Priprave na MMO 2024 – 5. domača naloga

1. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere neenakost
$$f(x) + yf(f(x)) \leq x + xf(y)$$
velja za vsa naravna števila x in y.

2. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere enačba
$$f(xf(y) + f(x+y) + 1) = (y+1)f(x+1)$$
velja za vsa realna števila x in y.

3. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere je
$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$
za vsa realna števila x in y.

4. Naj bo c pozitivno realno število. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, za katere velja
$$f((c+1)x + f(y)) = f(x+2y) + 2cx$$
za vsa števila $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **14. 1. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) . . . . (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

. . . . (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

1. V enačbo najprej vstavimo $x \to 1$, $y \to 1$, da dobimo
$$f(f(1)) \leq 1.$$
Ker f slika v naravna števila, je edina možnost tako kar $f(f(1)) = 1$. Če v neenačbo vstavimo $x \to 1$, $y \to f(1)$, dobimo
$$2f(1) = f(1) + f(1) \cdot f(f(1)) \leq 1 + f(f(1)) = 2,$$
od koder sledi $f(1) \leq 1$. Znova je edina možnost kar $f(1) = 1$. Sedaj s substitucijo $x \to 1$ dobimo neenakost $y \leq f(y)$, ki velja za vsak $y \in \mathbb{N}$. Če v neenačbo sedaj vstavimo še $y \to 1$, dobimo
$$2f(x) \leq f(x) + 1 \cdot f(f(x)) \leq x + x \cdot f(1) = 2x,$$
oziroma $f(x) \leq x$ za vsak $x \in \mathbb{N}$. Edina možnost je tako kar
$$\boxed{f(x) = x \text{ za vsak } x \in \mathbb{N}.}$$
Ker velja
$$f(x) + yf(f(x)) = x + yx = x + xf(y),$$
ta funkcija res reši neenačbo.

2. Če v začetno enačbo vstavimo $x \to 0$, dobimo
$$f(f(y) + 1) = (y + 1) \cdot f(1). \tag{1}$$
Sedaj ločimo dva primera:

   i) Če velja $f(1) = 0$, v enačbo vstavimo $y \to 1$. Tako dobimo
   $$f(x \cdot 0 + f(x + 1) + 1) = 2f(x + 1).$$
   Če v tej enačbi naredimo še substitucijo $x \to x - 1$, dobimo
   $$f(f(x) + 1) = 2f(x).$$
   Če sedaj upoštevamo enačbo (1), dobimo $f(x) = 0$. Ta enakost velja neodvisno od izbire $x \in \mathbb{R}$, zato smo dobili prvo rešitev $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, ki očitno reši enačbo.

   ii) Če velja $f(1) \neq 0$, lahko dokažemo, da je funkcija f injektivna. Res, denimo, da velja $f(a) = f(b) = p$. Če v enačbo (1) namesto y zaporedoma vstavimo a in b dobimo
   $$(a + 1)f(1) = f(p + 1) = (b + 1)f(1),$$
   od koder lahko izrazimo $a = b$.
   Sedaj v začetno enačbo vstavimo še $y \to 0$. Dobimo
   $$f(xf(0) + f(x) + 1) = f(x + 1),$$

od koder zaradi injektivnosti sledi

$$xf(0) + f(x) + 1 = x + 1,$$

oziroma $f(x) = (1 - f(0)) \cdot x$. Posebej, velja $f(0) = 0$, zato dobimo kar $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker velja

$$f(xf(y) + f(x + y) + 1) = xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1) = (y + 1)f(x + 1),$$

je to res rešitev enačbe.

Vse rešitve so tako

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(x) = x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.}$$

3. Opazimo, da funkcija $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ reši enačbo. Predpostavimo torej, da obstaja tak $c \in \mathbb{R}$, da je $f(c) \neq 0$. S substitucijo $y \to c - x$ dobimo

$$f(x^2 + f(x)f(x - c)) = f(c) \cdot x,$$

od koder sledi, da je f surjektivna.

Naj bo a poljubna ničla funkcije f. S substitucijo $x \to a$, $y \to 0$ dobimo

$$f(a^2) = f(a^2 + f(a)f(0)) = af(a) = 0,$$

s substitucijo $x \to a$, $y \to c - a$ pa

$$0 = f(a^2 + f(a)f(0)) = af(c),$$

od koder sledi $a = 0$. Sledi, da je edina možna ničla funkcije f kar 0. Ker ničla obstaja zaradi surjektivnosti, sledi $f(0) = 0$.

Če v enačbo sedaj vstavimo $y \to 0$, dobimo

$$f(x^2) = xf(x).$$

Sledi

$$(-x)f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x),$$

od koder za $x \neq 0$ sledi $f(-x) = -f(x)$. Ta enakost velja tudi za $x = 0$, zato je f liha funkcija.

S substitucijo $y \to -x$ dobimo še enačbo

$$f(x^2 + f(x)f(-x)) = 0,$$

ker pa je 0 edina ničla funkcije f, sledi $x^2 + f(x)f(-x) = 0$. Upoštevajoč lihost dobimo $x^2 = f(x)^2$, oziroma $f(x) = \pm x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Predpostavimo, da za neničelni realni števili p in q velja $f(p) = p$ ter $f(q) = -q$. S substitucijo $x \to p$ in $y \to q$ dobimo

$$f(p^2 - pq) = p \cdot f(p + q),$$

od koder sledi

$$\left|p^2 - pq\right| = \left|p^2 + pq\right|.$$

Ločimo dva primera:

i) Velja $p^2 - pq = p^2 + pq$. V tem primeru dobimo $pq = 0$, kar ni mogoče, saj sta p in q neničelni realni števili.

ii) Velja $p^2 - pq = -p^2 - pq$. V tem primeru dobimo $p = 0$, kar spet ni mogoče.

Taki števili p in q torej ne obstajata. Vse rešitve enačbe so tako

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R},} \quad \boxed{f(x) = x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(x) = -x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.}$$

Vse očitno rešijo enačbo.

4. Najprej pokažimo, da je f injektivna. Denimo, da za pozitivni realni števili a in b velja $a < b$ in $f(a) = f(b)$. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ velja

$$f(x + 2a) + 2cx = f((c + 1)x + f(a)) = f((c + 1)x + f(b)) = f(x + 2b) + 2cx,$$

oziroma $f(x + 2a) = f(x + 2b)$. Če označimo $p = 2b - 2a > 0$, za vsa števila $x > 2a$ tako velja $f(x + p) = f(x)$. Sledi, da je f od nekje naprej periodična.

Izberimo nek $x > 2a$. Če v funkcijsko enačbo vstavimo $x \to x + n \cdot \frac{p}{c+1}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, dobimo

$$f((c + 1)x + np + f(y)) = f\left(x + \frac{np}{c+1} + 2y\right) + 2cx + \frac{2cnp}{c+1}.$$

Zaradi periodičnosti sledi, da je

$$f((c + 1)x + np + f(y)) = f((c + 1)x + f(y)),$$

od koder lahko sklepamo, da velja

$$f((c + 1)x + f(y)) = f\left(x + \frac{np}{c+1} + 2y\right) + 2cx + \frac{2cnp}{c+1}.$$

To pa seveda ni mogoče, saj za dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{2cnp}{c+1} > f((c + 1)x + f(y)).$$

Prišli smo do protislovja, od koder sklepamo, da je f injektivna.

V začetno enačbo sedaj vstavimo $y \to (c + 1)y + f(z)$. Dobimo

$$f((c + 1)x + f((c + 1)y + f(z))) = f(x + 2(c + 1)y + 2f(z)) + 2cx.$$

Če znova upoštevamo začetno enačbo, dobimo

$$f((c + 1)x + f((c + 1)y + f(z))) = f((c + 1)x + f(y + 2z) + 2cy),$$

oziroma

$$f(x + 2(c + 1)y + 2f(z)) + 2cx = f((c + 1)x + f(y + 2z) + 2cy).$$

Če v tej enačbi sedaj naredimo še substitucijo $y \to (c+1)y$, lahko na desni strani enačbe znova uporabimo podano enačbo:

$$\begin{aligned} f(x + 2(c+1)^2 y + 2f(z)) + 2cx &= f((c+1)x + f((c+1)y + 2z) + 2c(c+1)y) \\ &= f((c+1)(x + 2cy) + f((c+1)y + 2z)) \\ &= f(x + 2cy + 2(c+1)y + 4z) + 2c(x + 2cy), \end{aligned}$$

oziroma

$$f(x + 2(c+1)^2 y + 2f(z)) = f(x + 4cy + 2y + 4z) + 4c^2 y.$$

Izraz na desni lahko izrazimo še na en način – v začetno enačbo vstavimo $x \to 2cy$ in $y \to \frac{x}{2} + y + 2z + cy$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} f\left(2c(c+1)y + f\left(\frac{x}{2} + y + 2z + cy\right)\right) &= f(x + 4cy + 2y + 4z) + 4c^2 y \\ &= f(x + 2(c+1)^2 y + 2f(z)) \end{aligned}$$

od koder z injektivnostjo sledi

$$2c(c+1)y + f\left(\frac{x}{2} + y + 2z + cy\right) = x + 2(c+1)^2 y + 2f(z),$$

kar je ekvivalentno

$$f\left(\frac{x}{2} + y + 2z + cy\right) = x + 2cy + 2y + 2f(z).$$

Ker lahko poljubno pozitivno realno število zapišemo v obliki $\frac{x}{2} + y + cy$, sledi

$$f(x + 2z) = 2x + 2f(z)$$

za vse $x, z \in \mathbb{R}^+$. Sedaj v to enačbo vstavimo še $x \to f(x)$. Tako zaradi simetrije sledi

$$f(f(x) + 2z) = 2f(x) + 2f(z) = f(2x + f(z)).$$

Če sedaj vstavimo $z \to 1$ in upoštevamo injektivnost, dobimo

$$f(x) + 2 = 2x + f(1),$$

oziroma $f(x) = 2x + d$. Preizkus pokaže, da je edina rešitev

$$\boxed{f(x) = 2x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.}$$