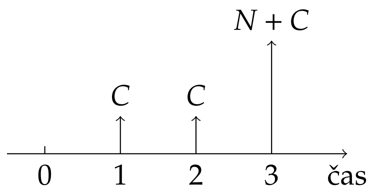
a) izplačuje letne kupone in bo prvi kupon izplačan čez eno leto;

b) izplačuje polletne kupone in bo prvi kupon izplačan čez pol leta.

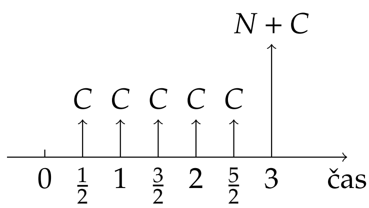
Rešitev.

a) Letni kuponi določajo $\Delta = 1$. Iz nominalne vrednosti $N = 1000$ EUR in kuponske obrestne mere $c = 4\,\%$ izračunamo $C = 1000 \cdot 1 \cdot 0{,}04 = 40$ EUR.

Prvi kupon bo izplačan leto po izdaji, drugi dve leti po izdaji, zadnji pa ob dospetju obveznice skupaj z nominalno vrednostjo.



b) Polletni kuponi določajo $\Delta = \frac{1}{2}$. Iz nominalne vrednosti $N = 1000$ EUR in kuponske obrestne mere $c = 4\,\%$ izračunamo $C = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}04 = 20$ EUR.



Zgled 2.3. Določi kuponske obrestne mere triletne kuponske obveznice z nominalno vrednostjo 1000 EUR, ki izplačuje polletne kupone, prvega čez pol leta. Prva dva kupona znašata 20 EUR, tretji in četrti 30 EUR, zadnja dva pa 50 EUR.

Rešitev.

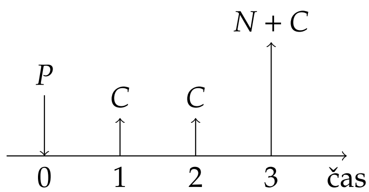
Zaradi polletnih kuponov imamo $\Delta = \frac{1}{2}$. Prvo leto kuponi znašajo $C_1 = 20$ EUR, kar ustreza kuponski obrestni meri

$$c_1 = \frac{C_1}{N \cdot \Delta} = \frac{20}{1000 \cdot \frac{1}{2}} = 4\,\%.$$

Drugo leto kuponi znašajo $C_2 = 30$ EUR, kar nam da $c_2 = 6\,\%$, tretje leto pa iz kuponov $C_3 = 50$ EUR dobimo $c_3 = 10\,\%$.

Kuponske obveznice so dolgoročni vrednostni papirji, največ jih ima od izdaje do dospetja deset let, večina še bolj dolgoročnih obveznic pa do 30 let. Slovenija je obveznico z najdaljšim dospetjem izdala v avgustu 2015 in ima dospetje v avgustu 2045 (30 let). V prvi polovici leta 2016 sta Irska in Belgija izdali evrski kuponski obveznici z dospetjem sto let [9, 10]. Prvo stoletno obveznico v evrih pa je izdala Mehika v letu 2015 [11].

Tudi kuponske obveznice izdajajo na avkcijah. Ceno kuponske obveznice ob izdaji v času 0 bomo označili P. Spodnja slika prikazuje denarne tokove triletne kuponske obveznice s stališča investitorja, ki jo kupi na avkciji in drži do dospetja. Privzemimo, da je nominalna obrestna mera obveznice $N = 1000$ EUR in da obveznica izplačuje letne kupone v višini $C = 50$ EUR.



Hitro opazimo podobnost med kuponskimi in brezkuponskimi obveznicami – slednje pa že znamo vrednotiti. Za izpeljavo cene kuponske obveznice moramo privzeti, da je na trgu možno kupiti poljubno (tudi necelo) število vrednostnih papirjev. Rečemo, da so vrednostni papirji **neskončno deljivi**. V praksi to sicer ni mogoče, vendar je pri velikih količinah zaokroževanje na celo število skoraj zanemarljivo.

Privzemimo, da na trgu obstajajo brezkuponske obveznice z dospetji čez eno, dve in tri leta. Privzemimo še, da imajo vse tri obveznice nominalno vrednost $N = 1000$ EUR. Vemo že, da njihove cene znašajo $1000 \cdot D(0,1)$, $1000 \cdot D(0,2)$ in $1000 \cdot D(0,3)$ EUR.

Ustvarimo **portfelj** (to je nabor vrednostnih papirjev) iz 0,05 brezkuponske obveznice z dospetjem čez eno leto, 0,05 brezkuponske obveznice z dospetjem čez dve leti in 1,05 brezkuponske obveznice z dospetjem čez tri leta. Takšen portfelj nam v času 1 izplača $0{,}05 \cdot 1000 = 50$ EUR, prav toliko v času 2, v času 3 pa dospejo še triletne brezkuponske obveznice in dobimo $1{,}05 \cdot 1000 = 1050$ EUR. Izplačila portfelja se ujemajo z izplačili kuponske obveznice, zato se mora tudi cena kuponske obveznice ujemati s ceno portfelja. Opisanemu principu rečemo **zakon ene cene**.

Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
P &= 0{,}05 \cdot 1000 \cdot D(0,1) + 0{,}05 \cdot 1000 \cdot D(0,2) + 1{,}05 \cdot 1000 \cdot D(0,3) = \\
&= 50 \cdot D(0,1) + 50 \cdot D(0,2) + 1050 \cdot D(0,3).
\end{aligned}
$$

Tudi ceno kuponske obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov. Tako smo utemeljili formulo za vrednotenje kuponskih obveznic. Ta v najsplošnejši obliki pravi, da ima kuponska obveznica z dospetjem T, nominalno vrednostjo N in kuponi $C_1, \ldots, C_n$, izplačanimi v trenutkih $0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ ob izdaji ceno

$$
P = C_1 \cdot D(0,t_1) + \cdots + C_{n-1} \cdot D(0,t_{n-1}) + (N + C_n) \cdot D(0,t_n). \tag{2.1}
$$

Tudi pri kuponskih obveznicah lahko diskontne faktorje nadomestimo z obrestnimi merami in spet običajno uporabljamo zvezno obrestovanje s podanimi efektivnimi obrestnimi merami. Pri tem moramo poznati trenutne obrestne mere do vsakega kuponskega datuma. Formula (2.1) postane

$$
P = \frac{C_1}{\big(1 + R(0,t_1)\big)^{t_1}} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{\big(1 + R(0,t_{n-1})\big)^{t_{n-1}}} + \frac{N + C_n}{\big(1 + R(0,t_n)\big)^{t_n}}. \tag{2.2}
$$

Ko z obveznico trgujejo na sekundarnem trgu, ima lahko do dospetja še necelo število let, čas do prvega kupona pa je krajši od medkuponskega obdobja. Ceno kuponske obveznice tudi tedaj dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov. **Že izplačani kuponi na vrednost obveznice ne vplivajo!**

Zgled 2.4. Dane so naslednje efektivne obrestne mere z zveznim obrestovanjem:

T	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0,T)$	1,50 %	2,00 %	2,40 %	2,70 %

Kuponski obveznici imata nominalni vrednosti 100 EUR, dospetji čez dve leti in izplačujeta kupone po 2 % kuponski obrestni meri.

a) Prva obveznica izplačuje letne kupone, prvega čez natanko eno leto. Določi njeno ceno.

b) Druga obveznica izplačuje polletne kupone, prvega čez natanko pol leta. Določi njeno ceno.

Rešitev.

a) Obveznica ima nominalno vrednost $N = 100$ EUR in izplačuje letne kupone v višini $C = 2$ EUR. Ceno obveznice določimo z diskontiranjem njenih prihodnjih denarnih tokov.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{C}{1 + R(0,1)} + \frac{N + C}{\big(1 + R(0,2)\big)^2} \\
&= \frac{2}{1 + 0{,}02} + \frac{102}{(1 + 0{,}027)^2} = 98{,}67 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

b) Polletni kuponi znašajo $C = 1$ EUR. Ceno obveznice določimo z diskontiranjem njenih prihodnjih denarnih tokov.

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{\left(1+R(0,\frac{1}{2})\right)^{1/2}} + \frac{C}{1+R(0,1)} + \frac{C}{\left(1+R(0,\frac{3}{2})\right)^{3/2}} + \frac{N+C}{\left(1+R(0,2)\right)^{2}} \\ &= \frac{1}{(1+0{,}015)^{1/2}} + \frac{1}{1+0{,}02} + \frac{1}{(1+0{,}024)^{3/2}} + \frac{101}{(1+0{,}027)^{2}} = 98{,}70 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Zgled 2.5. Dane so naslednje efektivne obrestne mere z zveznim obrestovanjem:

T	1	2	3
$R(0,T)$	1,60 %	1,80 %	2,00 %

Triletna kuponska obveznica ima nominalno vrednost 1000 EUR in izplačuje letne kupone, prvega čez natanko eno leto.

a) Določi ceno obveznice, če posamezen kupon znaša 25 EUR.

b) Kolikšna bi morala biti kuponska obrestna mera obveznice, bi bila cena obveznice danes enaka njeni nominalni vrednosti?

Dobljeni obrestni meri rečemo **paritetna donosnost** obveznice. Pomembna je za izdajatelja obveznice, saj mu ustrezna višina kuponov omogoča, da si z izdajo obveznice sposodi znesek, ki je čim bližje vsoti nominalnih vrednosti izdanih obveznic.

c) Leto in pol po izdaji obveznice sta znani obrestni meri

T	2	3
$R(\frac{3}{2},T)$	1,40 %	1,70 %

Določi vrednost kuponske obveznice iz naloge **a)**.

Rešitev.

a) Iz podatkov $N = 1000$ EUR, $T = 3$ leta in $C = 25$ EUR z diskontiranjem določimo ceno

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{1+R(0,1)} + \frac{C}{\left(1+R(0,2)\right)^{2}} + \frac{N+C}{\left(1+R(0,3)\right)^{3}} \\ &= \frac{25}{1+0{,}016} + \frac{25}{(1+0{,}018)^{2}} + \frac{1025}{(1+0{,}02)^{3}} = 1014{,}61 \text{ EUR} \end{aligned}$$

b) Za izračun paritetne donosnosti ohranimo dospetje, nominalno vrednost in kuponske datume ter najprej določimo višino kupona $\widetilde{C}$ tako, da bo cena obveznice enaka nominalni vrednosti N.

$$N = \frac{\widetilde{C}}{1+R(0,1)} + \frac{\widetilde{C}}{\left(1+R(0,2)\right)^{2}} + \frac{N+\widetilde{C}}{\left(1+R(0,3)\right)^{3}}$$

Preuredimo enačbo in izrazimo

$$\widetilde{C} = N \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+R(0,3))^3}}{\dfrac{1}{1+R(0,1)} + \dfrac{1}{(1+R(0,2))^2} + \dfrac{1}{(1+R(0,3))^3}}$$

$$= 1000 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{1{,}02^3}}{\dfrac{1}{1{,}016} + \dfrac{1}{1{,}018^2} + \dfrac{1}{1{,}02^3}} = 19{,}95 \text{ EUR}.$$

Paritetna donosnost obveznice je $\tilde{c} = 1{,}995\,\% \doteq 2\,\%$.

c) Tudi v času $t = \frac{3}{2}$ obveznico vrednotimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$P = \frac{C}{\sqrt{1 + R(\frac{3}{2}, 2)}} + \frac{N + C}{\left(1 + R(\frac{3}{2}, 3)\right)^{3/2}} = \frac{25}{\sqrt{1 + 0{,}014}} + \frac{1025}{(1 + 0{,}017)^{3/2}} = 1024{,}23 \text{ EUR}$$

2.5 Tveganost obveznic in donosnost do dospetja

Ob nakupu vrednostnega papirja tvegamo, da bo njegova vrednost v prihodnosti nižja od današnje cene, mi pa bomo s tem izgubili del vloženih sredstev. Možnost ustvarjanja izgube zaradi neugodnih gibanj na trgu, npr. neugodne spremembe cen, obrestnih mer ali menjalnih tečajev, imenujemo **tržno tveganje**. Pri obveznicah je še bolj pomembno **kreditno tveganje**. To pomeni, da izdajatelj vrednostnega papirja lahko propade, vrednostni papir pa postane ničvreden, saj izdajatelj preneha plačevati svoje obveznosti.

Državne obveznice uvrščamo med **manj tvegane vrednostne papirje**. Njihovi kupci z veliko verjetnostjo pričakujejo, da bodo države uspešno izplačevale kupone in nominalne vrednosti po vnaprej določenem koledarju. Obveznice, ki jih izdajajo podjetja, so bolj tvegane od državnih obveznic. Propad posameznega podjetja je veliko bolj verjeten od plačilne nesposobnosti države.

Če danes kupimo obveznico in jo držimo do dospetja, že danes natanko poznamo vsa njena prihodnja izplačila. Ta so v resnici neodvisna od razmer na trgu in edino tveganje, s katerim se soočamo, je kreditno tveganje – izdajatelj obveznice lahko propade, nominalna vrednost obveznice pa ne bo izplačana. Drugače je, če želimo obveznico prodati na sekundarnem trgu pred njenim dospetjem. V času prodaje bo njena cena odvisna od trenutnih obrestnih mer na trgu in je vnaprej ne poznamo. Poleg kreditnega se soočamo še s tržnim tveganjem.

Investitorji se na tveganost obveznic odzovejo s ceno, po kateri so obveznico pripravljeni kupiti: **večja kot je (kreditna) tveganost obveznice, nižjo ceno so pripravljeni plačati**. Ker pa je cena odvisna od višine kuponov, so cene različnih obveznic med sabo težko primerljive. Primerjava je lažja, če za vsako obveznico izračunamo **donosnost do dospetja**. To je konstantna efektivna obrestna mera R pri zveznem obrestovanju, pri kateri je sedanja vrednost prihodnjih denarnih tokov obveznice enaka trenutni tržni ceni obveznice. **Bolj tvegane obveznice imajo višjo donosnost do dospetja.**

Zgled 2.6. Dveletna kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1000 EUR in letnimi kuponi po 3 % kuponski obrestni meri bo prvi kupon izplačala čez natanko eno leto.

a) Določite njeno donosnost do dospetja, če danes obveznica stane 990 EUR.

b) Določite njeno donosnost do dospetja, če danes obveznica stane 950 EUR.

Rešitev.

a) Nominalna vrednost obveznice je $N = 1000$ EUR, kuponska obrestna mera $c = 3\,\%$ višina letnega kupona je $C = 30$ EUR, cena obveznice je $P = 990$ EUR.

S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P = C \cdot D(0,1) + (N + C) \cdot D(0,2).$$

Če uporabimo konstantno efektivno obrestno mero R pri zveznem obrestovanju[5] in dejanske denarne tokove, dobimo racionalno enačbo

$$990 = \frac{30}{1+R} + \frac{1030}{(1+R)^2}.$$

Vpeljemo novo neznanko $x = \dfrac{1}{1+R}$ in dobimo kvadratno enačbo

$$990 = 30x + 1030x^2$$

z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot 1030 \cdot 990}}{2 \cdot 1030}.$$

Približka sta $x_1 = 0{,}9659$ in $x_2 = -0{,}9951$. Smiselna je le rešitev x_1, iz nje dobimo $R = \dfrac{1}{x_1} - 1 = 3{,}53\,\%$. Donosnost do dospetja dveletne obveznice znaša 3,53 %.

b) Investitorji so za obveznico pripravljeni plačati le $P = 950$ EUR, torej se jim zdi obveznica bolj tvegana. Podobno kot prej določimo donosnost do dospetja 5,72 %.

Tveganost izdajateljev obveznic ocenjujejo bonitetne agencije. Najbolj znane bonitetne agencije so Standard & Poor's, Moody's in Fitch, bonitetne ocene pa se vrstijo od AAA (najmanj tvegan), AA, ... do D (neplačilo). Za indikator tveganosti posameznega izdajatelja obveznic lahko uporabljamo tudi donosnost do dospetja njegove desetletne kuponske obveznice.

2.6 Kuponske obveznice Republike Slovenije

Za izdajanje in poplačilo kuponskih obveznic Republike Slovenije skrbi Ministrstvo za finance, elektronske avkcije obveznic pa po njegovem naročilu izvedejo izbrane domače in predvsem tuje banke. Koledar izdaj in skupna nominalna vrednost izdaje sta odvisna od razmer na trgu.

Najbolj znanje bonitetne agencije Slovenijo ocenjujejo z naslednjimi bonitetnimi ocenami (stanje na 3. 7. 2016):

[5] Ker imamo samo letne denarne tokove, lahko govorimo tudi o letnem obrestovanju.

Bonitetna agencija	Bonitetna ocena
Standard & Poor's	A
Moody's	Baa3
Fitch Ratings	BBB+

Vir: Ministrstvo za finance [12].

Vse tri bonitetne agencije Slovenijo uvrščajo v srednji investicijski razred. Verjetnost, da Slovenija ne bi bila zmožna poplačati obveznic, je nizka.

V prvi polovici leta 2016 je bila na novo izdana le 16-letna kuponska obveznica z oznako RS77 in ISIN kodo SI0002103602, hkrati je v tem obdobju Slovenija povečala obseg izdaje te in še nekaterih drugih obstoječih obveznic. Oglejmo si izvleček obvestila, ki ga je Ministrstvo za finance objavilo po izdaji 16-letne obveznice konec februarja 2016 [17]:

Republika Slovenija:
Nova izdaja 16-letne referenčne obveznice v višini 1,5 milijarde EUR
Ljubljana, 25. februar 2016

Oznaka obveznice ISIN koda	RS77 SI0002103602
Skupna nominalna vrednost celotne izdaje	1.500.000.000 EUR
Datum določitve cene	25. 2. 2016
Datum poravnave	3. 3. 2016
Datum izplačila prvega kupona	3. 3. 2017
Datum dospetja	3. 3. 2032
Letna kuponska obrestna mera	2,250 %
Način izračuna obresti	Linearen
Način izplačila obresti	Letno, vsak 3. 3.
Cena ob izdaji	98,837 %
Donosnost do dospetja	2,338 %

Osnovna enota kuponske obveznice je apoen z nominalno vrednostjo $N = 1000$ EUR, država je za željeno zadolžitev izdala 1,5 milijona apoenov. Elektronska avkcija je potekala 25. 2. 2016, organiziralo jo je 5 tujih bank, ena slovenska in ena tuja banka pa sta imeli vlogo soorganizatork. Kupci so obveznice vplačali 3. 3. 2016, cena posameznega apoena je v povprečju znašala

$$P = 98{,}837\,\% \cdot 1000 = 988{,}37 \text{ EUR},$$

posamezen kupec pa je plačal ceno v skladu s svojo ponudbo (ministrstvo je izbralo najboljše ponudbe). Obveznica je bila prodana z diskontom.

Obveznica izplačuje letne kupone, prvega leto po izdaji (3. 3. 2017), zadnjega pa ob dospetju 16 let po izdaji (3. 3. 2032) skupaj z nominalno vrednostjo. Višina kuponov je

$$C = 2{,}250\,\% \cdot 1000 = 22{,}50 \text{ EUR}.$$

Iz znanih višin prihodnjih denarnih tokov in cene ob izdaji lahko izračunamo še donosnost do dospetja. Iz enačbe

$$P = \frac{C}{1+R} + \frac{C}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+R)^{15}} + \frac{N+C}{(1+R)^{16}}$$

z upoštevanjem podatkov in nove neznanke $x = \dfrac{1}{1+R}$ dobimo polinomsko enačbo

$$988{,}37 = 22{,}5x + 22{,}5x^2 + \cdots + 22{,}5x^{15} + 1022{,}5x^{16}.$$

Z uporabo računalnika (ali spletne aplikacije www.wolframalpha.com) dobimo samo eno smiselno realno rešitev $x = 0{,}977154$ in iz nje $R = \dfrac{1}{x} - 1 = 0{,}02338 = 2{,}338\,\%$. To je donosnost do dospetja.

V sporočilu za javnost še izvemo, da je več kot 100 investitorjev oddalo ponudbe v skupni višini 1,75 milijarde EUR. Ministrstvo torej ni sprejelo vseh ponudb in s tem iztržilo višjo povprečno ceno oziroma nižjo povprečno obrestno mero zadolževanja. V maju 2016 je Slovenija izdala še za 500 milijonov EUR istoimenske obveznice, zato jo danes obravnavamo kot obveznico s skupno nominalno vrednostjo 2 milijardi EUR.

Trgovanje z obveznicami Republike Slovenije je možno na Ljubljanski borzi, z nekaterimi pa tudi na trgovalnem sistemu MTS Slovenia [19].

2.7 Določanje časovne strukture obrestnih mer

Doslej smo pri vrednotenju obveznic privzeli, da poznamo efektivne obrestne mere $R(0,T)$ pri zveznem obrestovanju za poljubno dospetje T. Cene obveznic smo določili z diskontiranjem njihovih prihodnjih denarnih tokov po formuli (2.2). Funkcijo $T \to R(0,T)$ za vsa razpoložljiva dospetja imenujemo **časovna struktura trenutnih obrestnih mer**.

Cena brezkuponske obveznice z nominalno vrednostjo N in zapadlostjo T je enaka

$$P = N \cdot D(0,T) = \frac{N}{\big(1 + R(0,T)\big)^T}.$$

S poznavanjem nominalne vrednosti in cene obveznice na trgu lahko izračunamo

$$R(0,T) = \left(\frac{N}{P}\right)^{1/T} - 1.$$

Lahko se zgodi, da za nekatera dospetja brezkuponske obveznice niso na voljo, so pa na voljo kuponske obveznice z izplačili kuponov ob teh časih. Potem iz cen teh obveznic lahko z obratom formule (2.2) izračunamo vrednosti neznanih diskontnih faktorjev in s tem posredno tudi vrednosti neznanih obrestnih mer.

Vsak izdajatelj obveznic ima svojo časovno strukturo obrestnih mer, odvisna je od njegove bonitetne ocene. Obveznice najmanj tveganih izdajateljev nam določajo višine **netveganih obrestnih mer** v izbrani valuti. Netvegane obrestne mere za transakcije v evrih ocenjujemo s pomočjo podatkov o nemških obveznicah.

Zgled 2.7. Na trgu imamo tri obveznice istega izdajatelja, eno brezkuponsko in dve kuponski, vse z nominalnimi vrednostmi 100 EUR. Dospetje brezkuponske obveznice je šest mesecev in cena 98,20 EUR. Cena prve kuponske obveznice s polletnimi kuponi je 99,91 EUR, dospetje eno leto in kuponska obrestna mera 4 %. Druga kuponska obveznica ima polletne kupone s kuponsko obrestno mero 6 %, dospetje 18 mesecev in ceno 103,25 EUR. Določi časovno strukturo obrestnih mer $R(0,T)$ za $T \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$.

Rešitev.

Označimo diskontne faktorje

$$
\begin{aligned}
x = D(0, \tfrac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + R(0, \frac{1}{2})}}, \\
y = D(0, 1) &= \frac{1}{1 + R(0, 1)}, \\
z = D(0, \tfrac{3}{2}) &= \frac{1}{\left(1 + R(0, \frac{3}{2})\right)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Iz formule (2.2) za vrednotenje obveznic dobimo zveze med diskontnimi faktorji:

$$
\begin{aligned}
100x &= 98{,}20 \\
2x + 102y &= 99{,}91 \\
3x + 3y + 103z &= 103{,}25
\end{aligned}
$$

Dobljeni sistem enačb ima rešitev

$$
x = 0{,}9820, \qquad y = 0{,}9603, \qquad z = 0{,}9459.
$$

Iskane vrednosti za obrestne mere so

$$
R(0, \tfrac{1}{2}) = 3{,}70\,\%, \qquad R(0, 1) = 4{,}14\,\%, \qquad R(0, \tfrac{3}{2}) = 3{,}78\,\%.
$$

2.8 Naloge

Naloga 2.1. Podjetje je pravkar izdalo 1000 dveletnih brezkuponskih obveznic z nominalnimi vrednostmi 1000 EUR. Za posamezno obveznico se je izoblikovala cena 950 EUR.

a) Določi efektivno obrestno mero $R(0, 2)$ pri zveznem obrestovanju.

b) Eno leto po izdaji je znana obrestna mera $R(1, 2) = 3\,\%$. Določi vrednost posamezne brezkuponske obveznice.

c) Dve leti po izdaji je $R(2, 4) = 3{,}15\,\%$. Podjetje želi stare obveznice poplačati z izdajo novih dveletnih obveznic, ki imajo prav tako nominalno vrednost 1000 EUR. Koliko novih obveznic naj podjetje izda, da bo z njimi zbralo dovolj denarja za poplačilo zapadlih obveznosti?

Rešitve. a) 2,60 % b) 970,87 EUR c) vsaj 1064

Naloga 2.2. Korporacija je pravkar izdala dve obveznici z nominalnima vrednostma 100 EUR. Prva obveznica je brezkuponska, ima dospetje čez eno leto in stane 98,62 EUR. Druga obveznica je kuponska z dospetjem čez dve leti in letnimi kuponi po 3 % kuponski obrestni meri. Njena cena je 101,57 EUR, naslednji kupon bo izplačan čez natanko eno leto.

a) Izračunaj efektivni obrestni meri $R(0, 1)$ in $R(0, 2)$ pri zveznem obrestovanju.

b) Korporacija bi rada izdala še tretjo obveznico z nominalno vrednostjo 100 EUR, letnimi kuponi in dveletnim dospetjem. Kolikšen kupon naj izplačuje, da bo ob izdaji naprodaj po nominalni vrednosti?

c) Določi donosnosti do dospetja vseh treh obveznic.

Rešitve. a) 1,40 % in 2,20 % b) 2,19 EUR c) 1,40 %, 2,19 % in 2,19 %

3 Terminski posli

V tem poglavju bomo spoznali terminske posle, ki spadajo med najenostavnejše **izvedene finančne instrumente** – to so vrednostni papirji, katerih izplačilo ter posledično tudi vrednost je odvisno od vrednosti drugih osnovnih finančnih instrumentov. Da bomo lažje razumeli njihovo uporabnost, bomo poglavje začeli z opisom različnih tveganj, s katerimi se srečujejo investitorji, podjetja, pa tudi posamezniki.

3.1 Tveganja na finančnih trgih

Zamislimo si, da upravljamo manjšo rafinerijo. Vodimo torej obrat, v katerem iz surove nafte proizvajamo različne naftne derivate, npr. motorni bencin, dizelsko gorivo, kurilno olje, ... Lastnih naftnih vrtin nimamo, zato surovo nafto kupujemo na svetovnem trgu, končne proizvode pa prodajamo zlasti v evropske države. Med izzivi, ki nas čakajo v prihodnosti, je tudi posodobitev dela proizvodne verige, saj je naša trenutna tehnologija v tem delu zastarela in neučinkovita.

Poskusimo našteti nekaj dejavnikov (tveganj), ki vplivajo na uspešnost poslovanja naše rafinerije. Ob vsakem tveganju bomo navedli, kako ga lahko zmanjšamo ali vsaj ublažimo s pomočjo izvedenih finančnih instrumentov.

- Ker nimamo lastnih naftnih vrtin, našo temeljno surovino kupujemo na svetovnem trgu. Cena, ki jo za nafto plačujemo, se oblikuje na borzi surovin na osnovi trenutne ponudbe in povpraševanja. Cena nafte je zelo spremenljiva, dvig cene v prihodnosti pa lahko močno zviša surovinske stroške rafinerije. Prihodnje cene nafte na borzi ne moremo napovedati. Lahko pa se s pogodbo dogovorimo, po kakšni ceni bomo nafto kupili mi. Takšni pogodbi rečemo **blagovni terminski posel**.
- Cena nafte na svetovnem trgu je določena v ameriških dolarjih (USD), zato bo tudi cena, ki si jo s pogodbo zagotovimo mi, najverjetneje zapisana v USD. Ker pa rafinerija posluje v Evropi, večino prihodkov od prodaje ustvari v evrih. Valuti povezuje **menjalni tečaj**, ki nam določa vrednost (ceno) enega dolarja, izraženo v evrih. Če vrednost dolarja naraste, bo naša rafinerija za nafto namenila čedalje večji del svojih evrskih prihodkov. Tudi menjalnega tečaja ne moremo napovedati, lahko pa se s pogodbo dogovorimo, po kakšni ceni (menjalnem tečaju) bomo dolarje kupili mi. Takšni pogodbi rečemo **valutni terminski posel**.
- Ostane nam še posodobitev dela proizvodne verige. Načrtujemo, da bomo iz tekočih sredstev financirali podroben načrt, za samo posodobitev pa bomo na banki najeli kredit, ki ga bomo povrnili s povišanimi prihodki zaradi bolj učinkovite proizvodnje. Obrestne mere se spreminjajo in lahko se zgodi, da nam bo banka v trenutku, ko bomo dejansko potrebovali kredit, ponudila visoko obrestno mero. Visoke obresti lahko povsem izničijo finančne učinke bolj učinkovite proizvodnje. Tudi obrestnih mer ne moremo napovedati, lahko pa se že danes z banko dogovorimo, po kakšni obrestni meri nam bo dala kredit v prihodnosti. Rečemo, da smo sklenili **dogovor o terminski obrestni meri**.

Blagovni in valutni terminski posel ter dogovor o terminski obrestni meri so trije primeri izvedenih finančnih instrumentov, ki jih skupaj imenujemo **terminski posli**. Njihova značilnost je, da že danes določimo ceno (menjalni tečaj, obrestno mero), po kateri **bomo**

v prihodnosti kupili ali prodali osnovno premoženje (surova nafta, tuja valuta, kredit). Določena cena je obvezujoča za obe stranki v terminskem poslu, spoštovati jo morata povsem neodvisno od takratne tržne cene osnovnega premoženja.

Običajno terminske posle sklepamo z bankami ali drugimi velikimi finančnimi institucijami, z nekatermi pa se trguje na borzah. Tako banke kot borze opravljajo vlogo posrednika med agenti s komplementarnimi željami. Za razliko od nas si v podjetju, ki upravlja naftne vrtine, želijo zagotoviti ceno, po kateri bodo v prihodnosti načrpano nafto prodali. Če se kot upravljalci rafinerije bojimo rasti cene nafte in s tem rasti stroškov, se upravljalec vrtin boji padca cene nafte in s tem padca prihodkov od prodaje. S sklenitvijo terminskega posla obe strani zmanjšata negotovost svojih prihodnjih denarnih tokov.

Obravnavo terminskih poslov bomo začeli s terminskim poslom na delnico ali na kak drug vrednostni papir. Takšen posel je med vsemi najenostavnejši.

3.2 Delnica

Delnica je trajni vrednostni papir, ki predstavlja lastništvo dela podjetja (**lastniški vrednostni papir**). Poznamo navadne (redne) in prednostne (ugodnostne) delnice. **Navadne delnice** svojim imetnikom dajejo pravico do soupravljanja podjetja preko glasovanj na skupščini delničarjev ter s pomočjo izvoljenih članov nadzornega sveta. Delničarji so prav tako upravičeni do izplačila dela dobička podjetja v obliki denarnih dividend ter do morebitnega poplačila v primeru stečaja podjetja in posledičnega propada delnic.

Prednostne delnice ponujajo še dodatne ugodnosti, saj so njihovi imetniki upravičeni do izplačil prej kot ostali delničarji. V primeru stečaja namreč velja, da so do izplačila najprej upravičeni upniki ter lastniki dolžniških vrednostnih papirjev (obveznic), nato imetniki prednostnih delnic in šele nato lastniki navadnih delnic. Za slednje je torej najbolj verjetno, da ostanejo brez poplačila. V primeru finančnih težav delničarji niso dolžni pokriti izgub podjetja.

Največ delnic je izdanih v okviru **prvih javnih prodaj**, na katerih vlagatelji delnice kupujejo neposredno od izdajatelja. S takšno prodajo podjetje pridobi nove (so)lastnike, prejeta kupnina pa podjetju omogoča širitev in razvoj. Ko so delnice izdane, se z njimi trguje na organiziranih sekundarnih trgih (borzah), njihova **tržna cena** se določa na osnovi ponudbe in povpraševanja. V praksi obstajajo manjše razlike med ponujenimi nakupnimi in prodajnimi cenami delnic. Kljub temu v finančni matematiki privzamemo, da je **cena delnice ena sama in po njej lahku kupimo ali prodamo poljubno število delnic.**

Tržna cena delnice je tesno povezana z uspešnostjo podjetja in gospodarskimi razmerami v okolju, v katerem podjetje posluje. Cene delnic velikih podjetij, ki poslujejo v gospodarsko stabilnih okoljih in stabilnih dejavnostih, so običajno manj **volatilne** (manj nihajo), cene delnice manjših in mlajših podjetij pa so bolj volatilne. **Cene delnice v prihodnosti ni mogoče z gotovostjo napovedati.**

Dividenda je razdelitev dobička podjetja med delničarje. Pri tem lahko podjetje razdeli celoten dobiček, lahko pa le del. Razmerje med višino dividende in tržno ceno delnice je **dividendna donosnost** delnice. Delnice, ki redno izplačujejo dividende, ustvarjajo reden donos, a pogosto nimajo velikega potenciala rasti, saj cena delnice v trenutku izplačila dividend upade za približno toliko, kot je bila višina dividende. Predvsem mlajša in hitro rastoča podjetja pogosto sploh ne izplačujejo dividend, ampak dobiček porabijo za širitev in razvoj, s čimer pa rastejo tudi vrednosti njihovih delnic.

3.3 Terminski posel na delnico ali vrednostni papir

Spoznali smo, da prihodnje cene delnice ni mogoče natančno napovedati. Kljub temu na finančnih trgih obstajajo institucije (enostavno jim bomo rekli kar banke), ki nam omogočajo nakup ali prodajo delnice v prihodnosti po danes dogovorjeni ceni. Ta se bo v trenutku transakcije razlikovala od tržne cene, a bo za obe stranki zavezujoča.

Terminski posel na delnico je dogovor med dvema strankama, po katerem bo na določen dan v prihodnosti (**ročnost** terminskega posla T) ena stranka drugi prodala izbrano delnico (**osnovno premoženje**) po vnaprej določeni **izročitveni ceni** K. Stranki, ki bo v prihodnosti delnico kupila, rečemo **kupec terminskega posla** ali imetnik dolge pozicije v terminskem poslu. Nasprotno stranki, ki bo v prihodnosti delnico prodala, rečemo **prodajalec terminskega posla** ali imetnik kratke pozicije v poslu.

Zgled 3.1. Privzemimo, da bomo čez en mesec želeli kupiti ali prodati eno delnico. Vemo, da je delnica danes vredna $S_0 = 25$ EUR, ter da je enomesečna efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju enaka $R(0, \frac{1}{12}) = 2\,\%$. Delnica ne izpačuje dividend. Privzemimo še, da ob sklenitvi terminskega posla ni denarnih tokov – sklenitev posla je brezplačna. Oglejmo si, kako naj banka določi ponujeno izročitveno ceno K.

- Predpostavimo, da banka omogoča nakup ali prodajo delnice čez en mesec po ceni $K = 30$ EUR. Potem si danes na banki za en mesec sposodimo 25 EUR in kupimo delnico. Neto denarni tok opravljenih transakcij je enak 0. Hkrati se z banko dogovorimo, da bomo delnico po ceni K prodali (prodamo terminski posel). Čez en mesec prodamo delnico po dogovorjeni ceni $K = 30$ EUR in banki povrnemo kredit, ki z obrestmi znaša $25(1 + 0{,}02)^{1/12} = 25{,}04$ EUR. Razlika v višini 4,96 EUR nam ostane.

  Takšni strategiji rečemo **arbitražna strategija**, saj nam brez začetne investicije prinese pozitiven in netvegan denarni tok v prihodnosti. Če bi namesto o eni govorili o 1000 delnicah, bi bil netvegan zalužek kar 1000-krat višji. Očitno cena $K = 30$ EUR ni sprejemljiva in tudi na trgu se ne bi obdržala, saj bi jo zaradi velikega interesa investitorjev banka znižala.

- Kaj pa, če banka omogoča nakup ali prodajo delnice čez en mesec za $K = 20$ EUR? Potem delnico danes kratko prodamo (pomen kratke prodaje bo opisan takoj po zgledu) in prejeto kupnino v višini 25 EUR shranimo na banki. Denarna tokova transakcij se izničita, hkrati pa se še dogovorimo, da bomo delnico po ceni K kupili (kupimo terminski posel). Čez en mesec z banke dvignemo 25,04 EUR, kupimo delnico po dogovorjeni ceni $K = 20$ EUR in z njo zapremo kratko prodajo. Ostane nam razlika v višini 5,04 EUR, ki je zopet arbitražni zaslužek. Tudi cena 20 EUR ni primerna.

Zgled kaže, da bo cena, ki ne vodi do arbitraže, nekje med 20 in 30 EUR. V nadaljevanju bomo pokazali, da je poštena cena natanko $K = 25(1 + 0{,}02)^{1/12} = 25{,}04$ EUR.

V zgledu smo omenili **kratko prodajo** vrednostnega papirja, npr. delnice. To pomeni, da prodamo delnico, ki je v resnici nimamo; naš borzni posrednik torej po našem naročilu proda delnico iz svojega portfelja ali pa delnico iz portfelja kakšne druge stranke.

Vsak investitor, ki trguje z izvedenimi finančnimi instrumenti, mora na trgovalnem računu zagotavljati **vzdrževalno kritje**, iz katerega se lahko sproti pokrivajo ustvarjene izgube. Vzdrževalno kritje lahko sestavljajo denarni pologi, obveznice ali likvidne in manj tvegane delnice. Z vrednostnimi papirji, ki služijo kot vzdrževalno kritje, investitor nič več prosto ne razpolaga, čeprav so del njegovega portfelja. Te papirje lahko borzni posrednik po naročilu druge stranke celo proda. Takšna kratka prodaja je časovno omejena; prodane vrednostne papirje je treba prej ali slej kupiti in povrniti v portfelj druge stranke. Kratka prodaja je torej možna le pri nekaterih vrednostnih papirjih[6].

V splošnem dokažimo formulo za izročitveno ceno v terminskem poslu. Pri tem dodajmo še podatek, da bo delnica pred ročnostjo izplačala znano dividendo. Zaradi enostavnosti privzemimo, da je netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju R enaka za vsa dospetja.

Naj bo trenutna ($t = 0$) cena delnice enaka S_0 in ročnost terminskega posla T. Privzemimo, da bo delnica v trenutku $t' \in [0, T]$ izplačala dividendo v višini d. Na trgu je možno brezplačno skleniti terminski posel za nakup ali prodajo delnice v trenutku T po izročitveni ceni K. Na trgu ni možna arbitraža, če velja

$$\begin{aligned} K &= \Big(S_0 - I(0,T)\Big)(1+R)^T = \Big(S_0 - d(1+R)^{-t'}\Big)(1+R)^T = \\ &= S_0(1+R)^T - d(1+R)^{T-t'}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tu smo najprej z $I(0, T)$ označili sedanjo vrednost dividende in nato izraz poenostavili.

Enakost (3.1) lahko dokažemo tako, da pokažemo, da je pri kateri koli drugi ceni K na trgu možna arbitraža. Temu rečemo **dokaz s konstrukcijo arbitraže**.

Privzemimo, da na trgu velja

$$K > \Big(S_0 - d(1+R)^{-t'}\Big)(1+R)^T.$$

Po množenju z diskontnim faktorjem $(1 + R)^{-T}$ dobimo

$$\begin{aligned} K(1+R)^{-T} &> S_0 - d(1+R)^{-t'}, \\ K(1+R)^{-T} - S_0 + d(1+R)^{-t'} &> 0. \end{aligned}$$

Zadnja enačba vključuje denarne tokove v času 0 in nam pomaga pripraviti arbitražno strategijo – pripravimo strategijo, ki nam izplača takšen denarni tok.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Sposodimo si znesek $K(1 + R)^{-T}$ do časa T,
  - kupimo delnico,
  - prodamo terminski posel z izročitveno ceno K in ročnostjo T (ob ročnosti bomo prodali delnico, ki smo jo pravkar kupili),
  - sposodimo si znesek $d(1 + R)^{-t'}$ do časa t'.

  Neto denarni tok znaša $+K(1 + R)^{-T} - S_0 + 0 + d(1 + R)^{-t'} > 0$.

[6] Pri vrednostnih papirjih, pri katerih kratka prodaja ni možna, v splošnem ne moremo izvesti arbitraže iz druge točke zgleda 3.1. Tam lahko arbitražni zaslužek ustvarijo le agenti, ki že imajo delnico v svojm portfelju. Ti delnico v času 0 prodajo, nato pa ob ročnosti posla ponovno kupijo in povrnejo svoj portfelj v prvotno stanje.

- Čas $t = t'$ (izplačilo dividende).
  - Prejmemo dividendo d,
  - vrnemo znesek $d(1+R)^{-t'}$ z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok znaša $+d - d(1+R)^{-t'}(1+R)^{t'} = 0$.

- Čas $t = T$ (ročnost terminskega posla).
  - V skladu s terminskim poslom prodamo delnico po izročitveni ceni K,
  - vrnemo znesek $K(1+R)^{-T}$ z nastalimi obresmi.

  Neto denarni tok znaša $+K - K(1+R)^{-T}(1+R)^{T} = 0$.

Opisana strategija prinese netvegan zaslužek v času 0, nadaljnji denarni tokovi pa so vsi enaki 0. To je arbitraža.

Privzemimo še, da na trgu velja

$$K < \left(S_0 - d(1+R)^{-t'}\right)(1+R)^{T}.$$

Po množenju z diskontnim faktorjem $(1+R)^{-T}$ dobimo

$$K(1+R)^{-T} < S_0 - d(1+R)^{-t'},$$
$$S_0 - d(1+R)^{-t'} - K(1+R)^{-T} > 0.$$

Pripravimo strategijo, ki nam izplača denarni tok zadnje enačbe.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kratko prodamo delnico,
  - kupimo terminski posel z izročitveno ceno K in ročnostjo T (ob ročnosti bomo kupili delnico in zaprli kratko prodajo),
  - investiramo znesek $d(1+R)^{-t'}$ do časa t',
  - investiramo znesek $K(1+R)^{-T}$ do časa T.

  Neto denarni tok znaša $+S_0 - 0 - d(1+R)^{-t'} - K(1+R)^{-T} > 0$.

- Čas $t = t'$ (izplačilo dividende).
  - Dvignemo znesek $d(1+R)^{-t'}$ z nastalimi obrestmi,
  - izplačamo[7] dividendo d.

  Neto denarni tok znaša $+d - d = 0$.

- Čas $t = T$ (ročnost terminskega posla).
  - Dvignemo znesek $K(1+R)^{-T}$ z nastalimi obresmi,

[7] V času 0 smo delnico kratko prodali, kratko prodajo bomo zaprli v trenutku T. Vmes delnica izplača dividendo, ki pripada lastnikom delnic. Ker je borzni posrednik prodal delnico, ki formalno pripada drugi stranki, moramo tej stranki znesek dividende izplačati mi.

  - v skladu s terminskim poslom kupimo delnico po izročitveni ceni K in zapremo kratko prodajo.

  Neto denarni tok znaša $+K - K = 0$.

Opisana strategija prinese netvegan zaslužek v času 0, nadaljnji denarni tokovi pa so vsi enaki 0. To je arbitraža.

Opazimo, da se v dokazu predstavljeni arbitraži razlikujeta od arbitraž v zgledu 3.1; tam smo imeli neto denarni tok 0 v času 0 in netvegan zaslužek ob ročnosti. Če na trgu obstaja arbitraža, je arbitražnih strategij lahko več. Strategija ostane arbitražna, če vse količine v portfelju pomnožimo z istim pozitivnim številom.

Oglejmo si še en dokaz formule (3.1), to je **dokaz z zakonom ene cene**. Priravili bomo dve strategiji z enakimi prihodnjimi denarnimi tokovi. Po zakonu ene cene morata imeti enako ceno v času 0.

Prva strategija vključuje:

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kupimo delnico,
  - sposodimo si znesek $d(1 + R)^{-t'}$ do časa t'.

  Neto denarni tok znaša $U_0 = -S_0 + d(1 + R)^{-t'}$.
- Čas $t = t'$ (izplačilo dividende).
  - Prejmemo dividendo d,
  - vrnemo znesek $d(1 + R)^{-t'}$ z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok znaša $U_{t'} = +d - d = 0$.
- Čas $t = T$ (ročnost terminskega posla).
  - Prodamo delnico po tržni ceni.

  Neto denarni tok znaša $U_T = +S_T$.

  V vseh ostalih trenutkih ni transakcij in ni denarnih tokov.

Druga strategija vključuje:

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kupimo terminski posel z izročitveno ceno K in ročnostjo T (ob ročnosti bomo kupili delnico),
  - investiramo znesek $K(1 + R)^{-T}$ do časa T.

  Neto denarni tok znaša $V_0 = -0 - K(1 + R)^{-T}$.
- Čas $t = T$ (ročnost terminskega posla).
  - Dvignemo znesek $K(1 + R)^{-T}$ z nastalimi obresmi,

– v skladu s terminskim poslom kupi delnico po izročitveni ceni K,

– prodamo delnico po tržni ceni.

Neto denarni tok znaša $V_T = +K - K + S_T = S_T$.

V vseh ostalih trenutkih ni transakcij in ni denarnih tokov. Ker druga strategija ne vključuje delnice, trenutek izplačil dividend ni pomemben.

Opazimo, da imata strategiji U in V identične denarne tokove v obdobju $(0, T]$, zato po zakonu ene cene velja še $U_0 = V_0$. To pomeni

$$-S_0 + d(1+R)^{-t'} = -0 - K(1+R)^{-T}$$

oziroma

$$K = \left(S_0 - d(1+R)^{-t'}\right)(1+R)^T.$$

Dokaz z zakonom ene cene je krajši, dokaz s konstrukcijo arbitraže pa nam še pove, kako ustvarimo netvegan zaslužek, kadar cena na trgu odstopa od prave cene. Dokaz z zakonom ene cene vedno vsebuje dve strategiji, od katerih običajno le ena vključuje izvedeni finančni instrument. V drugi strategiji enake denarne tokove ustvarimo zgolj z osnovnimi instrumenti in ji rečemo **izvedbena strategija** izvedenega instrumenta.

Zgled 3.2. Danes je delnica podjetja vredna 30 EUR, efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju pa je 6 % za vsa dospetja. Banka je pripravljena brezplačno kupiti ali prodati terminski posel na delnico z ročnostjo čez pol leta.

a) Kolikšno izročitveno ceno mora banka zapisati v poslu, da na trgu ne bo možna arbitraža?

b) V podjetju so se pravkar odločili, da bo delnica izplačala dividendo v višini 1 EUR čez tri mesece. Kako to vpliva na izročitveno ceno v terminskem poslu?

c) Banka se ni odzvala na informacijo o dividendi in ohranila izročitveno ceno iz **a)**. Dokaži, da je s tem na trgu možna arbitraža. Pripravi arbitražno strategijo.

Rešitev.

a) Cena delnice je $S_0 = 30$ EUR, obrestna mera je $R = 0{,}06$, ročnost posla pa $T = \frac{1}{2}$ leta. Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$K = S_0(1+R)^T = 30(1+0{,}06)^{1/2} = 30{,}89 \text{ EUR}.$$

b) Dividenda $d = 1$ EUR bo izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{4}$ leta. Nova izročitvena cena je

$$\widetilde{K} = S_0(1+R)^T - d(1+R)^{T-t'} = 30(1+0{,}06)^{1/2} - 1(1+0{,}06)^{1/4} = 29{,}87 \text{ EUR}.$$

c) Banka ponuja previsoko izročitveno ceno K, zato danes kupimo delnico in prodamo terminski posel. S transakcijami na bančnem računu poskrbimo, da je neto denarni tok v vsakem trenutku nenegativen.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kupimo delnico,
  - banki prodamo terminski posel z izročitveno ceno $K = 30{,}89$ EUR,
  - sposodimo si znesek $K(1 + R)^{-T} = 30{,}89(1 + 0{,}06)^{-1/2} = 30$ EUR do časa T.

  Neto denarni tok znaša $-30 + 0 + 30 = 0$.
- Čas $t = t'$ (izplačilo dividende).
  - Prejmemo dividendo.

  Neto denarni tok znaša 1 EUR.
- Čas $t = T$ (ročnost terminskega posla).
  - Prodamo delnico v skladu s terminskim poslom.
  - vrnemo znesek 30 EUR z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok znaša $+30{,}89 - 30(1 + 0{,}06)^{1/2} = 0$.

Tokrat smo arbitražno strategijo pripravili tako, da smo netvegani dobiček ustvarili v trenutku dividend. To ni presenetljivo, saj je ravno dividenda razlog, da banka ponuja terminske posle z napačno izročitveno ceno.

Izročitveno ceno v terminskem poslu smo določili tako, da je sklenitev posla (nakup ali prodaja) brezplačna. Ob sklenitvi v času 0 ima torej posel vrednost 0. Če **vrednost terminskega** posla v treutku t označimo z V_t, smo pravkar utemeljili, da je $V_0 = 0$.

Določimo še njegovo vrednost v času $t \in (0, T]$. Dogovorimo se, da z V_t označimo vrednost posla **za njegovega kupca oziroma imetnika dolge pozicije**; torej tistega, ki bo v prihodnosti v skladu s terminskim poslom osnovno premoženje kupil. Vrednost za prodajalca posla oziroma imetnika kratke pozicije je $-V_t$. Vrednost je odvisna od cene osnovnega premoženja v istem trenutku, ki jo označimo s S_t.

Račun je najlažji ob ročnosti. Terminski posel določa, da po ceni K kupimo nekaj, kar na trgu stane S_T. Vrednost posla je torej razlika $V_T = S_T - K$. Ob ročnosti lahko vrednost posla »izplačamo« na dva načina. Prvi način je **fizična poravnava**, ki pomeni, da od prodajalca posla dejansko prejmemo enoto osnovnega premoženja in zanjo plačamo izročitveno ceno K. Drugi način je **denarna poravnava**, ki pa pomeni, da nam prodajalec posla izplača (terja, če je negativen) znesek v višini $V_T = S_T - K$.

Poravnavi sta matematično ekvivalentni, saj po fizični poravnavi lahko enoto osnovnega premoženja takoj prodamo na trgu po ceni S_T in nam ostane (jo izgubimo, če je negativna) še razlika $S_T - K$. Po denarni poravnavi pa lahko na trgu kupimo osnovno premoženje po ceni S_T. Ko plačani tržni ceni dodamo še poravnalni znesek, dobimo netirano plačilo $-S_T + S_T - K = -K$ za enoto osnovnega premoženja.

Ostane še čas t med izdajo in ročnostjo posla. Privzemimo, da se časovna struktura obrestnih mer vmes ni spremenila; efektivna obrestna mera je še vedno R za vsa dospetja. Če bi tedaj sklenili (kupili ali prodali) terminski posel na enoto osnovnega premoženja z ročnostjo T, bi vanj zapisali ceno

$$F_t = \Big(S_t - I(t, T)\Big)(1 + R)^{T-t},$$

kjer smo z $I(t, T)$ označili sedanjo vrednost vseh dividend, ki bodo izplačane v obdobju med časoma t in T. Ceni F_t rečemo **terminska cena** in je hipotetična izročitvena cena, ki bi jo zapisali v posel enakih karakteristik, kot je naš, če bi ga sklenili v trenutku t. Očitno je $F_0 = K$ in $F_T = S_T$.

Oglejmo si izplačila naslednje strategije:

- Čas t (trenutek vrednotenja starega posla).
  - Kupimo terminski posel z izročitveno ceno K (posel je bil ustvarjen v času 0),
  - prodamo nov terminski posel z izročitveno ceno F_t.

  Neto denarni tok znaša $-V_t+0$, saj za prvi posel plačamo njegovo vrednost, sklenitev drugega pa je brezplačna.
- Čas T (ročnost obeh terminskih poslov).
  - V skladu s prvim terminskim poslom kupimo enoto osnovnega premoženja po izročitveni ceni K,
  - v skladu z drugim terminskim poslom prodamo enoto osnovnega premoženja po izročitveni ceni F_t.

  Neto denarni tok je $-K+F_t$, osnovnega premoženja pa po obeh transakcijah nimamo. V vmesnem obdobju ni transakcij ali denarnih tokov, saj strategija v tem obdobju ne vključuje osnovnega premoženja.

Opazimo, da je višina izplačila $-K + F_t$ ob ročnosti poslov znana že v času t. Gre torej za deterministično izplačilo, kot npr. pri brezkuponskih obveznicah. Cena, ki jo v času t zanj plačamo, mora biti enaka sedanji vrednosti prihodnjega izplačila. Velja torej

$$V_t = (-K + F_t)(1 + R)^{-(T-t)},$$

oziroma

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}. \tag{3.2}$$

Tu smo uporabili poenostavljeni dokaz na osnovi zakona ene cene, saj druge strategije (brezkuponska obveznica) niti nismo izpisali. V posebnem pri $t = 0$ dobimo $V_0 = 0$, saj je $F_0 = K$, in ob ročnosti $V_T = S_T - K$, saj je $F_T = S_T$. Če delnica ne izplačuje dividend, lahko formulo (3.2) poenostavimo v

$$V_t = \Big(S_t(1 + R)^{T-t} - K\Big)(1 + R)^{-(T-t)} = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}.$$

Zgled 3.3. Cena delnice danes znaša 15 EUR in bo čez pol leta izplačala dividendo v višini 1 EUR na delnico. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 4 % za vsa dospetja. V nalogi obravnavamo terminski posel za nakup ene delnice z izročitveno ceno K in enoletno ročnostjo.

a) Določi ceno K tako, da na trgu ne bo možna arbitraža.

b) Tri mesece kasneje je cena delnice 16 EUR, obrestna mera vztraja pri 4 % za vsa dospetja. Določi vrednost terminskega posla.

c) Devet mesecev po sklenitvi posla (to je tri mesece pred ročnostjo posla) je cena delnice 16,50 EUR, obrestna mera pa je padla na 3 % za vsa dospetja. Določi vrednost terminskega posla.

d) Z grafom prikaži vrednost termnskega posla ob ročnosti v odvisnosti od takratne cene delnice S_T.

Rešitev.

a) Cena delnice je $S_0 = 15$ EUR, obrestna mera je $R = 0{,}04$, ročnost posla pa $T = 1$ leto. Dividenda $d = 1$ EUR bo izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{2}$ leta. Arbitraže ni pri

$$K = 15(1 + 0{,}04) - 1(1 + 0{,}04)^{1/2} = 14{,}58 \text{ EUR}.$$

b) V času $t = \frac{1}{4}$ je $S_{1/4} = 16$ EUR. Ker dividenda še ni bila izplačana, je $I(\frac{1}{4}, 1)$ sedanja vrednost dividende, torej

$$I(\tfrac{1}{4}, 1) = d(1 + R)^{-(t'-t)} = 1(1 + 0{,}04)^{-1/4} = 0{,}99 \text{ EUR}.$$

Če bi posel sklenili v času $\frac{1}{4}$, bi vanj zapisali terminsko (izročitveno) ceno

$$F_{1/4} = \left(S_{1/4} - I(\tfrac{1}{4}, 1)\right)(1 + R)^{1-1/4} = (16 - 0{,}99)(1 + 0{,}04)^{3/4} = 15{,}46 \text{ EUR}.$$

Stari posel je za imetnika dolge pozicije (kupca) vreden

$$V_{1/4} = (F_{1/4} - K)(1 + R)^{-(1-1/4)} = (15{,}46 - 14{,}58)(1 + 0{,}04)^{-3/4} = 0{,}85 \text{ EUR}.$$

Isti posel je za imetnika kratke pozicije (prodajalca) vreden $-0{,}85$ EUR.

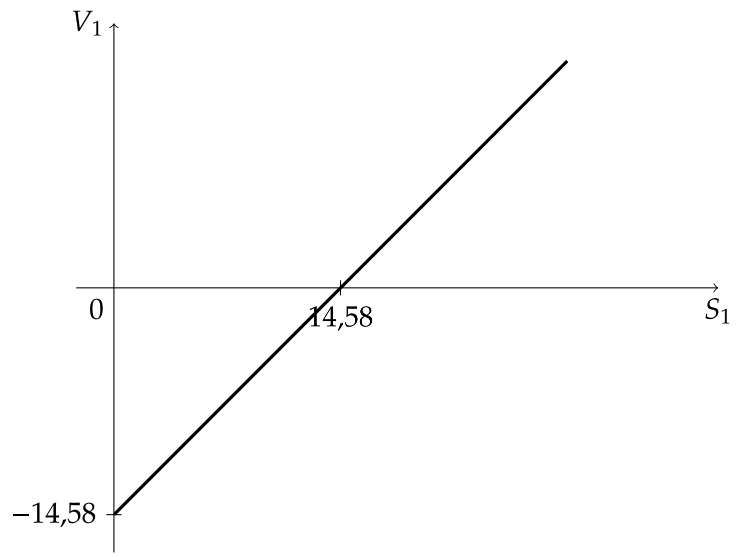
c) V času $t = \frac{3}{4}$ je $S_{3/4} = 16{,}50$ EUR. Ker je bila dividenda že izplačana, je $I(\frac{3}{4}, 1) = 0$. Nova obrestna mera znaša $\widetilde{R} = 0{,}03$. V nov posel bi zapisali terminsko ceno

$$F_{3/4} = S_{3/4}(1 + \widetilde{R})^{1-3/4} = 16{,}5(1 + 0{,}03)^{1/4} = 16{,}62 \text{ EUR}.$$

Stari posel je za imetnika dolge pozicije vreden

$$V_{3/4} = (16{,}62 - 14{,}58)(1 + 0{,}03)^{-1/4} = 2{,}02 \text{ EUR}.$$

d) Vrednost posla ob zapadlosti za imetnika dolge pozicije znaša $V_T = S_T - K$, torej $V_1 = S_1 - 14{,}58$.



3.4 Blagovni terminski posli

Blagovni terminski posli se običajno nanašajo na

- energente: nafta, zemeljski plin, premog, elektrika, ...
- plemenite kovine in materiale: zlato, srebro, platina, paladij, baker, aluminij, ...
- kmetijske pridelke: koruza, soja, pšenica, meso, mleko, ...
- ...

S stališča vrednotenja se blago razlikuje od vrednostnega papirja, zlati ker:

- so vrednostni papirji večinoma **nematerializirani** (lastništvo je zabeleženo v elektronskih evidencah), prinašajo donose v obliki dividend, njihova hramba na trgovalnem računu pa ne prinaša stroškov;
- blago nastopa v materialni obliki in ne prinaša denarnih donosov, njegova hramba pa povzroča redne stroške (**skladiščnine**).

Blagovne terminske posle obravnavamo enako kot terminske posle na vrednostne papirje, le da **strošek skladiščenja obravnavamo kot dividendo z negativnim predznakom**.

V praksi se pojavita še dodatni razliki, ki pa jih v naši analizi ne bomo upoštevali:

- možnosti kratke prodaje blaga so omejene;
- lastniki blaga običajno ne skladiščijo za **investicijske namene** (ustvarjanje dobička s trgovanjem), ampak ker ga potrebujejo za potrošnjo. Najbolj znano investicijsko blago so plemenite kovine; te so po lastnostih še najbližje vrednostnim papirjem.

Pri blagovnih terminskih poslih je pomembna tudi natančna specifikacija osnovnega premoženja in tržne cene, na kateri lahko temelji poravnava. Tako moramo npr. pri koruzi določiti željeni odtenek rumene barve, dovoljen odstotek vlažnosti, dovoljen delež zdrobljenih semen, dovoljeno količino tujkov med semeni, ..., za tržno ceno pa lahko izberemo katerega izmed indeksov, ki jih določajo blagovne borze. Blagovni terminski posel pogosto zapremo z denarno poravnavo, osnovno premoženje pa kupimo od običajnega dobavitelja po tržni ceni. Obe transakciji skupaj nam zagotavljata vnaprej zagotovljeno izročitveno ceno, hkrati pa se izognemo nepotrebnim logističnim stroškom.

Zgled 3.4. Trojska unča zlata (to je 31,10 grama) danes stane 1300 EUR, efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju pa je 2 % za vsa dospetja. Privzemi, da je za varno hrambo unče zlata potrebno vsak mesec plačati 2 EUR in da se stroški skladiščenja plačujejo vnaprej. Kupiti želimo blagovni terminski posel za unčo zlata z ročnostjo čez tri mesece.

a) Kolikšna mora biti izročitvena cena K v blagovnem terminskem poslu, da na trgu ne bo arbitraže?

b) Z banko se dogovorimo za izročitveno ceno $\widetilde{K} = 1300$ EUR (torej današnjo ceno). Vrednost posla zato ob sklenitvi ni enaka 0. Koliko moramo banki ob sklenitvi plačati?

Rešitev.

a) Današnja cena unče zlata je $S_0 = 1300$ EUR, obrestna mera $R = 0{,}02$, ročnost posla $T = \frac{1}{4}$ leta. Skladiščnine v višini $d = 2$ EUR plačamo v trenutkih $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{12}$ in $t_3 = \frac{2}{12}$ leta.

Sedanja vrednost skladiščnin je

$$I(0,T) = d(1+R)^{-t_1} + d(1+R)^{-t_2} + d(1+R)^{-t_3},$$
$$I(0,\tfrac{1}{4}) = 2(1+0{,}02)^{-0} + 2(1+0{,}02)^{-1/12} + 2(1+0{,}02)^{-2/12} = 5{,}99 \text{ EUR}.$$

Izročitvena cena mora biti

$$K = \big(S_0 + I(0,T)\big)(1+R)^T = (1300 + 5{,}99)(1+0{,}02)^{1/4} = 1312{,}47 \text{ EUR}.$$

b) Z nakupom brezplačnega terminskega posla bi si zagotovili nakup zlata po 1312,47 EUR, mi pa bi unčo zlata kupili za $\widetilde{K} = 1300$ EUR, torej ceneje; za to ugodnost moramo ob sklenitvi posla plačati.

Zamislimo si, da v času 0 vrednotimo posel z izročitveno ceno $\widetilde{K}$, ki je bil sklenjen v preteklosti. Vzamemo $F_0 = K$ in dobimo

$$V_0 = (1312{,}47 - 1300)(1+0{,}02)^{-1/4} = 12{,}41 \text{ EUR}.$$

3.5 Valutni terminski posel

Tujo valuto lahko obravnavamo kot vrednostni papir, **menjalni tečaj** pa kot njeno trenutno ceno oziroma vrednost, izraženo v domači valuti. Za domačo valuto bomo običajno vzeli evro, čeprav s stališča finančne matematike to ni potrebno. Privzeli bomo, da je **dani menjalni tečaj hkrati nakupni in prodajni**, čeprav se v praksi tečaja razlikujeta.

Evropska centralna banka (ECB) vsak delovnik na podlagi dejanskih menjav na trgu izračuna referenčne menjalne tečaje med evrom in drugimi valutami. Tečajnico za 1. 7. 2016 prikazuje spodnja preglednica. Tečaji so v obliki[8] 1 enota tuje valute = x EUR.

Valuta	Oznaka	x EUR	Valuta	Oznaka	x EUR
britanski funt	GBP	1,1929	hrvaška kuna	HRK	0,1329
švicarski frank	CHF	0,9229	ruski rubelj	RUB	0,0140
ameriški dolar	USD	0,8981	madžarski forint	HUF	0,0032

Ameriški dolar je torej »vrednostni papir«, ki je evrih vreden 0,8981 EUR. Pišemo

$$1 \text{ USD} = 0{,}8981 \text{ EUR},$$

v splošnem pa za tujo (f) in domačo (d) valuto velja

$$1\, f = S_t\, d,$$

kjer je S_t menjalni tečaj v trenutku t.

[8]Pozor, ECB (in Banka Slovenije) objavlja obrnjene tečaje, torej 1 EUR = y enot tuje valute; torej $x = \frac{1}{y}$.

Glavna razlika med klasičnim vrednostnim papirjem, npr. delnico, in tujo valuto je:

- če danes kupimo delnico in jo hranimo na trgovalnem računu, bomo kadar koli v prihodnosti še vedno imeli eno delnico, vmes pa morda prejmemo še denarno dividendo;
- če danes kupimo eno enoto tuje valute in jo hranimo na bančnem računu, se ta obrestuje in v prihodnosti razpolagamo z več kot eno enoto tuje valute. **Tuja valuta torej prinaša obresti**.

Valutni terminski posel je pogodba, s katero se stranki dogovorita za nakup ali prodajo določenega zneska (**nominalna vsota** N) tuje valute na točno določen dan v prihodnosti (**ročnost** posla T) po vnaprej določenem **terminskem menjalnem tečaju** K. Če današnji menjalni tečaj znaša $1\ f = S_0\ d$, si s terminskim poslom v prihodnosti zagotovimo tečaj $1\ f = K\ d$. Stranka, ki bo v prihodnost tujo valuto kupila, je kupec valutnega terminskega posla ali imetnik dolge pozicije, stranka, ki bo tujo valuto prodala, pa prodajalec terminskega posla ali imetnik kratke pozicije[9].

Poglejmo si, kako določimo terminski menjalni tečaj, ki na trgu ne povzroči arbitraže. Naj bo domača valuta EUR, tuja valuta pa USD. Poleg današnjega menjalnega tečaja 1 USD = S_0 EUR poznamo še evrsko in dolarsko efektivno obrestno mero R_{EUR} in R_{USD} pri zveznem obrestovanju, ki veljata za poljubno dospetje.

Oglejmo si dve strategiji, ki nas pripeljeta do enega dolarja v trenutku T:

Pri prvi strategiji ustrezno število dolarjev kupimo takoj.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kupimo $(1 + R_{\text{USD}})^{-T}$ USD po trenutnem menjalnem tečaju S_0,
  - investiramo kupljene dolarje do časa T (po dolarski obrestni meri).

  Evrski denarni tok te transakcije je $-S_0(1 + R_{\text{USD}})^{-T}$.
- Čas $t = T$ (ročnost posla).
  - Dvignemo $(1 + R_{\text{USD}})^{-T}$ USD z nastalimi obrestmi.

  Tako v času T dobimo natanko 1 USD.

V drugi strategiji dolarje kupimo ob ročnosti terminskega posla, danes pa investiramo zadostno število evrov.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Sklenemo (kupimo) valutni terminski posel za nakup enega dolarja po terminskem menjalnem tečaju K.
  - investiramo $K(1 + R_{\text{EUR}})^{-T}$ EUR do časa T (po evrski obrestni meri).

  Evrski denarni tok te transakcije je $-0 - K(1 + R_{\text{EUR}})^{-T}$.

[9] Takšno opredelitev potrebujemo, da bomo lahko jasno definirali vrednost valutnega terminskega posla. Naša razvrstitev valut na domačo in tuje ter posledično kratko in dolgo pozicijo seveda ne vpliva na pogled nasprotne stranke v poslu. Pojma »tuj« in »domač« v sklenjeni pogodbi ne nastopata.

- Čas $t = T$ (ročnost posla).
  - Dvignemo $K(1 + R_{\text{EUR}})^{-T}$ EUR z nastalimi obrestmi,
  - Kupimo dolar v skladu z valutnim terminskim poslom.

  Tako v času T dobimo natanko 1 USD.

Ker se morata po zakonu ene cene ujemati tudi evrska denarna tokova v času 0, dobimo

$$
\begin{aligned}
-S_0(1 + R_{\text{USD}})^{-T} &= -0 - K(1 + R_{\text{EUR}})^{-T}, \\
S_0(1 + R_{\text{USD}})^{-T} &= K(1 + R_{\text{EUR}})^{-T}
\end{aligned}
$$

oziroma

$$K = S_0(1 + R_{\text{USD}})^{-T}(1 + R_{\text{EUR}})^{T} = S_0 \cdot \frac{(1 + R_{\text{EUR}})^T}{(1 + R_{\text{USD}})^T}.$$

V splošnem zapišemo

$$K = S_0 \cdot \frac{(1 + R_d)^T}{(1 + R_f)^T}. \tag{3.3}$$

Formulo (3.3) imenujemo **pariteta obrestnih mer**.

Zgled 3.5. Banka ponuja skenitev valutnega terminskega posla med evrom in britanskim funtom z ročnostjo čez pol leta in terminskim menjalnim tečajem 1 GBP = 1,1800 EUR.

a) Določi efektivno obrestno mero z zveznim obrestovanjem v funtih, če veš, da evrska obrestna mera znaša 0,55 %, trenutni menjalni tečaj pa 1 GBP = 1,1850 EUR.

b) Kolikšna mora biti nominalna vsota (v funtih) valutnega posla, če želimo z njim ob ročnosti prodati 10.000 EUR?

Rešitev.

a) Izberemo evro za domačo valuto in funt za tujo. Današnji menjalni tečaj $1\ f = S_0\ d$ nam da $S_0 = 1{,}185$, terminski pa $K = 1{,}18$. Evrsko obrestno mero označimo z R_{EUR}.

Iz enačbe

$$K = S_0 \cdot \frac{(1 + R_{\text{EUR}})^T}{(1 + R_{\text{GBP}})^T}$$

izrazimo

$$R_{\text{GBP}} = \left(\frac{S_0}{K}\right)^{1/T}(1 + R_{\text{EUR}}) - 1 = \left(\frac{1{,}185}{1{,}18}\right)^2(1 + 0{,}0055) - 1 = 1{,}40\,\%.$$

b) Ob ročnosti v skladu s poslom velja 1 GBP = 1,1800 EUR, zato je nominalna vsota posla $N = \dfrac{10.000}{1{,}18} = 8474{,}58$ GBP.

Vrednost valutnega terminskega posla določimo podobno kot vrednost terminskega posla na vrednostni papir. Naj bo V_t vrednost posla za kupca oziroma imetnika dolge pozicije (ta bo tujo valuto v prihodnosti kupil).

Če bi posel enakih karakteristik sklenili v času $0 \leq t \leq T$, bi vanj zapisali terminski menjalni tečaj

$$F_t = S_t \cdot \frac{(1 + R_d)^{(T-t)}}{(1 + R_f)^{(T-t)}}.$$

Jasno je $F_0 = K$ in $F_T = S_T$, vrednost takšnega novega posla v trenutku t pa je 0.

Ker imetnik starega posla tujo valuto kupi po K in ne F_t, je njegova pozicija v domači valuti vredna

$$\begin{aligned} V_t &= N(F_t - K)(1 + R_d)^{-(T-t)} = \\ &= N\Big(S_t \cdot \frac{(1 + R_d)^{(T-t)}}{(1 + R_f)^{(T-t)}} - K\Big)(1 + R_d)^{-(T-t)} = \\ &= N\Big(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)}\Big). \end{aligned}$$

Zgled 3.6. Efektivni obrestni meri pri zveznem obrestovanju za bančni račun v evrih in švicarskih frankih znašata $R_{\mathrm{EUR}} = 1{,}35\,\%$ in $R_{\mathrm{CHF}} = 0{,}85\,\%$. Trenutni menjalni tečaj znaša 1 CHF = 0,9215 EUR.

a) Določi terminski menjalni tečaj v brezplačnem valutem terminskem poslu z ročnostjo čez leto in pol in nominalno vsoto 1000 CHF.

b) Banka ponuja sklenitev posla s terminskim tečajem 1 CHF = 0,9200 EUR. Dokaži, da je na trgu možna arbitraža, in pripravi arbitražno strategijo.

c) Leto po sklenitvi je menjalni tečaj 1 CHF = 0,9510 EUR, obrestni meri pa se nista spremenili. Določi vrednost posla iz **a)** s stališča stranke, ki bo v prihodnosti kupila franke.

Rešitev.

a) Izberemo evro za domačo in frank za tujo valuto. Trenutni menjalni tečaj med valutama je $S_0 = 0{,}9215$. Terminski menjalni tečaj je neodvisen od nominalne vsote $N = 1000$ CHF in znaša

$$K = 0{,}9215 \cdot \frac{(1 + 0{,}0135)^{3/2}}{(1 + 0{,}0085)^{3/2}} = 0{,}9284,$$

torej 1 CHF = 0,9284 EUR.

b) Banka ponuja drugačen menjalni tečaj, torej je na trgu možna arbitraža.

Banka je pripravljena ob ročnosti posla $T = \frac{3}{2}$ leta franke kupiti ali prodati po prenizki ceni, zato se dogovorimo, da bomo franke v prihodnosi v skladu s poslom kupili. Danes si jih zato sposodimo in pretvorimo v evre, v prihodnosti pa nazaj kupimo in z njimi povrnemo dolg. Neusklajenost obrestnih mer in menjalnih tečajev nam bo prinesla netvegan zaslužek.

Odločimo se, da bomo sklenili valutni terminski posel za nakup nominalne vsote $N = 1000$ CHF.

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Sposodimo si $1000(1 + R_{\mathrm{CHF}})^{-3/2} = 1000(1 + 0{,}0085)^{-3/2} = 987{,}38$ CHF do časa $\frac{3}{2}$ po obrestni meri za franke,
  - zamenjamo franke za evre po trenutnem menjalnem tečaju S_0; tako dobimo $987{,}38 \cdot 0{,}9215 = 909{,}87$ EUR,
  - investiramo 909,87 EUR do časa $\frac{3}{2}$ po obrestni meri za evre,
  - sklenemo valutni terminski posel za nakup 1000 CHF.

  Neto denarni tok transakcij je 0.
- Čas $t = \frac{3}{2}$ (ročnost posla).
  - Dvignemo 909,87 EUR z nastalimi obrestmi,
  - Kupimo 1000 CHF v skladu z valutnim terminskim poslom; za njih moramo plačati $1000 \cdot 0{,}92 = 920$ EUR,
  - vrnemo 987,38 CHF z nastalimi obrestmi.

  Transakciji v frankih se izničita, saj moramo vrniti ravno toliko frankov, kot smo jih kupili. Transakciji v evrih skupaj zneseta

  $$909{,}87(1 + 0{,}0135)^{3/2} - 920 = 928{,}36 - 920 = 8{,}36 \text{ EUR}.$$

  To je arbitražni zaslužek.

c) Leto kasneje ($t = 1$) poznamo $S_1 = 0{,}951$. Določimo vrednost posla iz **a)**:

$$\begin{aligned} V_t &= N\Big(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)}\Big) \\ V_1 &= 1000\Big(0{,}951(1 + 0{,}0085)^{-1/2} - 0{,}9284(1 + 0{,}0135)^{-1/2}\Big) = \\ &= 24{,}79 \text{ EUR} \end{aligned}$$

3.6 Dogovor o terminski obrestni meri

Vemo že, da poleg trenutnih obrestnih mer $R(0, T)$ poznamo tudi terminske obrestne mere $R(0, S, T)$. Za terminsko obrestno mero se pogodimo v času 0 in velja za transakcijo, ki se začne v času S in konča v času T za $0 < S < T$. Na trgu brez arbitraže so terminske obrestne mere določene s časovno strukturo trenutnih obrestnih mer.

Pri navadnem obrestovanju smo izračunali

$$R(0, S, T) = \frac{1}{T - S}\left(\frac{1 + R(0, T) \cdot T}{1 + R(0, S) \cdot S} - 1\right).$$

Kadar uporabljamo zvezno obrestovanje in podamo nominalne obrestne mere, velja

$$R(0, S, T) = \frac{R(0, T) \cdot T - R(0, S) \cdot S}{T - S},$$

če pa pri zveznem obrestovanju uporabljamo efektivne obrestne mere, velja

$$R(0, S, T) = \left(\frac{\Big(1 + R(0, T)\Big)^T}{\Big(1 + R(0, S)\Big)^S}\right)^{\frac{1}{T-S}} - 1.$$

Terminski posel, s katerim se pogodimo za terminsko obrestno mero, imenujemo **dogovor o terminski obrestni meri**. To je dogovor med dvema strankama o obrestni meri, ki se bo uporabila v obdobju, ki se prične v trenutku $S > 0$ v prihodnosti in konča v trenutku $T > S$. Dogovorjena obrestna mera K bo uporabljena na **nominalni vsoti** N.

Čas S imenujemo **datum poravnave** (takrat dejansko zapremo posel) in čas T **dospetje**. **Kupec dogovora o terminski obrestni meri** (imetnik dolge pozicije) si bo v prihodnosti po obrestni meri K denar sposodil, **prodajalec** (imetnik kratke pozicije) pa ga bo posodil oz. investiral. Ker smo predpostavili, da na trgu ni arbitraže, moramo ob sklenitvi dogovora določiti

$$K = R(0, S, T).$$

Pri takšni dogovorjeni obrestni meri je vrednost posla ob sklenitvi enaka 0.

Pri obrestnih izvedenih finančnih instrumentih (mednje spada dogovor o terminski obrestni meri) **praviloma uporabljamo navadno obrestovanje**.

Določimo vrednost V_S sklenjenega posla na dan poravnave S za imetnika dolge pozicije. Ta si denar sposoja in obresti plača. Če dogovora ne bi sklenil, bi plačal obresti po trenutni obrestni meri $R(S, T)$, kar ob zapadlosti T da znesek obresti

$$N \cdot R(S, T) \cdot (T - S),$$

v skladu z dogovorom pa plača obresti po dogovorjeni obrestni meri K, kar ob zapadlosti T da znesek obresti

$$N \cdot K \cdot (T - S).$$

Vrednost dogovora ob zapadlosti bi bila enaka razliki višin plačanih obresti. Kupec dogovora o terminski obrestni meri (dolga stran) bo na boljšem, če bo dogovor prinesel nižje obresti od tistih, ki bodo na trgu na voljo v času S.

Ker pa sta oba zneska obresti znana že v trenutku poravnave S, je posel tedaj vreden

$$V_S = \frac{N \cdot \big(R(S, T) - K\big) \cdot (T - S)}{1 + R(S, T) \cdot (T - S)}.$$

Dogovor praviloma že na dan poravnave zapremo z denarno poravnavo. Če je tedaj $V_S > 0$, potem prodajalec (kratka stran) plača V_S denarnih enot kupcu (dolga stran), če pa je $V_S < 0$, potem kupec plača $|V_S|$ denarnih enot prodajalcu dogovora. Če je $V_S = 0$, potem ni denarnih tokov. To se zgodi, če je $R(S, T) = R(0, S, T)$.

Vrednost dogovora o terminski obrestni meri v času $t \in [0, S]$ za imetnika dolge pozicije znaša

$$V_t = \frac{N \cdot \big(R(t, S, T) - K\big) \cdot (T - S)}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}.$$

Jasno pri $t = 0$ dobimo $V_0 = 0$, saj je $K = R(0, S, T)$, pri $T = S$ pa dobimo V_S, saj je $R(S, S, T) = R(S, T)$.

To zvezo izpeljemo s podobnim sklepom, kot v primeru terminskega posla na delnico. Tudi pri dogovoru o terminski obrestni meri je vrednost dogovora (sklenjenega v času 0) v času t enaka razliki med obrestno mero, ki jo ima ta dogovor, in obrestno mero, ki bi jo imel dogovor z enakimi S, T in N, sklenjen v času t. Seveda moramo to razliko pomnožiti z nominalno vrednostjo in dolžino obrestovalnega obdobja, dobljeni znesek pa diskontirati na čas vrednotenja t.

Zgled 3.7. Podjetje je sklenilo dogovor o terminski obrestni meri, ki določa, da bo plačalo obresti po 2 % obrestni meri na nominalno vsoto 1 milijon evrov v šestmesečnem obdobju, ki se začne čez 2 leti. V nalogi uporabljamo navadno obrestovanje. Določi denarne tokove na dan poravnave, če tedaj obrestna mera na trgu znaša

a) $R(2, \frac{5}{2}) = 2{,}25\,\%$;

b) $R(2, \frac{5}{2}) = 1{,}55\,\%$.

Rešitev.

a) Označimo dan poravnave $S = 2$ leti, dospetje $T = \frac{5}{2}$ leta, nominalno vsoto dogovora $N = 1.000.000$ EUR, dogovorjeno obrestno mero $K = 0{,}02$ in tržno obrestno mero $R(2, \frac{5}{2}) = 0{,}0225$.

Ker bo podjetje plačalo obresti, je kupec dogovora o terminski obrestni meri (dolga pozicija). Vrednost posla na dan poravnave je

$$V_2 = \frac{1.000.000 \cdot (0{,}0225 - 0{,}02) \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0{,}0225 \cdot \frac{1}{2}} = 1236{,}09 \text{ EUR}.$$

Podjetje znesek prejme od prodajalca dogovora.

Če si podjetje nato na trgu sposodi 1 milijon EUR in hkrati investira prejeti poravnalni znesek 1236,09 po tržni obrestni meri 2,25 %, ima v času $\frac{5}{2}$ neto denarni tok

$$\underbrace{-1.000.000 - 1.000.000 \cdot 0{,}0225 \cdot \tfrac{1}{2}}_{\text{sposojena nominalna vsota}} + \underbrace{1.236{,}09 + 1.236{,}09 \cdot 0{,}0225 \cdot \tfrac{1}{2}}_{\text{investirani poravnalni znesek}} = -1.010.000 \text{ EUR}.$$

Znesek obresti 10.000 EUR ustreza dogovorjeni obrestni meri $K = 0{,}02$.

Čeprav dogovor o terminski obrestni meri zapremo že na dan poravnave, si z njim zares lahko zagotovimo vnaprej dogovorjeno obrestno mero za obdobje $[2, \frac{5}{2}]$.

Ker dogovor o terminski obrestni meri zapremo na dan poravnave in si nam nominalne vsote v resnici ni potrebno sposoditi ali jo investirati, znesku N včasih rečemo **navidezna glavnica**.

b) Tokrat imamo $R(2, \frac{5}{2}) = 0{,}0155$ in

$$V_2 = \frac{1.000.000 \cdot (0{,}0155 - 0{,}02) \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0{,}0155 \cdot \frac{1}{2}} = -2232{,}70 \text{ EUR}.$$

Podjetje znesek plača prodajalcu dogovora.

3.7 Naloge

Naloga 3.1. Trojska unča platine danes stane 1040 EUR. Varno skladiščenje te plemenite kovine stane 2 EUR/mesec in se plačuje vnaprej. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju znaša 3 % za vsa dospetja.

a) Določi izročitveno ceno unče platine v blagovnem terminskem poslu z ročnostjo čez dva meseca.

b) Na trgu je možno skleniti blagovni terminski posel z ročnostjo dva meseca in izročitveno ceno 1053 EUR. Pripravi arbitražno strategijo.

c) Mesec kasneje (pred plačilom skladiščnin) je cena unče platine 1060 EUR, obrestne mere pa se niso spremenile. Določi vrednost blagovnega terminskega posla iz naloge **a)**.

Rešitve. a) $I(0, \frac{1}{6}) = 3{,}9951$ EUR, $K = 1049{,}15$ EUR
b) Danes si sposodi 1043,9951 ≐ 1044 EUR za dva meseca, kupi unčo platine,
prodaj blagovni posel, plačaj prvo skladiščnino, investiraj 1,9951 ≐ 2 EUR za en mesec.
Čez en mesec prejmi 2 EUR in plačaj drugo skladiščnino.
Čez dva meseca prodaj unčo za 1053 EUR in vrni 1049,15 EUR.
c) $F_1 = 1064{,}62$ EUR, $V_1 = 15{,}43$ EUR

Naloga 3.2. Upravljalec rafinerije si želi zagotoviti ceno, po kateri bo kupil 5000 sodčkov nafte čez pol leta. Sodček (158,99 litra) nafte danes stane 50 USD, zanj pa je treba za vsake tri mesece vnaprej plačati 0,50 USD skladiščnine. Efektivna obrestna mera za dolarje je $R_{\text{USD}} = 7\,\%$ za vsa dospetja.

a) Določi izročitveno ceno sodčka nafte v blagovnem terinskem poslu z ročnostjo čez pol leta. Rezultat zaokroži na dve decimalni mesti.

b) Koliko dolarjev bo rafinerija plačala za potrebno nafto ob ročnosti blagovnega terminskega posla?

c) Danes menjalni tečaj med dolarjem in evrom znaša 1 USD = 0,9050 EUR, evrska obrestna mera pa $R_{\text{EUR}} = 6{,}50\,\%$ za vsa dospetja. Določi terminski menjalni tečaj med dolarjem in evrom v valutnem terminskem poslu z ročnostjo čez pol leta. Rezultat zaokroži na štiri decimalna mesta.

d) Koliko evrov bo rafinerija plačala za potrebno nafto, če poleg blagovnega sklene še valutni terminski posel?

Rešitve. a) $I(0, \frac{1}{2}) = 0{,}99$ USD, $K = 52{,}74$ USD b) 263.700 USD
c) 1 USD = 0,9029 EUR d) 238.094,73 EUR

Naloga 3.3. Dana je naslednja časovna struktura trenutnih obrestnih mer z navadnim obrestovanjem:

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0,t)$	2,00 %	2,95 %	3,50 %	4,35 %

Podjetje je sklenilo dolgo pozicijo v dogovoru o terminski obrestni meri z datumom poravnave čez pol leta in dospetjem čez eno leto. Nominalna vsota dogovora znaša 500.000 EUR.

a) Izračunaj obrestno mero, ki je zapisana v dogovoru.

b) Tri mesece po sklenitvi dogovora poznamo $R(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = 1{,}95\,\%$ in $R(\frac{1}{4}, 1) = 2{,}70\,\%$. Določi vrednost dogovora za podjetje.

c) Na dan poravnave obrestna mera znaša $R(\frac{1}{2}, 1) = 3{,}30\%$. Kakšno izplačilo pripada podjetju?

Rešitve. a) 3,86 % b) $R(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1) = 3{,}06\,\%$, $V_{1/4} = -1960{,}30$ EUR
c) Podjetje mora plačati 1377,27 EUR.

Naloga 3.4. Banka uporablja navadni obrestni račun in naslednjo časovno strukturo trenutnih obrestnih mer:

t	0,25	0,50	0,75	1,00
$R(0, t)$	1,50 %	1,75 %	2,20 %	2,70 %

a) Kolikšna obrestna mera velja za dogovor o terminski obrestni meri z dnevom poravnave čez pol leta in dospetjem čez eno leto?

b) Banka na trgu ponuja dogovor o terminski obrestni meri z dnevom poravnave čez eno leto in dospetjem čez 15 mesecev, nominalno vsoto 100.000 EUR in obrestno mero 3,00 %. Določi trenutno obrestno mero $R(0, \frac{5}{4})$, če je dogovor danes brezplačen.

c) Opiši arbitražno priložnost, če banka omogoča sklenitev dogovora o terminski obrestni meri z datumom poravnave čez pol leta in dospetjem čez eno leto, nominalno vsoto 100.000 EUR in dogovorjeno obrestno mero enako 2,65 %.

Rešitve. a) 3,62 % b) 2,78 %
c) Danes si sposodimo 99.132,59 EUR za pol leta in jih investiramo za eno leto, kupimo dogovor o terminski obrestni meri.
Čez pol leta vrnemo 100.000 EUR in si po dogovoru sposodimo 100.000 EUR za pol leta.
Čez eno leto prejmemo 101.809,17 EUR in vrnemo 101.325 EUR.

4 Opcije

Opcije so poleg terminskih poslov še druga velika skupina izvedenih finančnih instrumentov, s katerimi si lahko »določimo« ceno osnovnega premoženja v prihodnosti. Glavna lastnost opcij je, da v njih zapisana cena za kupca ni zavezujoča in jo bo uveljavil le, če bo to zanj ugodno. Tudi opcije se lahko nanašajo na vrednostne papirje, blago, menjalne tečaje in obrestne mere. Mi bomo obravnavali zgolj opcije na vrednostne papirje.

4.1 Opis in vrste opcij

Opcija je pogodbeno razmerje med kupcem in prodajalcem, ki daje **kupcu** (lastniku, nosilcu, imetniku dolge pozicije) **pravico, a ne obveznosti**, da v prihodnosti kupi ali proda določeno količino osnovnega premoženja po vnaprej dogovorjeni pogodbeni ceni, ki ji rečemo **izvršilna cena**. **Prodajalec** (izdajatelj, imetnik kratke pozicije) opcije mora kupčevo odločitev spoštovati. Če kupec uveljavi svojo pravico, rečemo, da **izvrši opcijo**.

Iz opisa je jasno razvidna najpomembnejša razlika med opcijo in terminskim poslom:

- Kupec in prodajalec terminskega posla sta ob njegovi ročnosti oba zavezana k izpolnitvi zapisanega, neodvisno od takratnih razmer na trgu.
- Opcija za kupca ne predstavlja nobene obveznosti, temveč le pravico, ki jo lahko izkoristi, ni pa nujno. Prodajalec opcije je v primeru, da kupec uveljavlja svojo pravico, dolžan izpolniti svojo pogodbeno obveznost.

Kupec opcije svojo pravico uveljavi le, če je z opcijo določena cena ugodnejša od tržne cene, zato vrednost opcije za kupca ne more biti negativna. Da na trgu ne bo arbitraže, mora kupec opcije ob sklenitvi pogodbe plačati **premijo**.

Opcije delimo v dve skupini:

- opcija, ki nam v prihodnosti daje pravico do nakupa osnovnega instrumenta, se imenuje **nakupna opcija**,
- opcija, ki nam daje pravico do prodaje osnovnega instrumenta, pa se imenuje **prodajna opcija**.

Osnovni instrument je lahko delnica, obveznica, blago, tuja valuta, obrestna mera ali kakšno drugo premoženje, s katerim se trguje.

Zgled 4.1. Poglejmo si primer opcije pri nakupu avtomobila. Namesto da s prodajalcem avtomobila sklenemo zavezujočo pogodbo o nakupu avtomobila, nam prodajalec proda opcijo, ki nam omogoča, da čez 6 mesecev kupimo željeni avtomobil po ceni 10.000 EUR. Gre za opcijo, kar pomeni, da jo lahko izkoristimo, ni pa nujno.

Mine 6 mesecev in odločimo se za nakup avtomobila. Obiščemo prodajalca in ta nam ves sijoč pove, da naš izbran model avtomobila ne stane več 10.000 EUR, temveč le še 9500 EUR. Ali naj vztrajamo pri naši opciji in kupimo avtomobil po ceni 10.000 EUR? Seveda ne, saj bomo brez izvršitve opcije plačali 500 EUR manj. Torej pustimo, da opcija propade. Če pa bi bila aktualna cena vozila višja od 10.000 EUR, bi opcijo izvršili in tako kupili avtomobil po ceni 10.000 EUR, ne glede na to, koliko dražji je takrat avtomobil.

Enako, kot smo v prejšnjem zgledu opisali opcijo za nakup avtomobila, delujejo tudi delniške opcije.

Zgled 4.2. Predpostavimo, da kupimo opcijo za nakup ene delnice izbranega podjetja in zanjo plačamo 3,60 EUR (cena opcije oz. premija). Kot lastnik opcije imamo pravico, da čez eno leto kupimo delnico po ceni 180 EUR. Trenutna cena delnice znaša 134,30 EUR.

Sedaj se pa preselimo eno leto v prihodnost. Delniški trgi so se do takrat dobro razvijali in cena delnice znaša 225 EUR. Ali naj opcijo izkoristimo? Seveda, saj imamo pravico do nakupa delnice po 180 EUR, ki jo lahko potem v istem trenutku na borzi prodamo po ceni 225 EUR. Razlika v višini 45 evrov, zmanjšana za premijo opcije 3,60 EUR, pomeni naš dobiček.

Če pa se cena delnice leto po nakupu opcije nahaja pod 180 EUR, izvršitev opcije nima smisla, vloženih 3,60 EUR pa vzamemo v zakup kot izgubo. Pri tem je vseeno, če znaša cena delnice takrat 179,99 EUR ali pa 10 EUR, naša izguba je bila že od vsega začetka omejena na plačilo premije v višini 3,60 EUR. Več kot premije pri opciji ne moremo izgubiti.

Postavlja se vprašanje, ali smo resnično pridobili, če smo preko opcije kupili delnico za 180 EUR in jo na trgu prodali za 181 EUR? Odgovor je ne, kajti dobiček iz takojšne prodaje delnice v višini 1 EUR ne zadostuje, da bi pokrili premijo opcije v višini 3,60 EUR. Ta transakcija bi namreč pokrila le del našega prvotno investiranega denarja (premije). Kljub temu pa z izvršitvijo opcije zmanjšamo izgubo.

Dobiček bomo ustvarili šele takrat, ko bomo delnico lahko prodali za več kot za 183,60 EUR. Tovrstni prag cene v višini 183,60 EUR se imenuje tudi **točka preloma**. Višje kot je ob izvršitvi cena delnice od točke preloma, višji je naš dobiček, ki je lahko teoretično neskončno visok, glede na ceno delnice, ki prav tako lahko zraste za poljubno veliko.

Zgleda nam pomagata razumeti, da v finančni matematiki opcijo izvršimo, če je izvršilna cena ugodnejša od tržne cene, in to neodvisno od tega, ali delnico sploh imamo (v primeru prodajne opcije) oziroma jo potrebujemo (v primeru nakupne opcije).

- **Nakupno opcijo izvršimo, če je cena delnice na trgu višja od izvršilne cene.**
  - Če delnice ne potrebujemo, jo v skladu z opcijo kupimo in takoj zatem na trgu prodamo po višji ceni, razliko v cenah pa obdržimo.
  - Če delnico potrebujemo, jo po nakupu obdržimo. Še vedno smo v prednosti, saj smo jo kupili po nižji ceni od tržne.
- **Prodajno opcijo izvršimo, če je cena delnice na trgu nižja od izvršilne cene.**
  - Če delnice sploh nimamo, jo na trgu najprej kupimo po tržni ceni in nato prodamo v skladu z opcijo, razliko pa spet obdržimo.
  - Če delnico imamo, smo še vedno v prednosti, saj smo zanjo ob prodaji iztržili več od njene tržne cene.

Zato bomo opcijo kasneje obravnavali kot vrednostni papir, ki izplača ustrezno razliko med cenama, če je ta razlika pozitivna; lahko rečemo, da je opcija **denarno poravnana**. Takšna obravnava je možna, kadar je opcija napisana na osnovno premoženje, s katerim se intenzivno trguje in ga je v vsakem trenutku možno po tržni ceni kupiti ali prodati.

4.2 Evropske opcije na vrednostne papirje

Opcija je torej pogodba med kupcem (oz. nosilcem) opcije (dolga stran) in prodajalcem (oz. izdajateljem) opcije (kratka stran), o nakupu ali prodaji osnovnega premoženja po vnaprej določeni izvršilni ceni K. Nosilec opcije mora ob nakupu opcije plačati ceno (oz. premijo) za opcijo, potem pa nima več drugih obveznosti.

Sprejem odločitve za nakup oziroma prodajo osnovnega instrumenta po ceni K je izvršitev opcije. Glede na to, kdaj je možna izvršitev opcije, ločimo več vrst opcij.

- Najbolj enostavna je **evropska opcija**, ki daje pravico izvršitve **samo ob zapadlosti**,
- **ameriška opcija** pa daje pravico izvršitve **kadarkoli do vključno zapadlosti**.

Poznamo še druge vrste opcij, ki jih s skupnim imenom imenujemo **eksotične opcije**. Ker ameriške opcije ponujajo več možnosti kot evropske, ne morejo biti cenejše od evropskih.

Na organiziranem trgu se trguje predvsem s standardiziranimi opcijami na delnice, terminske pogodbe in različne vrste blaga, na prostem trgu pa z opcijami na obrestne mere in menjalne tečaje. Za opcije, s katerimi se trguje na borzah, hkrati kotirajo različne izvršilne cene in različni datumi zapadlosti.

V tem gradivu bomo obravnavali zlasti **evropske opcije na vrednostne papirje**, ki so najenostavnejše.

S $t = 0$ označimo čas izdaje opcije, s T pa čas zapadlosti. S_t je cena osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$. Nadalje naj bo K izvršilna cena. Izplačilo opcije za nosilca opcije je enako razliki med tržno ceno osnovnega premoženja v času izvršitve in izvršilno ceno, če je ta razlika pozitivna. Sicer je izplačilo opcije enako 0. S C_T označimo izplačilo evropske nakupne opcije ob zapadlosti in s P_T izplačilo evropske prodajne opcije ob zapadlosti.

V času T lahko nosilec opcije svojo opcijo izvrši ali pa ne. Ker smo privzeli, da je nosilec opcije racionalen, bo izvršil nakupno opcijo, če je $S_T > K$, in prodajno opcijo, če je $S_T < K$.

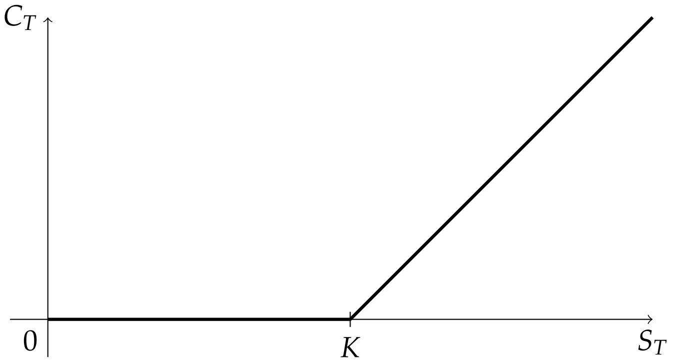
Izplačilo opcije ob času T je potem enako

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\},$$
$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}.$$

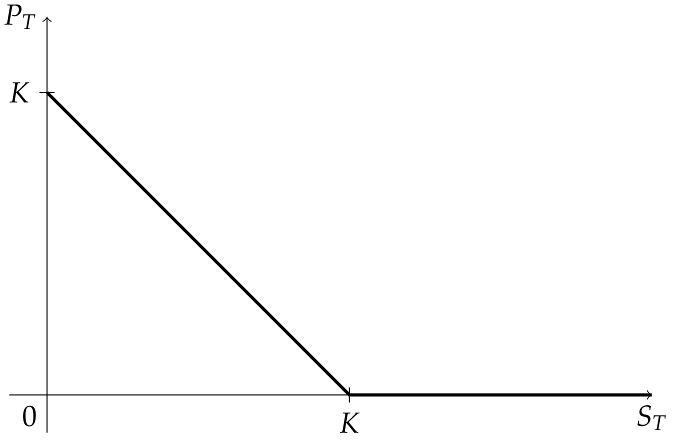
To je hkrati tudi vrednost opcije ob zapadlosti za nosilca (imetnika dolge pozicije).

Na spodnjih grafih sta prikazani izplačili obeh vrst opcij ob zapadlosti v odvisnosti od vrednosti osnovnega premoženja S_T.

Izplačilo nakupne opcije ob zapadlosti T.



Izplačilo prodajne opcije ob zapadlosti T.



Če je $C_T > 0$ oziroma $P_T > 0$, rečemo, da **se opcija splača**, če je $S_T = K$, rečemo, da **je opcija na meji**, in če je $S_T < K$ pri nakupni oziroma $S_T > K$ pri prodajni opciji, potem rečemo, da **se opcija ne splača**.

Označimo s c_0 premijo, ki jo moramo plačati za nakupno opcijo ob izdaji v času 0, in s p_0 premijo, ki jo moramo plačati za prodajno opcijo ob izdaji v času 0. Premija je hkrati tudi vrednost opcije takoj po izdaji za nosilca opcije (imetnika dolge pozicije).

Imetnik evropske opcije lahko v vsakem času $t \in (0, T)$ bodisi ne naredi ničesar, bodisi opcijo proda. Tudi v tem trenutku vrednosti opcije rečemo premija. Matematično je vseeno, ali v času t kupimo na novo izdano opcijo ali pa že obstoječo opcijo, ki je bila izdana v času 0.

Naj bo sedaj c_t premija evropske nakupne opcije z izvršilno ceno K in zapadlostjo T, ki je sklenjena v času t. Podobno naj bo p_t premija evropske prodajne opcije z izvršilno ceno K in zapadlostjo T, ki je sklenjena v času t. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je R za vsa dospetja.

Iz danih podatkov ne moremo natančno določiti opcijskih premij. Če na trgu ni arbitražne priložnosti, veljajo naslednje neenakosti:

$$\begin{aligned}
&\max\left\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)}, 0\right\} \leq c_t \leq S_t, \\
&\max\left\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\right\} \leq p_t \leq K(1+R)^{-(T-t)}.
\end{aligned}$$

Za vsak primer, kjer katera od neenakosti ne bi veljala, lahko skonstruiramo arbitražno priložnost. Za zgled premislimo, da mora veljati

$$\max\left\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\right\} \leq p_t.$$

Predpostavimo nasprotno, torej da je

$$p_t < \max\left\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\right\}.$$

Ker je premija p_t nenegativna, je to možno, samo če je

$$K(1+R)^{-(T-t)} - S_t > 0.$$

Torej je

$$p_t < K(1+R)^{-(T-t)} - S_t,$$

kar preuredimo v

$$K(1+R)^{-(T-t)} - S_t - p_t > 0.$$

Pripravimo naslednjo arbitražno strategijo:

- Čas t (danes).
  - Sposodimo si znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ do časa T,
  - kupimo eno enoto osnovnega premoženja,
  - kupimo evropsko prodajno opcijo.

  Neto denarni tok znaša $+K(1+R)^{-(T-t)} - S_t - p_t > 0$.
- Čas T (zapadlost opcije).

  Ločimo dva primera: Če je $S_T \geq K$, se prodajna opcija ne splača, zato
  - Prodamo enoto osnovnega premoženja po tržni ceni,
  - vrnemo znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ z nastalimi obrestmi,
  - pustimo prodajno opcijo propasti.

  Neto denarni tok je $+S_T - K \geq 0$.

  Če je $S_T < K$, se prodajna opcija splača, zato
  - Izvršimo prodajno opcijo in prodaj enoto osnovnega premoženja po izvršilni ceni,
  - vrnemo znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok je $+K - K = 0$.

V zgornji arbitraži smo privzeli **fizično poravnavo** opcije ob njeni zapadlosti. Če se prodajna opcija tedaj splača, dejansko prodamo enoto osnovnega premoženja izdajatelju opcije in prejmemo izvršilno ceno K. V primeru **denarne poravnave** izdajatelj prodajne opcije nosilcu izplača znesek $K - S_T$, če je ta pozitiven, sicer pa ničesar. Ob zapadlosti opcije nam tedaj ni treba ločiti dveh možnosti ampak strategijo poenostavimo v:

- Čas T (zapadlost opcije).
  - Prodamo enoto osnovnega premoženja po tržni ceni,
  - Izvršimo opcijo, če se splača (izdajatelj nam izplača njeno vrednost),
  - vrnemo znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok je $+S_T + \max\{K - S_T, 0\} - K = \max\{0, S_T - K\} \geq 0$.

Če imata evropska nakupna in prodajna opcija enako zapadlost, izvršilno ceno in osnovno premoženje, potem mora v vsakem trenutku $t \in [0, T]$ veljati

$$p_t + S_t = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}.$$

Zapisano enakost imenujemo **pariteta evropskih opcij** ali **evropska nakupno-prodajna enakost**. Dokazali jo bomo z uporabo zakona ene cene in primerjavo dveh investicij.

Prva investicija vključuje:

- Čas t (danes).
  - Kupimo evropsko prodajno opcijo,
  - kupimo eno enoto osnovnega premoženja.

  Neto denarni tok znaša $U_t = -p_t - S_t$.
- Čas T (zapadlost opcije).
  - Prodamo eno enoto osnovnega premoženja po tržni ceni,
  - izvršmo prodajno opcijo, če se splača.

  Neto denarni tok znaša $U_T = +S_T + \max\{K - S_T, 0\} = \max\{K, S_T\}$.

Druga investicija vključuje:

- Čas t (danes).
  - Kupimo evropsko nakupno opcijo,
  - investiramo znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ do časa T.

  Neto denarni tok znaša $V_t = -c_t - K(1+R)^{-(T-t)}$.
- Čas T (zapadlost opcije).
  - Dvignemo znesek $K(1+R)^{-(T-t)}$ z nastalimi obrestmi,
  - izvršimo nakupno opcijo, če se splača.

  Neto denarni tok znaša $V_T = +K + \max\{S_T - K, 0\} = \max\{S_T, K\}$.

Investiciji U in V imata identične denarne tokove v obdobju $(t, T]$, zato po zakonu ene cene velja še $U_t = V_t$. To pomeni

$$-p_t - S_t = -c_t - K(1+R)^{-(T-t)},$$

oziroma

$$p_t + S_t = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}.$$

Zgled 4.3. Trenutna cena delnice je enaka 322,20 EUR. Na trgu pa je možno kupiti evropsko nakupno opcijo in evropsko prodajno opcijo na to delnico, obe z izvršilno ceno 325 EUR in zapadlostjo čez pol leta. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 1 % za vsa dospetja.

a) Ali na trgu obstaja arbitražna priložnost, če je premija za nakupno opcijo 2,30 EUR in premija za prodajno opcijo 2,90 EUR?

b) Če obstaja arbitražna priložnost, jo opiši.

Rešitev.

a) Obe opciji sta napisani na isto delnico, imata isto zapadlost in izvršilno ceno, zato preverimo evropsko nakupno-prodajno enakost.

Danes označimo s $t = 0$. Podano imamo $S_0 = 322{,}20$ EUR, $K = 325$ EUR, $T = \frac{1}{2}$ leta, $R = 0{,}01$, $c_0 = 2{,}30$ EUR, in $p_0 = 2{,}90$ EUR.

Potem je

$$
\begin{aligned}
p_0 + S_0 &= 322{,}20 + 2{,}90 = 325{,}10 \text{ EUR}, \\
c_0 + K(1+R)^{-T} &= 2{,}30 + 325(1+0{,}01)^{-1/2} = 325{,}69 \text{ EUR}.
\end{aligned}
$$

Arbitraža je možna, saj evropska nakupno-prodajna enakost ne velja.

b) Na trgu namesto enakosti velja

$$p_0 + S_0 < c_0 + K(1+R)^{-T},$$

torej

$$c_0 + K(1+R)^{-T} - p_0 - S_0 > 0.$$

Arbitražno priložnost opiše naslednja strategija.

- Čas 0 (danes).
  - Izdamo (kratko prodamo) evropsko nakupno opcijo,
  - sposodimo si znesek $325(1+0{,}01)^{-1/2} = 323{,}39$ EUR za pol leta,
  - kupimo evropsko prodajno opcijo,
  - kupimo delnico.

  Neto denarni tok je $+2{,}3 + 323{,}39 - 2{,}9 - 322{,}2 = 0{,}59$ EUR.
- Čas $\frac{1}{2}$ (zapadlost opcij).
  Ločimo tri možnosti:

  Če je $S_{1/2} > 325$ EUR, se nakupna opcija splača, prodajna pa ne, zato
  - prodamo delnico kupcu nakupne opcije po izvršilni ceni,
  - vrnemo znesek 325 EUR,
  - pustimo prodajno opcijo propasti.

  Neto denarni tok je $+325 - 325 = 0$.

  Če je $S_{1/2} < 325$ EUR, se prodajna opcija splača, nakupna pa ne, zato
  - izvršimo prodajno opcijo in prodaj delnico po izvršilni ceni,
  - vrnemo znesek 325 EUR,
  - kupec nakupne opcije opcijo pusti propasti.

  Neto denarni tok je $+325 - 325 = 0$.

  Če je $S_{1/2} = 325$ EUR, sta obe opciji na meji in je vseeno, ali delnico kupimo/prodamo po tržni ali izvršilni ceni. Torej

– prodamo delnico po tržni[10] ali izvršilni[11] ceni ,
– vrnemo znesek 325 EUR,
– pustimo prodajno opcijo propasti.

Neto denarni tok je $+325 - 325 = 0$.

Če privzamemo denarno poravnavo opcij, lahko poenostavimo:

- Čas $\frac{1}{2}$ (zapadlost opcij).
  - prodamo delnico po tržni ceni,
  - vrnemo znesek 325 EUR,
  - izplačamo nakupno opcijo, če je to potrebno,
  - izvršimo prodajno opcijo, če se splača.

  Neto denarni tok je $+S_T - 325 - \max\{S_T - 325, 0\} + \max\{325 - S_T\} = 0$.

  Pri tem smo upoštevali, da je $+S_T - 325 + \max\{325 - S_T, 0\} = \max\{0, S_T - 325\}$.

Osnovno premoženje (npr. delnica) lahko izplača znano dividendo, več znanih dividend, ali pa ima vnaprej znan donos (npr. obresti na denarnem računu) v obdobju $[t, T]$. Označimo z $I(t, T)$ trenutno vrednost v času t vseh dividend (donosa), ki bodo izplačane v času od t do T. Podobno kot smo ravnokar premislili, pokažemo tudi, da mora v tem primeru veljati enakost

$$p_t + S_t - I(t, T) = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}.$$

Da na trgu ni arbitraže, morajo veljati še naslednje neenakosti:

$$\begin{aligned}
\max\left\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\right\} &\leq c_t \leq S_t - I(t, T), \\
\max\left\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\right\} &\leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}.
\end{aligned}$$

Te neenakosti izpeljemo z enakim sklepanjem, kot izpeljemo podobne neenakosti za primer, ko osnovno premoženje ne izplačuje dividend.

Zgled 4.4. Denimo, da je trenutna cena delnice enaka 20 EUR. Delnica bo izplačala dividendo v višini 1 EUR čez en mesec. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 3 % za vsa dospetja. Na trgu je možno kupiti evropsko nakupno opcijo in evropsko prodajno opcijo na to delnico, obe z izvršilno ceno 19 EUR in zapadlostjo čez tri mesece.

a) Ali na trgu obstaja arbitražna priložnost, če sta premiji za nakupno in prodajno opcijo enaki, in sicer obe 2 EUR?

b) Če obstaja arbitražna priložnost, jo opiši.

[10] če nosilec nakupne opcije opcije ne izvrši
[11] če nosilec nakupne opcije opcijo izvrši

Rešitev.

a) Danes označimo s $t = 0$. Podano imamo $S_0 = 20$ EUR, $K = 19$ EUR, $T = \frac{1}{4}$ leta, $R = 0{,}03$, $c_0 = p_0 = 2$ EUR.

Delnica bo izplačala dividendo v višini $d = 1$ EUR v trenutku $t' = \frac{1}{12}$ leta. Njena sedanja vrednost[12] je

$$I(0, \tfrac{1}{4}) = d(1+R)^{-t'} = 1(1+0{,}03)^{-1/12} = 0{,}9975 \text{ EUR}.$$

Ker je

$$\begin{aligned} p_0 + S_0 - I(0,T) &= 2 + 20 - 0{,}9975 = 21{,}0025 \text{ EUR}, \\ c_0 + K(1+R)^{-T} &= 2 + 19(1+0{,}03)^{-1/4} = 20{,}8601 \text{ EUR}, \end{aligned}$$

je arbitraža možna.

b) Na trgu velja

$$p_0 + S_0 - I(0,T) > c_0 + K(1+R)^{-T},$$

torej

$$p_0 + S_0 - I(0,T) - c_0 - K(1+R)^{-T} > 0.$$

Arbitražno priložnost opiše naslednja strategija.

- Čas 0 (danes).
  - Izdamo (kratko prodamo) evropsko prodajno opcijo,
  - kratko prodamo delnico,
  - investiramo znesek $1(1+0{,}03)^{-1/12} = 0{,}9975$ EUR za en mesec,
  - kupimo evropsko nakupno opcijo,
  - investiramo znesek $19(1+0{,}03)^{-1/4} = 18{,}8601$ EUR za tri mesece.

  Neto denarni tok je $+2 + 20 - 0{,}9975 - 2 - 18{,}8601 = 0{,}14$ EUR.
- Čas $\frac{1}{12}$ (izplačilo dividende).
  - Dvignemo znesek 1 EUR,
  - izplačamo dividendo.

  Neto denarni tok znaša $+1 - 1 = 0$.
- Čas $\frac{1}{4}$ (zapadlost opcij).
  Ločimo dve možnosti:

  Če je $S_{1/4} < 19$ EUR, se prodajna opcija splača, nakupna pa ne, zato
  - kupimo delnico od nosilca prodajne opcije po izvršilni ceni in zapremo kratko prodajo,
  - prejmemo znesek 19 EUR,
  - pustimo nakupno opcijo propasti.

[12] Rezultat smo zaokrožili na štiri decimalke, da vidimo učinek diskontiranja.

Neto denarni tok je $-19 + 19 = 0$.

Če je $S_{1/4} > 19$ EUR, se nakupna opcija splača, prodajna pa ne, zato

- izvršimo nakupno opcijo in kupi delnico po izvršilni ceni, nato zapri kratko prodajo,
- prejmemo znesek 19 EUR,
- kupec prodajne opcije opcijo pusti propasti.

Neto denarni tok je $-19 + 19 = 0$.
V obeh primerih imamo arbitražni zaslužek.

Možnost $S_{1/4} = 19$ EUR obravnavamo podobno kot v zgledu 4.3.

4.3 Opcijske strategije

Portfelju opcij, ki imajo isto zapadlost in isto osnovno premoženje, rečemo **opcijska strategija**. Z opcijskimi strategijami lahko pripravimo različne funkcije izplačil ob zapadlosti.

Zgled 4.5. Opcijsko strategijo **nakupni bikov korak** sestavimo tako, da

- kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1,
- prodamo (izdamo) evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno $K_2 > K_1$.

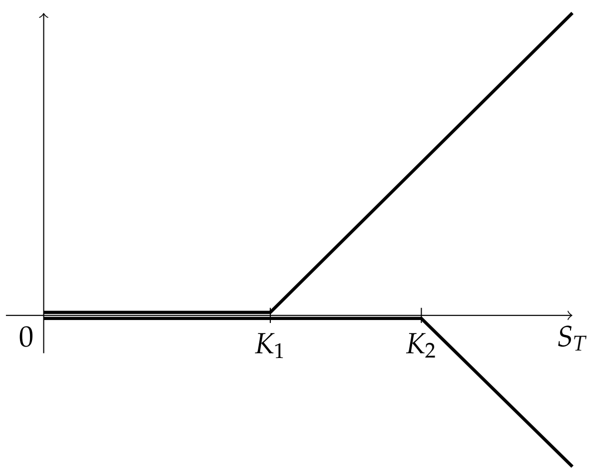
Obe opciji imata zapadlost T in sta napisani na isto delnico.

Ob zapadlosti je prva opcija vredna $\max\{S_T - K_1, 0\}$, druga pa $-\max\{S_T - K_2, 0\}$. Izplačila nakupnega bikovega koraka v odvisnosti od cene delnice ob zapadlosti znašajo

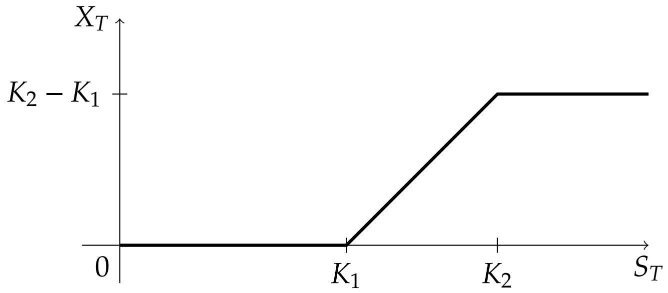
$$X_T = \max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\}. \tag{4.1}$$

Graf izplačil opcijske strategije je odsekoma linearna funkcija. Pri konstrukciji si pomagamo s seštevanjem grafov izplačil posameznih opcij. Pri tem upoštevamo, da je izplačilo opcije, ki smo jo izdali, za nas negativno ali kvečjemu 0.

Izplačili posameznih opcij.



Izplačilo opcijske strategije bikov korak.



S pomočjo slike, lahko pa tudi z obravnavo izraza (4.1) na disjunktnih intervalih v $[0, \infty)$, lahko določimo analitični predpis funkcije izplačil opcijske strategije

$$X_T = \begin{cases} 0; & S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1; & K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1; & S_T > K_2 \end{cases}$$

Če je c_1 premija nakupne opcije z izvršilno ceno K_1 in c_2 premija nakupne opcije z izvršilno ceno K_2, je premija nakupnega bikovega koraka enaka $c_1 - c_2$.

4.4 Naloge

Naloga 4.1. Delnica nekega podjetja je danes vredna 55 EUR in v naslednjega pol leta ne bo izplačala dividend. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju znaša 5 %.

a) Kaj lahko poveš o premiji evropske nakupne opcije, napisane na delnico podjetja, z zapadlostojo čez šest mesecev in izvršilno ceno 56 evrov?

b) Za opcijo iz naloge **a)** se je za hip izoblikovala premija 0,10 EUR. Pripravi arbitražno strategijo.

c) Recimo, da je premija opcije iz naloge **a)** enaka 0,80 EUR. Kaj lahko poveš o premiji evropske prodajne opcije z isto izvršilno ceno in zapadlostjo?

Rešitve. a) 0,35 EUR $\leq c_0 \leq$ 55 EUR
b) Danes kratko prodaj delnico, investiraj 54,65 EUR za pol leta, kupi opcijo.
Čez pol leta prejmi 56 EUR, kupi delnico na trgu, izvrši opcijo, če se splača.
c) p_0 = 0,45 EUR

Naloga 4.2. Delnica nekega podjetja je danes vredna 50 EUR. Podjetje bo čez 4 mesece izplačalo dividende v višini 1 EUR na delnico. Efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju znaša 3,15 % za vsa dospetja.

a) Kaj lahko poveš o premiji evropske prodajne opcije, napisane na delnico podjetja, z zapadlostjo čez pol leta in izvršilno ceno 48 evrov?

b) Na isto delnico sta napisani evropska nakupna in prodajna opcija z isto izvršilno ceno in zapadlostjo čez pol leta. Pri kolikšni izvršilni ceni sta premiji opcij enaki?

Rešitve. a) 0 EUR $\leq c_0 \leq$ 47,26 EUR b) 49,78 EUR

5 Formule, priložene tekmovalni poli

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend
  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$
  $V_t = S_t - K(1+R)^{-(T-t)}$
- na delnico, ki izplačuje dividende
  $F_t = \big(S_t - I(t,T)\big)(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$
- valutni terminski posel
  $F_t = S_t \dfrac{(1+R_d)^{T-t}}{(1+R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$
  $V_t = N\Big(S_t(1+R_f)^{-(T-t)} - K(1+R_d)^{-(T-t)}\Big)$
- dogovor o terminski obrestni meri
  $R(t,S,T) = \dfrac{1}{T-S}\left(\dfrac{1+R(0,T)\cdot(T-t)}{1+R(0,S)\cdot(S-t)} - 1\right), \quad K = R(0,S,T)$
  $V_t = \dfrac{N\cdot\big(R(t,S,T)-K\big)\cdot(T-S)}{1+R(t,T)\cdot(T-t)}$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti
  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$
  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$
- premija v času t, če delnica ne izplačuje dividend
  $\max\Big\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)}, 0\Big\} \le c_t \le S_t$
  $\max\Big\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\Big\} \le p_t \le K(1+R)^{-(T-t)}$
- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend
  $p_t + S_t = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$
- premija v času t, če delnica izplačuje dividende
  $\max\Big\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\Big\} \le c_t \le S_t - I(t,T)$
  $\max\Big\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\Big\} \le p_t \le K(1+R)^{-(T-t)}$
- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende
  $p_t + S_t - I(t,T) = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$
- evropske in ameriške opcije
  $c_t^{\mathrm{E}} \le c_t^{\mathrm{A}}, \quad p_t^{\mathrm{E}} \le p_t^{\mathrm{A}}$

Uporabljena in dodatna literatura

[1] M. Capiński, T. Zastawniak, *Mathematics for finance: An introduction to financial engineering*, Springer, 2005.

[2] J. C. Hull, *Options, futures and other derivatives*, 7. izdaja, Pearson Prentice Hall, 2009.

[3] J. C. Hull, *Solutions manual: Options, futures, and other derivatives*, 7. izdaja, Pearson Prentice Hall, 2009.

[4] D. Kokol Bukovšek, B. Mojškerc, *Matematika za poslovne in ekonomske vede: Naloge in izpitni primeri*, Ekonomska fakulteta, 2014.

[5] S. M. Ross, *An elementary introduction to mathematical finance: Options and other topics*, Cambridge University Press, 2003.

[6] A. Toman, *Rešene naloge iz finančne matematike 1: Finančni instrumenti*, DMFA – založništvo, 2016.

[7] *Priporočila o načinih obračuna obresti za posle s prebivalstvom*, spremno besedilo Jože Andrej Čibej, Združenje bank Slovenije in Banka Slovenije, 2008, dostopno na http://www.zbs-giz.si/system/file.asp?FileId=2376.

[8] Učni načrt. Matematika. Gimnazija : splošna, klasična in strokovna gimnazija, predmetna komisija A. Žakelj et al., Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo, 2008, dostopno na http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2015/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf.

Spletni članki

[9] E. Moore, *Belgium issues 100-year bond in private sale*, The Financial Times, 26. 4. 2016, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na https://next.ft.com/content/bc6f3e00-0ba7-11e6-9456-444ab5211a2f.

[10] D. Doyle: *Ireland sells first 100-year bond, staying on comeback trail*, Bloomberg, 30. 3. 2016, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na http://www.bloomberg.com/news/articles/2016-03-30/ireland-sells-first-100-year-bond-to-complete-comeback-trail.

[11] *The 100-year view*, The Economist, 2. 5. 2015, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na http://www.economist.com/news/finance-and-economics/21650156-investors-take-century-long-bet-boom-and-bust-mexico-100-year-view.

Spletni viri

[12] *Bonitetna ocena*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na http://www.mf.gov.si/si/stiki_z_investitorji_imetniki_vp/bonitetna_ocena/.

[13] *Euribor rates*, [ogled 15. 7. 2016], dostopno na
http://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html

[14] *List of trading losses*, [ogled 7. 7. 2016], dostopno na
https://en.wikipedia.org/wiki/List of trading losses

[15] *Obvestilo o ponudbi zakladnih menic javnosti*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/delovna_podrocja/vrednostni_papirji/zakladne_menice/sporocila_za_javnost/obvestilo_o_ponudbi_zakladnih_menic_javnosti/.

[16] *Predstavitev zakladnih menic*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/delovna_podrocja/vrednostni_papirji/zakladne_menice/predstavitev_zakladnih_menic/.

[17] *Republika Slovenija: Nova izdaja 16-letne referenčne obveznice v višini 1,5 mrld EUR*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/medijsko_sredisce/novica/archive/2016/2/article/43/2751/.

[18] *Rezultati avkcij zakladnih menic*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/stiki_z_investitorji_imetniki_vp/sporocila_za_javnost_o_izvedbi_avkcij/rezultati_avkcij_zakladnih_menic/.

[19] *Sekundarni trg*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/delovna_podrocja/vrednostni_papirji/sekundarni_trg/.

[20] *SZ89 in DZ71*, [ogled 3. 7. 2016], dostopno na
http://www.mf.gov.si/si/delovna_podrocja/vrednostni_papirji/zakladne_menice/sporocila_za_javnost/rezultati_avkcij_zakl_menic/sz89_in_dz71/.