Priprave na MMO 2024 – 3. domača naloga

1. Poišči vsa praštevila p, za katera je $2^p + p^2$ praštevilo.
2. Določi ostanek števila $7^{7^{7^{7^7}}}$ pri deljenju s 37.
3. Poišči vsa takšna naravna števila n, da sta zadnji dve števki števila n enaki zadnjima dvema števkama števila $7^n + 11^n$.
4. Točka na celoštevilski mreži je *ježeva*, če sta njeni koordinati tuji si naravni števili. Dokaži, da obstaja kvadrat 2023×2023 točk z naravnimi koordinatami, ki ne vsebuje ježeve točke.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **12. 12. 2023** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

1. Za vsako praštevilo $p > 3$ velja $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Hkrati vemo tudi, da je v tem primeru $2^p \equiv 2 \pmod 3$, saj je p liho število. Sledi torej $2^p + p^2 \equiv 0 \pmod 3$, kar pomeni, da za vsako praštevilo $p > 3$ število $2^p + p^2$ ni praštevilo.

   Ostaneta le še primera $p = 2$ in $p = 3$, v katerih dobimo zaporedoma $2^2 + 2^2 = 8$ in $2^3 + 3^2 = 17$. Število $2^p + p^2$ je torej praštevilo le, če je $p = 3$.

2. Po malem Fermatovem izreku vemo, da je

   $$7^{36} \equiv 1 \pmod{37},$$

   saj je 37 praštevilo. Zanima nas torej ostanek števila $7^{7^{7^7}}$ pri deljenju s 36. Oglejmo si ostanke števila 7^k pri deljenju s 36:

k	7^k mod 36
1	7
2	13
3	19
4	25
5	31
6	1

   Ugotovimo, da je $7^6 \equiv 1 \pmod{36}$. Ker velja $7^{7^7} \equiv 1^{7^7} \equiv 1 \pmod 6$, lahko zapišemo $7^{7^7} = 6k + 1$ za neko naravno število k. Vemo torej

   $$7^{7^{7^7}} \equiv 7^{6k+1} \equiv 1^k \cdot 7 \equiv 7 \pmod{36}.$$

   Znova zapišimo tabelo ostankov:

k	7^k mod 37
1	7
2	12
3	10
4	33
5	9
6	26
7	34

   Sledi $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 7^7 \equiv 34 \pmod{37}$.

3. Želimo poiskati vsa taka naravna števila n, da je $7^n + 11^n \equiv n \pmod{100}$. Oglejmo si najprej, za katera naravna števila n velja $7^n + 11^n \equiv n \pmod 4$. Če je n liho naravno število, je

   $$7^n + 11^n \equiv 3 + 3 \equiv 2 \pmod 4,$$

   kar ni mogoče, zato v tem primeru ni rešitev. Če je n sod, pa je

   $$7^n + 11^n \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4.$$

Ugotovimo torej, da mora veljati $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Sedaj nas zanima še, za katera naravna števila n je $7^n + 11^n \equiv n \pmod{25}$. Ker velja $n \equiv 2 \pmod{4}$, vemo, da je $7^n \equiv -1 \pmod{25}$. Torej mora veljati $11^n \equiv n+1 \pmod{25}$, iz česa lahko sklepamo, da je $11^n \equiv n+1 \pmod{5}$. Po drugi strani pa vemo, da za vsako naravno število k velja

$$11^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{5}.$$

Sledi, da je $n+1 \equiv 1 \pmod{5}$, kar pomeni, da je $n \equiv 0 \pmod{5}$. Ker je po binomskem izreku

$$11^5 = (10+1)^5 = 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 \equiv 1 \pmod{25},$$

lahko na podlagi tega ugotovimo, da je $11^n \equiv 1 \pmod{25}$. Tako velja

$$7^n + 11^n \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{25},$$

od koder sledi, da je $n \equiv 0 \pmod{25}$. Ker smo že dokazali, da je $n \equiv 2 \pmod{4}$, mora veljati $n \equiv 50 \pmod{100}$.

Dokazati moramo še, da za vsa naravna števila n, kjer je $n \equiv 50 \pmod{100}$, res velja $7^n + 11^n \equiv n \pmod{100}$. Ker je v tem primeru n sodo število, lahko tako kot zgoraj pokažemo, da je $7^n + 11^n \equiv 2 \pmod{4}$. Hkrati pa vemo tudi, da je $n \equiv 0 \pmod{5}$, kar pomeni, da velja $7^n + 11^n \equiv 0 \pmod{25}$. Po kitajskem izreku o ostankih torej sledi

$$7^n + 11^n \equiv 50 \equiv n \pmod{100}.$$

Rešitev so tako vsa naravna števila n, ki zadoščajo $n \equiv 50 \pmod{100}$.

4. Želimo poiskati takšni naravni števili A in B, da nobena izmed točk oblike $(A+m, B+n)$ za $1 \leq m, n \leq 2023$ ni ježeva.

   Naj bo $X = \{p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{2023,2023}\}$ množica praštevil, ki ima 2023^2 elementov. Sestavimo sistema kongruenc

   $$A \equiv -m \pmod{p_{m,n}} \quad \text{in} \quad B \equiv -n \pmod{p_{m,n}}$$

   za vse $1 \leq m, n \leq 2023$.

   Po kitajskem izreku o ostankih imata ta sistema kongruenc rešitev za A in B, saj so moduli paroma tuji. Vemo torej, da takšni naravni števili A in B obstajata.

   Oglejmo si točko $(A+m, B+n)$. Ker velja

   $$A + m \equiv -m + m = 0 \pmod{p_{m,n}} \quad \text{in} \quad B + n \equiv -n + n = 0 \pmod{p_{m,n}},$$

   sledi $p_{m,n} \mid A + m$ in $p_{m,n} \mid B + n$. Nobena izmed točk oblike $(A+m, B+n)$ za $1 \leq m, n \leq 2023$ torej ni ježeva. S tem smo našli kvadrat 2023×2023 točk z naravnimi koordinatami, ki ne vsebuje ježeve točke.