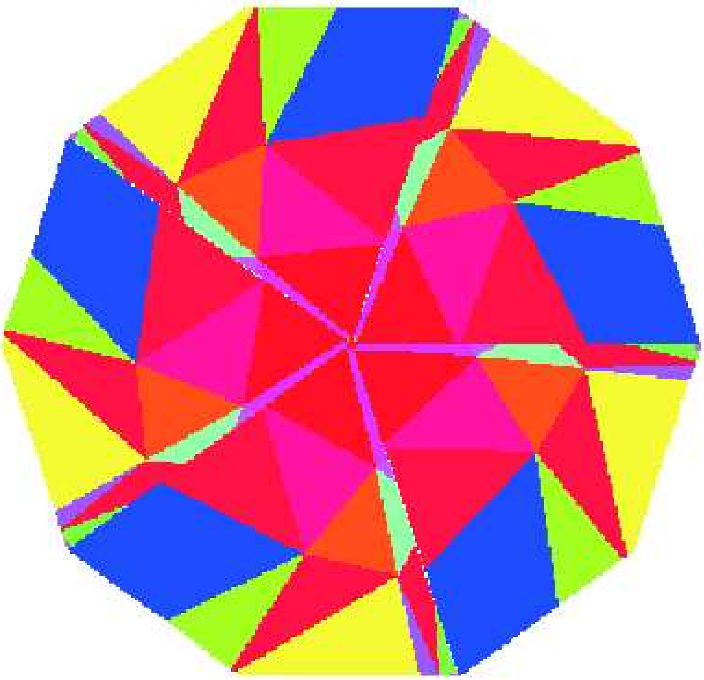
DISKRETNE RAVNINSKE GRUPE

MATEMATIČNA DELAVNICA

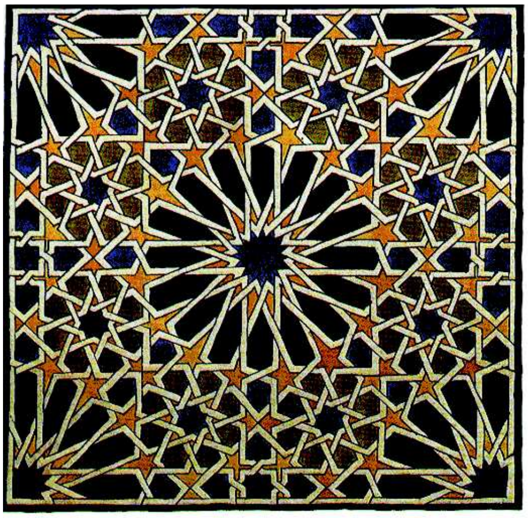
Izidor Hafner

Darjo Felda

Tomislav Žitko



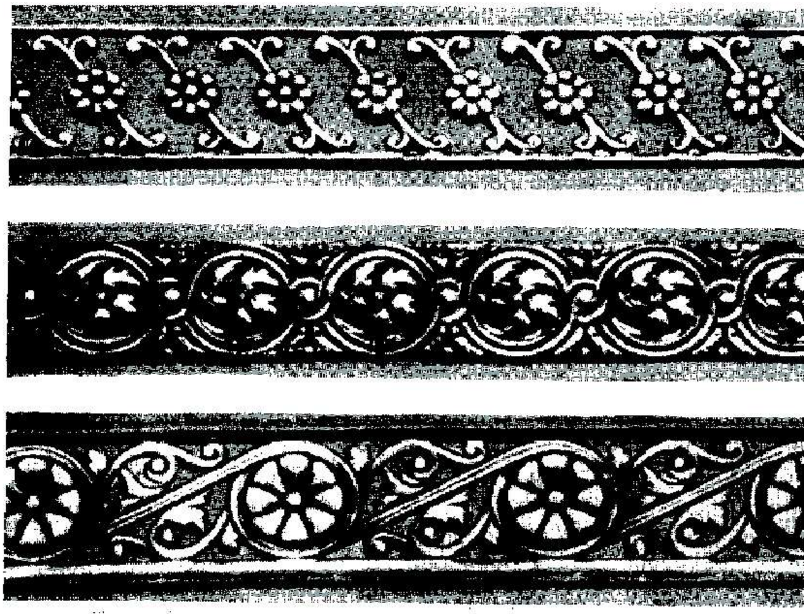
1. Uvod



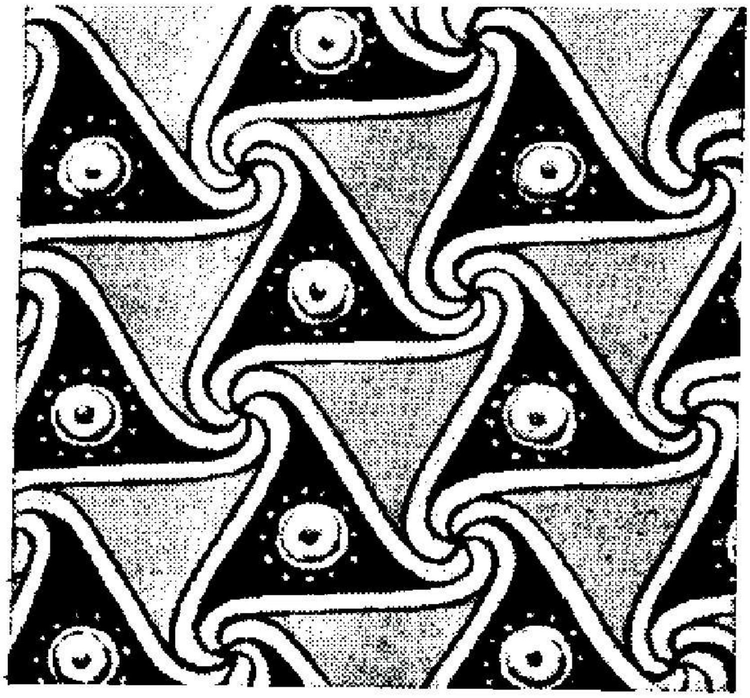
Simetrijo v ravnini so poznali že v najstarejših kulturah. Stari Egipčani so okrasili posode s slikami, za katere bi v današnjem jeziku rekli, da predstavljajo modele različnih simetrijskih grup. V umetnosti je takšne motive večkrat uporabljal holandski grafik *M. C. Escher*. Na desni sliki je mozaik iz *Alhambre*, ki ga je slikar narisal leta 1922, to je na začetku svoje kariere [4].

V tem primeru lahko govorimo o rotacijski simetriji, medtem ko pravega zrcaljenja preko premice v resnici nimamo.

Če razen omenjenih dveh preslikav uporabimo še premik, lahko dobimo slike s ponavljajočim motivom. Včasih kombiniramo premik (translacijo) z zrcaljenjem. Tako dobimo zrcaljenje z zdrsom. Če dovolimo premike le v določeni smeri dobimo (linearne) ornamente. Tri primere prikazuje spodnja slika.

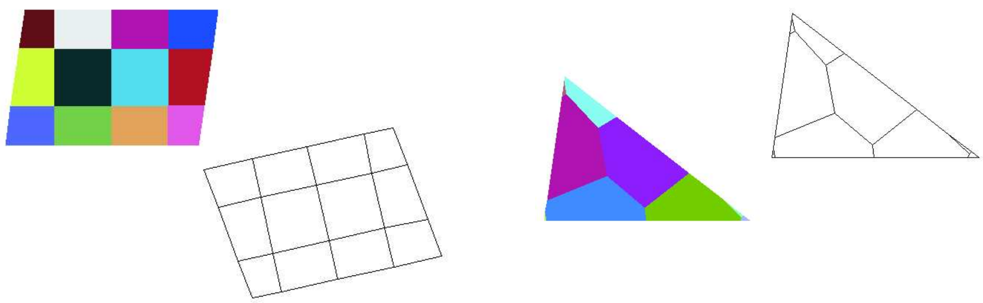


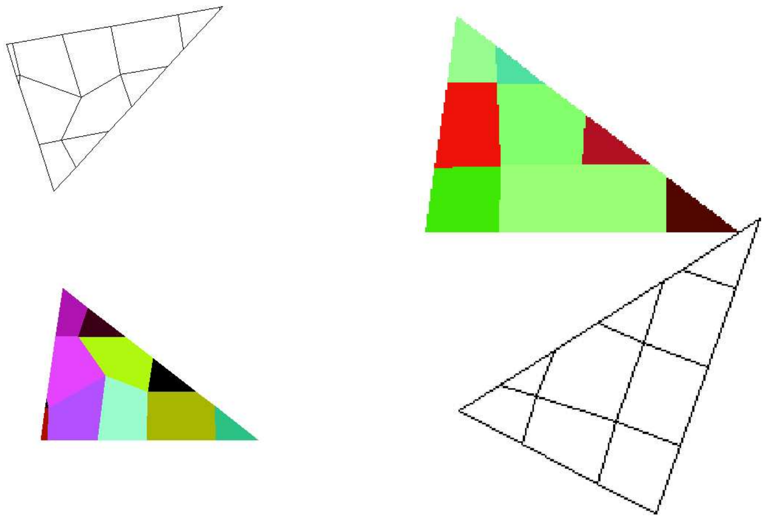
Če dovolimo premike v dveh smereh, dobimo ravninska pokritja.



2. Preslikave, ki ohranjajo razdalje

Premik in zavrtitev ohranjata razdalje in tudi orientacijo. Takim preslikavam matematiki rečejo *direktne izometrije*. Zrcaljenje in zrcaljenje z zdrsom ohranjata razdalje in obrneta orientacijo. V naslednjih štirih primerih nastopajo vse štiri preslikave. Potrebno pa je en lik še pobarvati. Ta in vse naslednje naloge so narejene z računalniškim programom.





3. Leonardove grupe

Že v tretjem razredu OŠ smo se srečali s pojmom *celega (polovice, četrtine) vrtljaja*. Vemo tudi, da celoto razbijemo na dve polovici, tri tretjine ... deset desetin. Pri tem uporabimo krog za celoto, deli pa so skladni izseki. Skladnost ugotovimo z vrtenjem. Pogosto uporabimo tudi pravilni večkotnik za celoto.

Drugi tip simetrije srečamo pri somernih likih. Iščemo število somernic, dopolnjujemo like, tako da bomo dobili someren lik.

V matematičnem jeziku govorimo v prvem primeru o *rotacijski simetriji*, v drugem pa o *zrcaljenju preko premice*.

Lahko si zastavimo vprašanje, koliko somernic ima lik. Če pa le-ta nima nobene somernice, se vprašamo, na koliko delov je razbita celota.

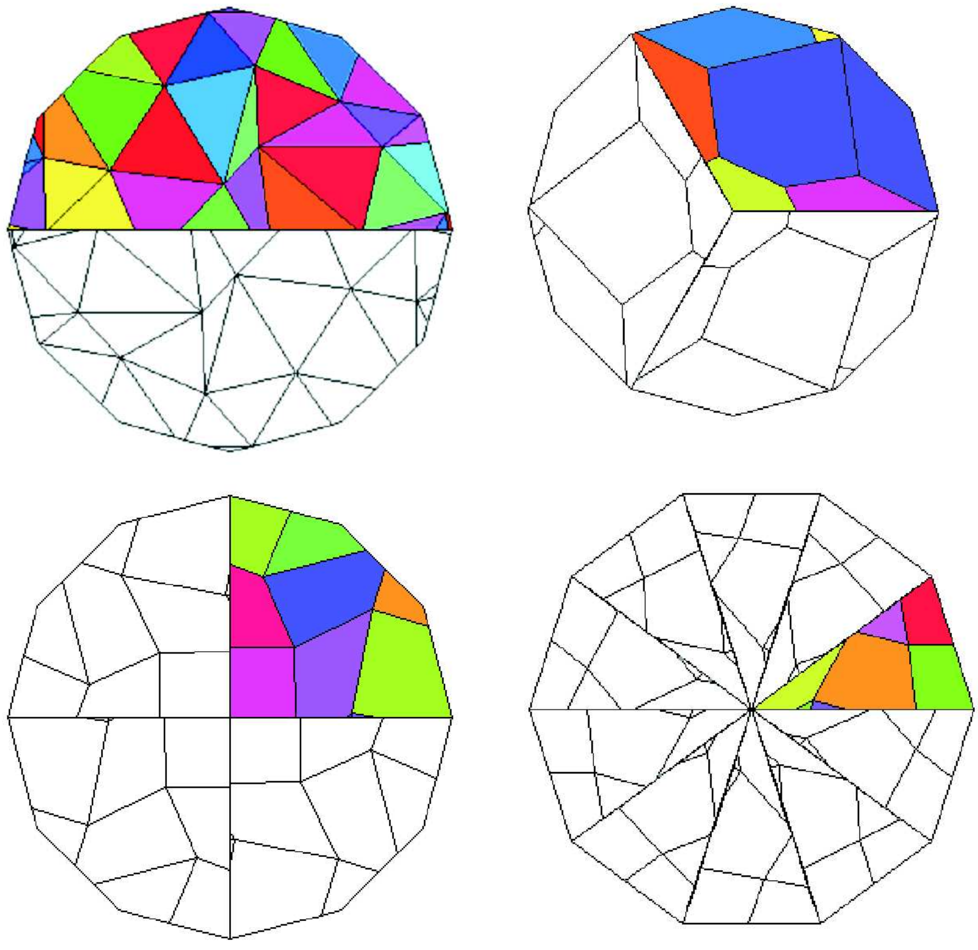
Če lik nima somernic in je razbit na n skladnih delov, ki jih dobimo z zavrtitvijo enega dela, označimo tip simetrije s C_n, če pa ima n somernic, je oznaka D_n.

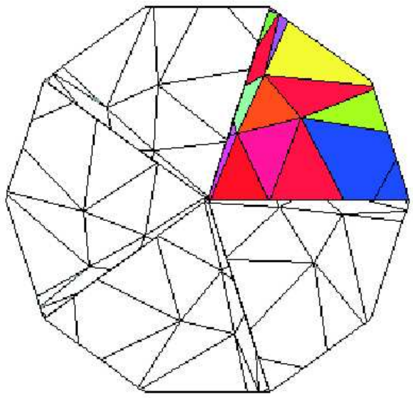
Oznake so take zato, ker gre v prvem primeru za *ciklično grupo* C_n, v drugem primeru pa za *diedrsko grupo* D_n. Pojem grupe je eden od ključnih pojmov sodobne matematike, za pouk in razumevanje šolske matematike pa ni prav nič potreben. Vprašanja, ki si jih zastavljamo, so: *Kolikokrat moramo zavrteti četrtino za četrt vrtljaja, da bo spet na svojem starem mestu?* ali *Kaj se zgodi, če nekaj zavrtimo za cel vrtljaj?* ali *Kaj dobimo, če dvakrat zavrtimo za četrt vrtljaja?*

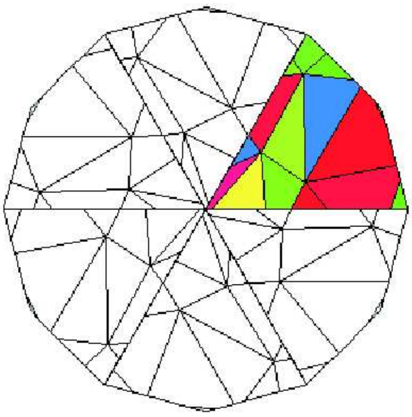
Znan je izrek *Leonarda da Vincija*, ki pravi, da *je vsaka končna grupa izometrij v ravnini bodisi ciklična grupa bodisi diedrska grupa*. Da Vinci je prišel do tega izreka ob načrtovanju zgradb. Prav tako moramo vedeti, da prvo grupo generira en sam zasuk, drugo pa zasuk in eno zrcaljenje. Na koncu omenimo še pojem *osnovnega (fundamentalnega) področja*. To je lik, s katerim popolnoma in brez prekrivanja pokrijemo celoto tako, da na njem uporabimo elemente grupe kot preslikave. Osnovno področje ni enolično določeno, vendar pa praviloma zanj izberemo najenostavneši lik [5].

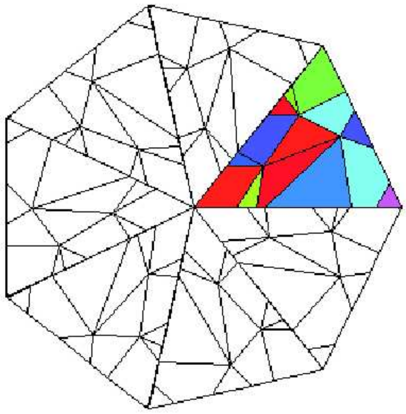
Program za generiranje nalog je narejen tako, da izbrano osnovno področje razdeli na slučajne manjše večkotnike, ki jih lahko tudi pobarva. V primeru diedrske grupe to področje še prezrcali preko somernice, nato pa se novi lik zavrti za primerne kote do pokritja celote. V program smo vstavili podatke o grupah C_2 do C_{10} in D_1 do D_9, torej za 18 grup.

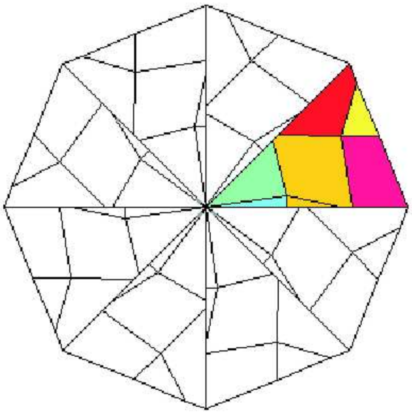
Pri naslednjih nalogah je osnovno področje pobarvano, pobarvati je treba cel lik.

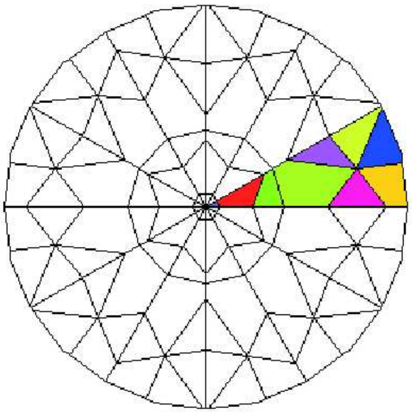


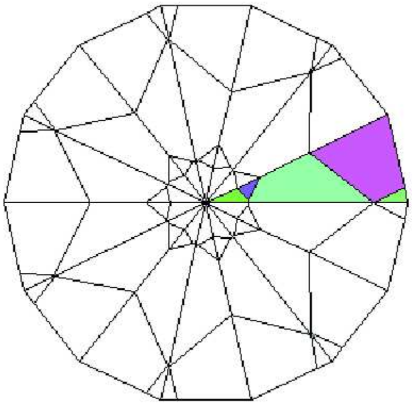






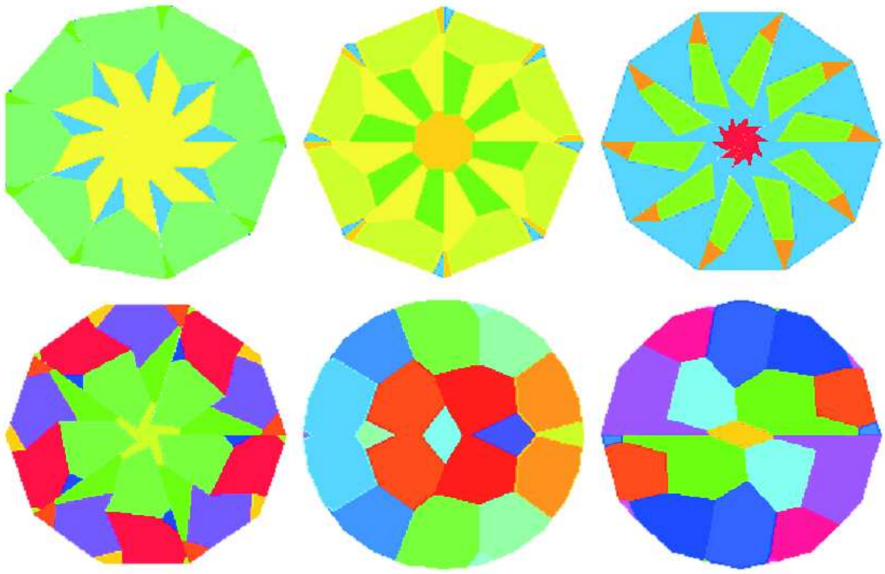




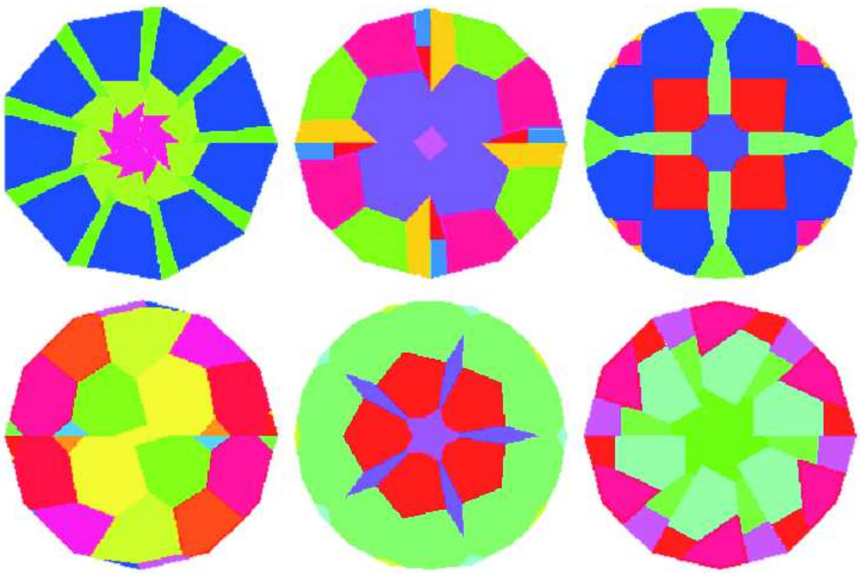


V naslednjih nalogah je izbrano po 6 primerov. Za vsak primer ugotovi, katera grupa nastopa.

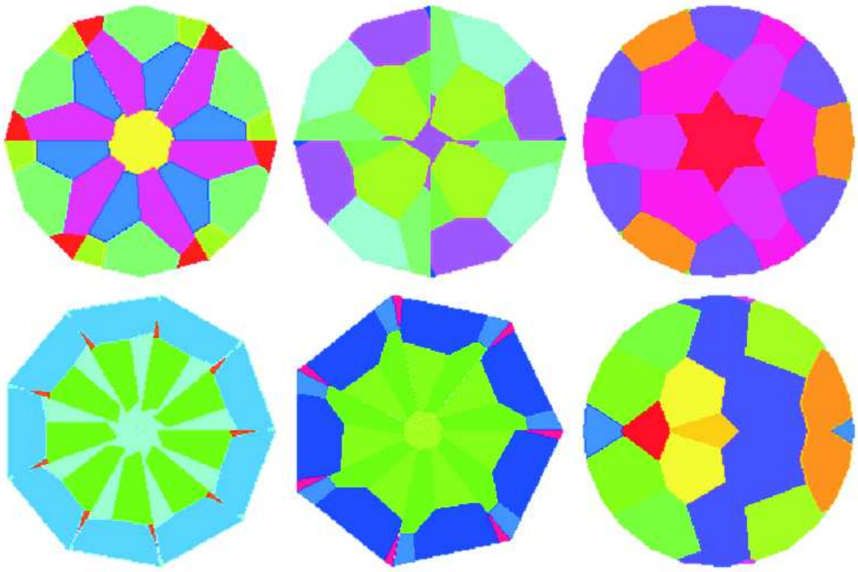
1.



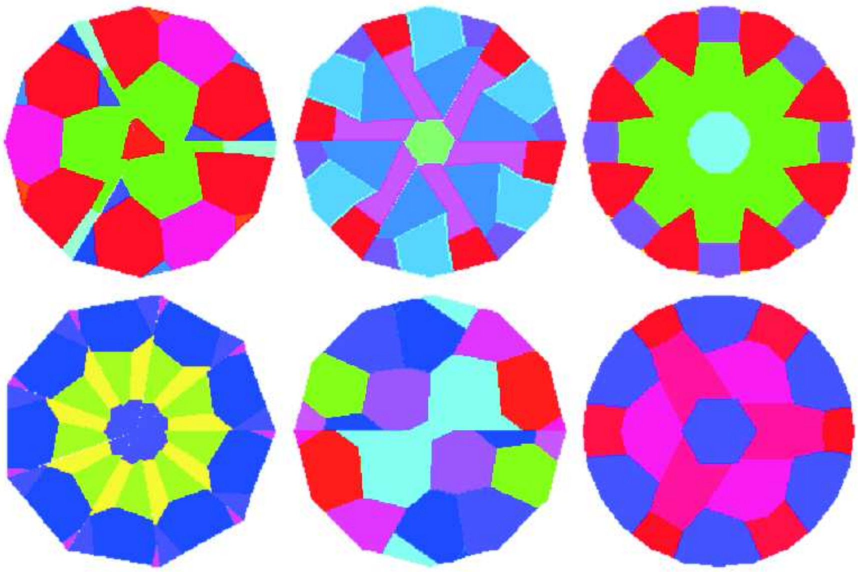
2.



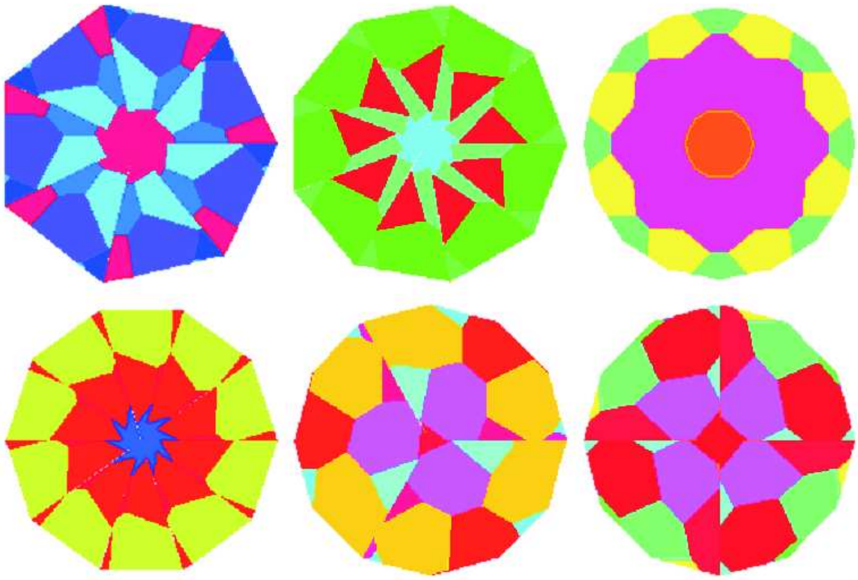
3.



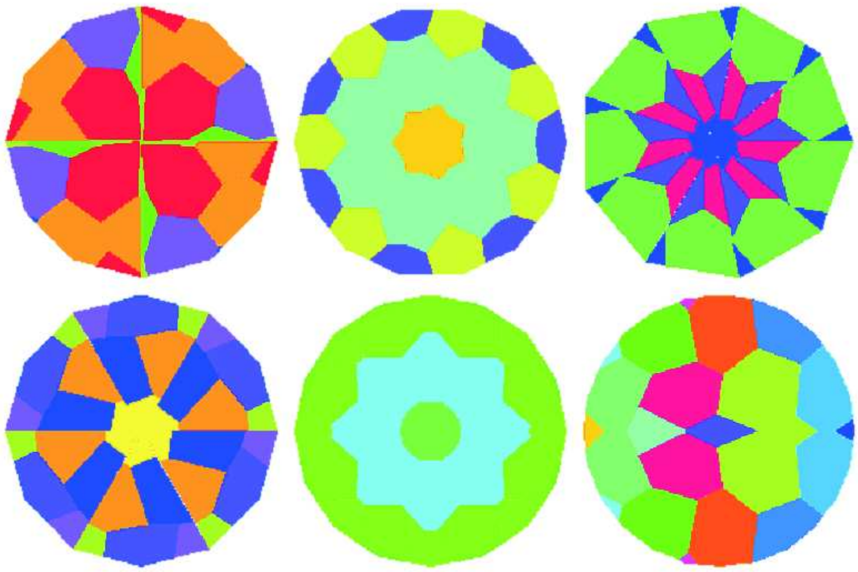
4.



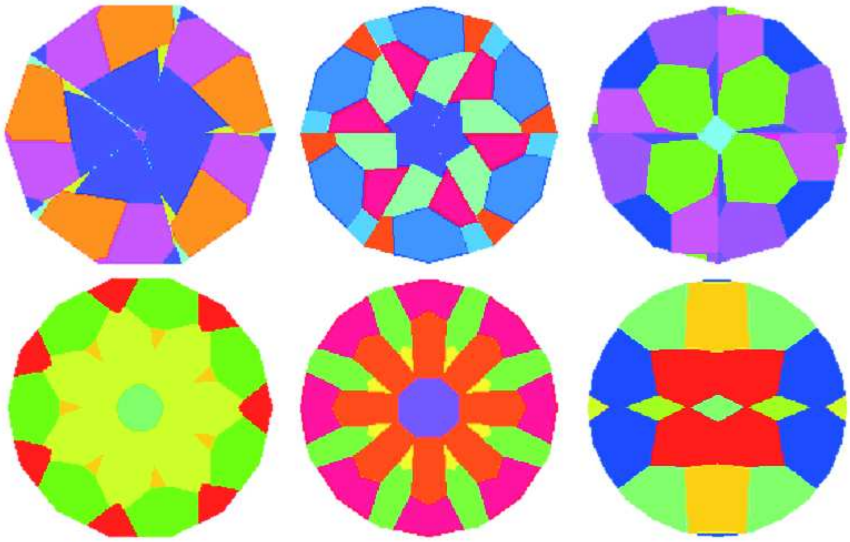
5.



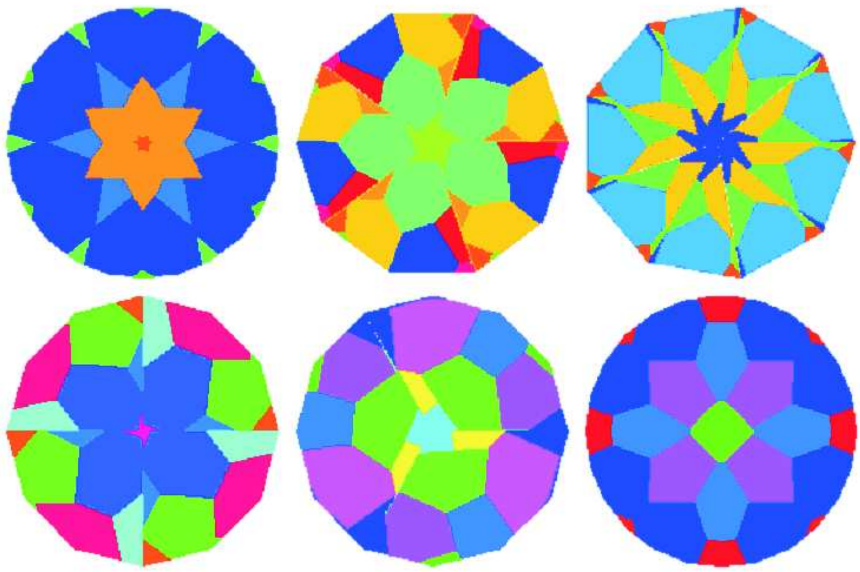
6.



7.



8.

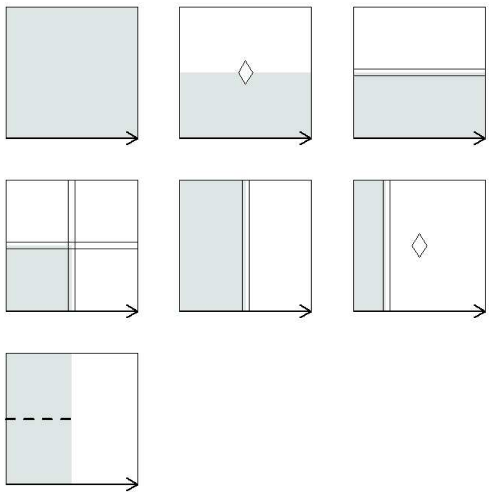


4. Sedem grup linearnih ornamentov

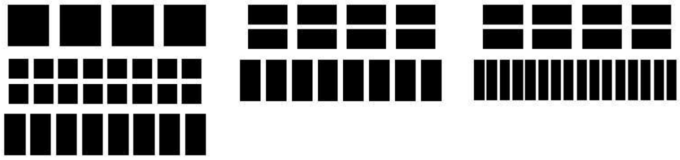
Linearne ornamente najdemo pri frizih starejših hiš, pri obrobah stropov, pa tudi pri okvirjih slik in drugih lesenih predmetih.

Osnovna značilnost te okrasne oblike je, da ostane nespremenjena pri nekem najmanjšem premiku. Prisotne so še druge izometrije. Čeprav obstaja neskončno variacij teh oblik, obstaja samo sedem možnih tipov ornamentalnih frizov, če zanemarimo dimenzije in subjektivne značilnosti ter upoštevamo le simetrije, ki ohranjajo oblike.

Do teh lahko pridemo s pomočjo ravninskih grup ornamentov (oz. ravninskih kristalografskih grup), če se omejimo na eno smer gibanja. V našem primeru bo to os x. Vsak ornament ima os pomika, ki je v našem primeru vzporedna osi x. Sedem linearnih grup lahko strnemo v tabelo:



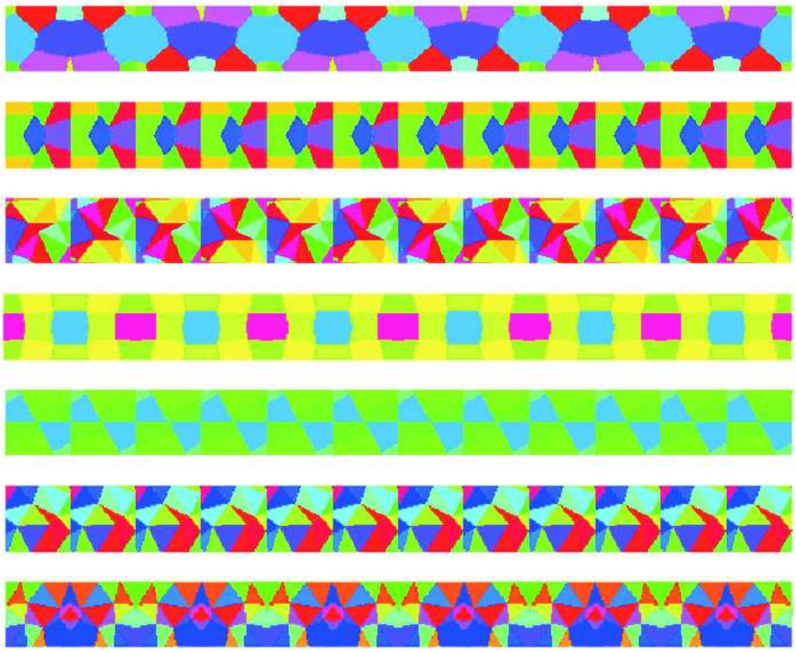
Na sliki je vsaka grupa podana z generatorji. Vselej imamo premik v smeri osi x. Pri prvi grupi je to edini generator. Druga grupa vsebuje še polobrat, tretja zrcaljenje glede na os pomika, četrta zrcaljenje glede na os pomika in glede na premico, ki je na os pravokotna, peta vsebuje samo zrcaljenje preko pravokotnice na os, šesta zrcaljenje preko pravokotne osi in polobrat, sedma pa zrcaljenje z zdrsom. Osenčena površina nam pomeni osnovno območje, to je področje, kjer narišemo osnovno obliko, s premikom katere izpolnimo kvadrat, ki ga nato pomikamo vzdolž osi. Kvadrat ima vlogo osnovne celice. Naslednja slika nam predstavlja ornamente, kjer smo za motiv izbrali nekoliko zmanjšano osnovno področje.



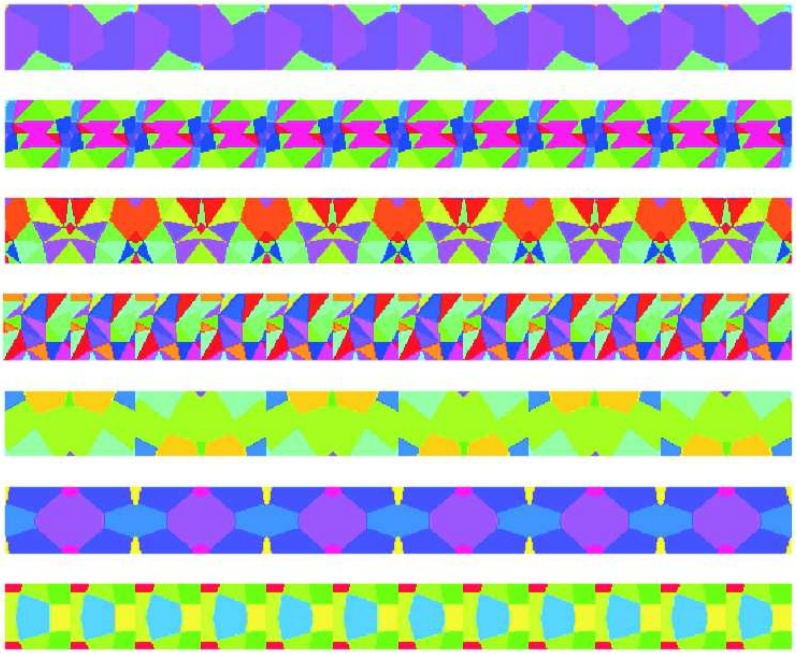
Namesto pomanjšane osnovne celice bomo vzeli za motiv trapez. Zdaj so delovanja generatorjev grupe še bolj razvidna.

Pri naslednjih nalogah je treba določiti grupo, ki ji ornamet pripada. V vsaki nalogi nastopa vseh sedem grup, vendar ne nujno v vrstnem redu, kot smo jih predstavili.

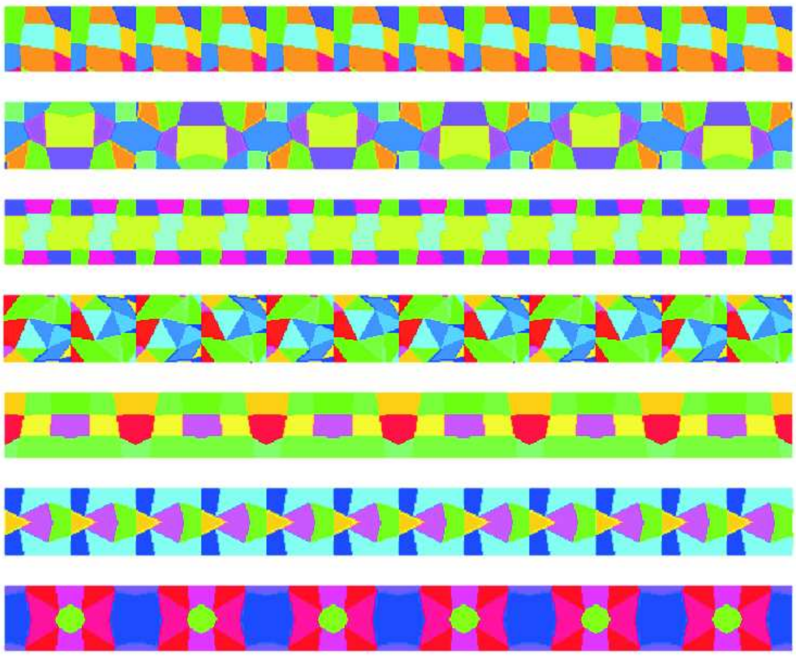
1.



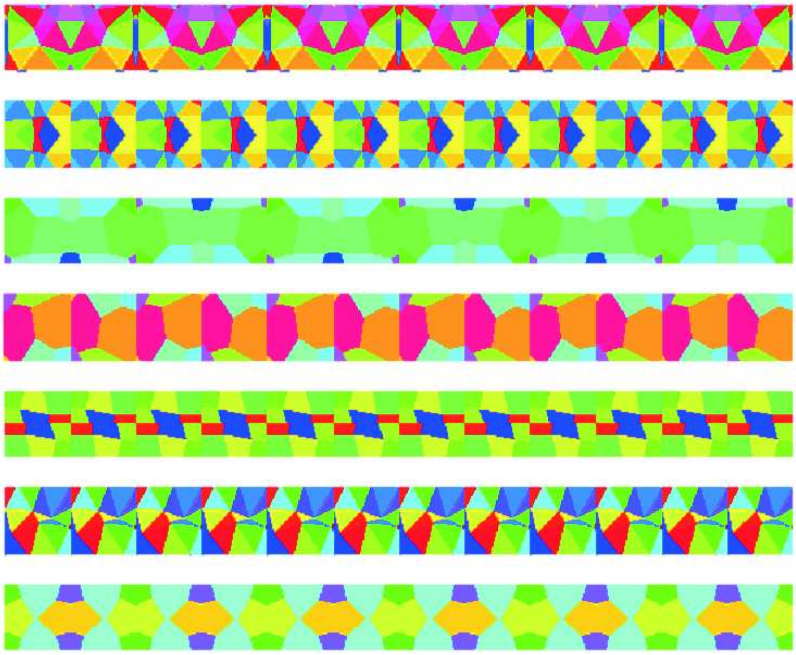
2.



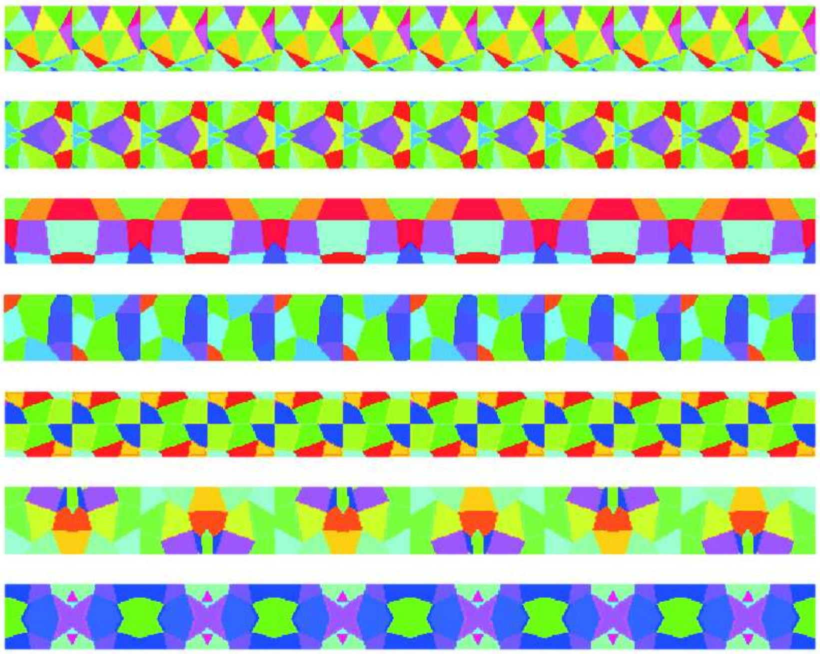
3.



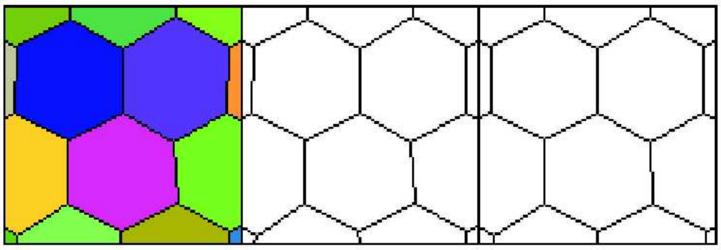
4.

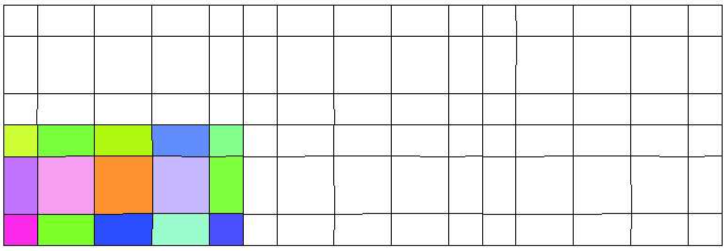


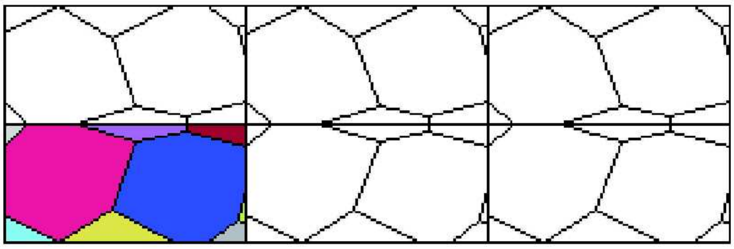
5.

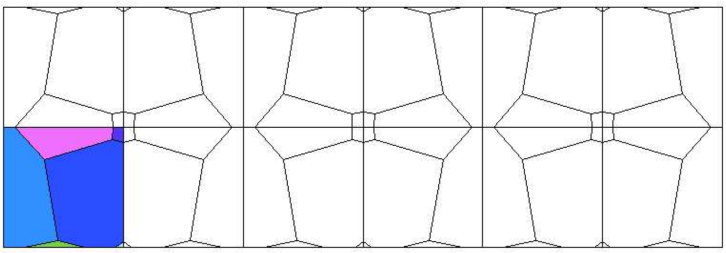


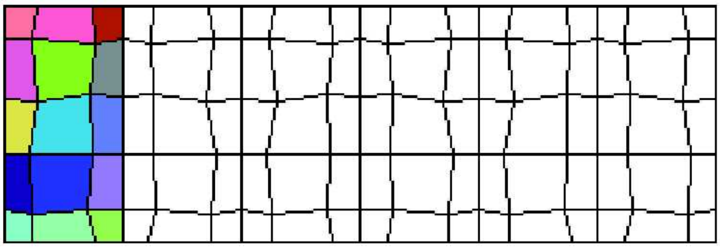
Pri naslednjih nalogah obarvajte ornament v skladu z njegovo grupo.

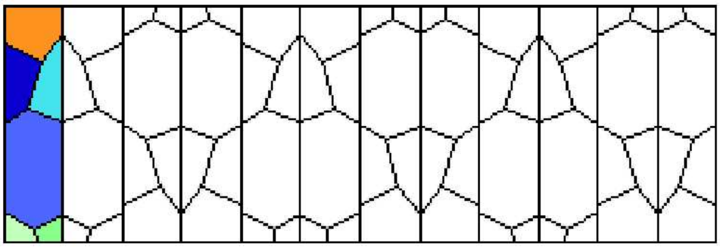


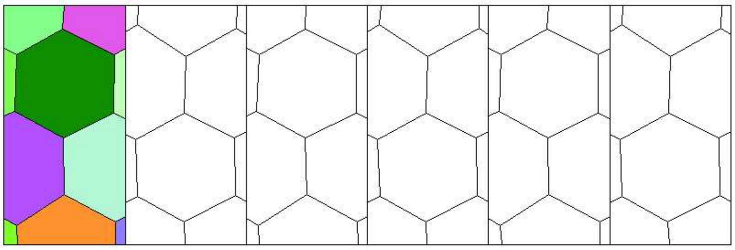












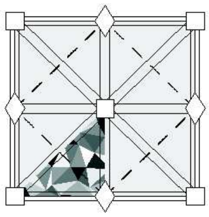
Zanimivo je, da je Fedorov prvi naštel 17 ravninskih grup, in sicer leta 1891, potem ko je že leta 1885 naštel vseh 230 prostorskih kristalografskih grup. Šele leta 1926 je Niggli preštel grupe linearnih ornamenov [1].

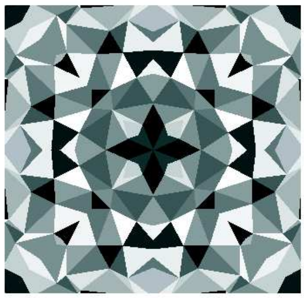
5. Ravninske kristalografske grupe

Obstaja 17 ravninskih grup, ki imajo to lastnost, da pri izbranem osnovnem (fundamentalnem) področju lahko ravnino pokrijemo z liki, ki so skladni s tem področjem, tako da uporabimo elemente grupe kot transformacije v ravnini. Vsaka taka grupa vsebuje translacijo v dveh smereh, lahko pa tudi druge elemente: rotacije za določene kote, simetrije glede na premico (zrcaljenje) in zrcaljenje z zdrsom (glede na neko premico in določen premik na tej premici).

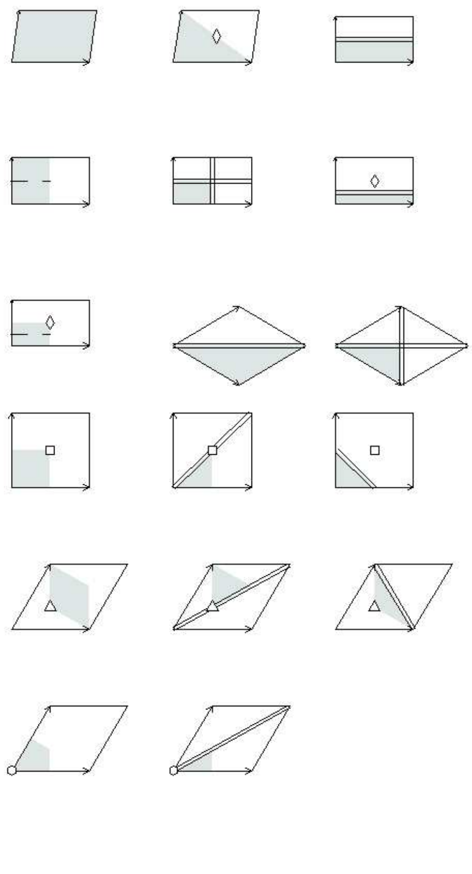
Mednarodna kristalografska organizacija je za grafični prikaz teh grup izbrala naslednje oznake: premik označuje kar s puščico (vektorjem), zavrtitev s pravilnim večkotnikom, rotacijo za iztegnjeni kot pa z rombom. Premica, preko katere zrcalimo, je podana z dvojno črto, zrcaljenje z zdrsom pa s črtkano črto.

Naslednji primer prikazuje 11. grupo:

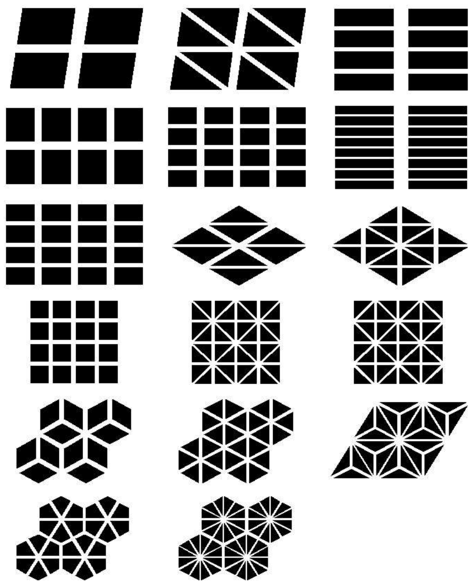




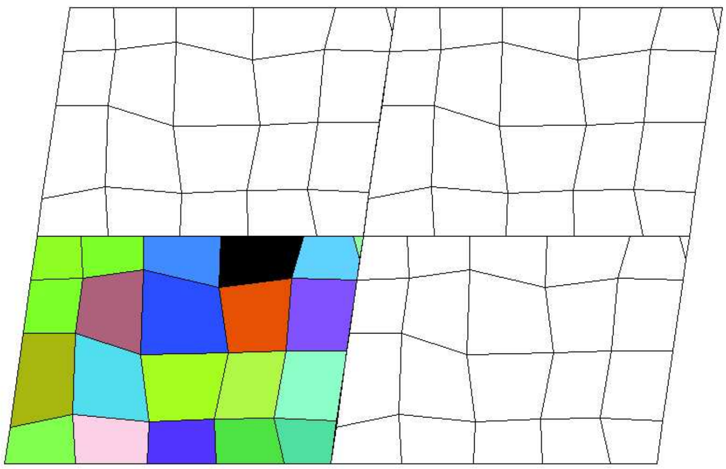
Zdaj bomo za vseh 17 grup prikazali osnovno področje (črni likec je nekoliko zmanjšano osnovno področje), na katerega delujejo določeni elemeti grupe, tako da dobimo lik (osnovno celico), s premiki katerega pokrijemo celotno ravnino.

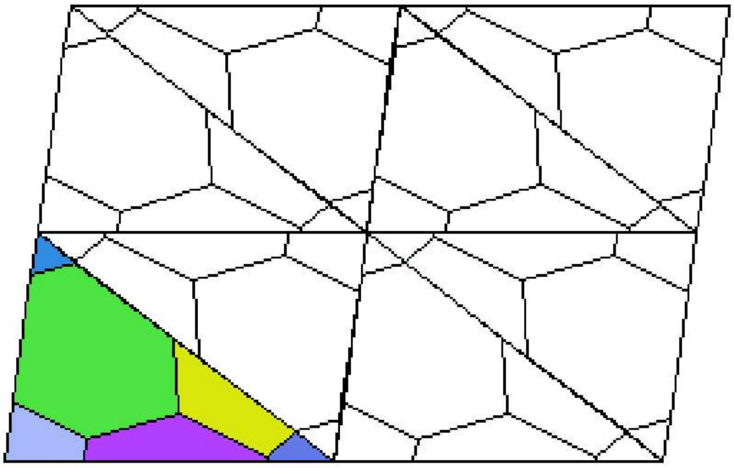


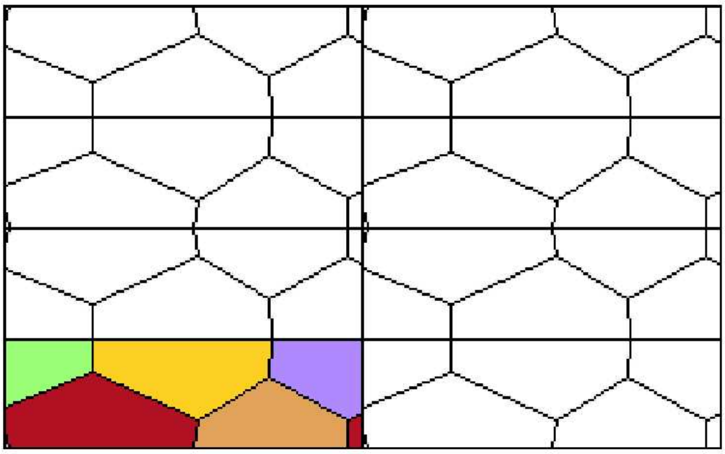
Na spodnji sliki smo naredili le po 4 kopije celic.

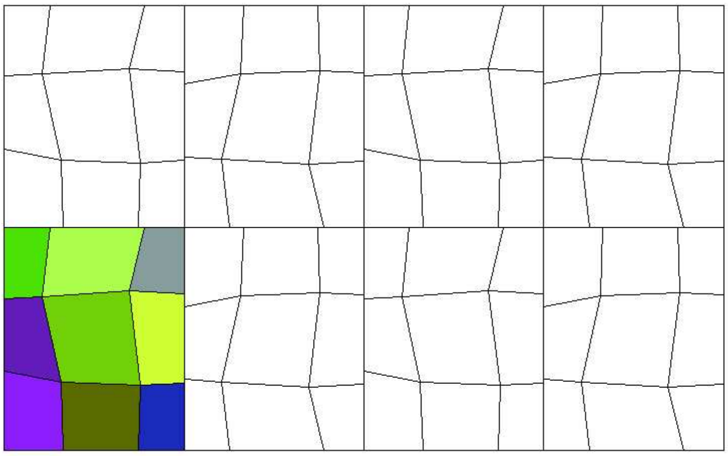


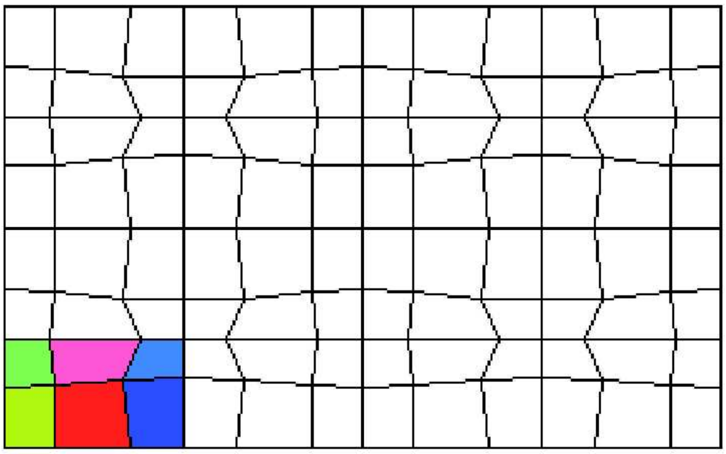
V naslednjih nalogah je pobarvano osnovno področje, pobarvati je potrebno cel lik.

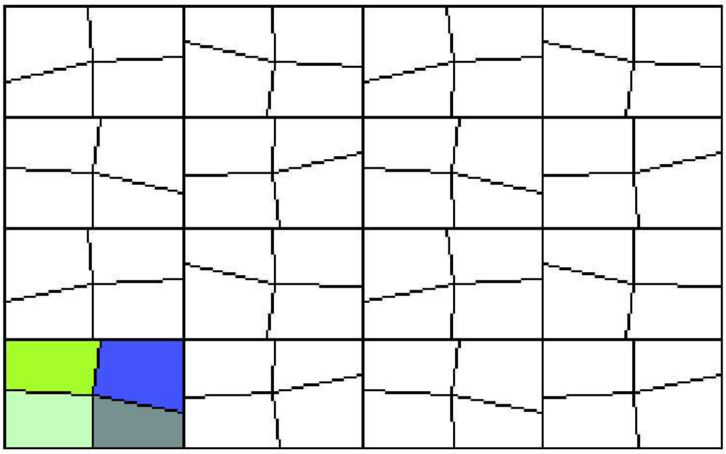






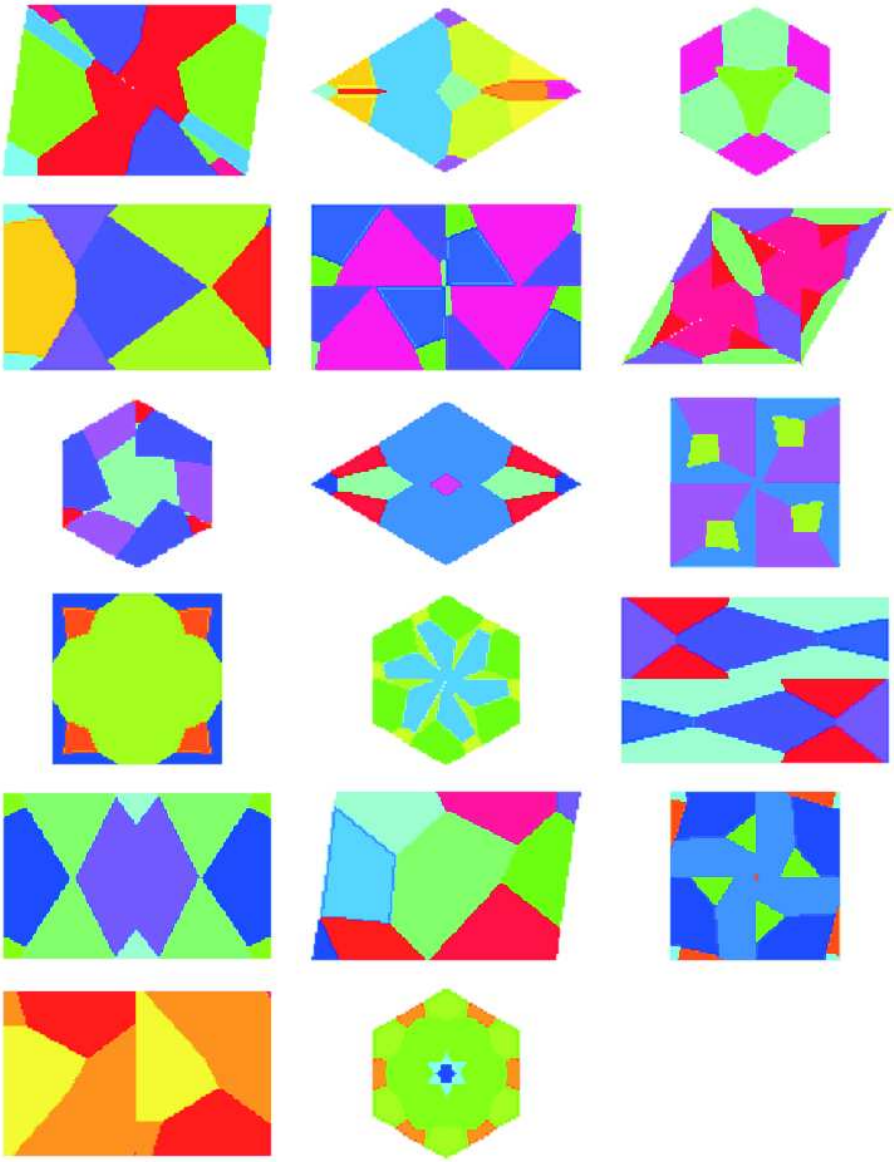




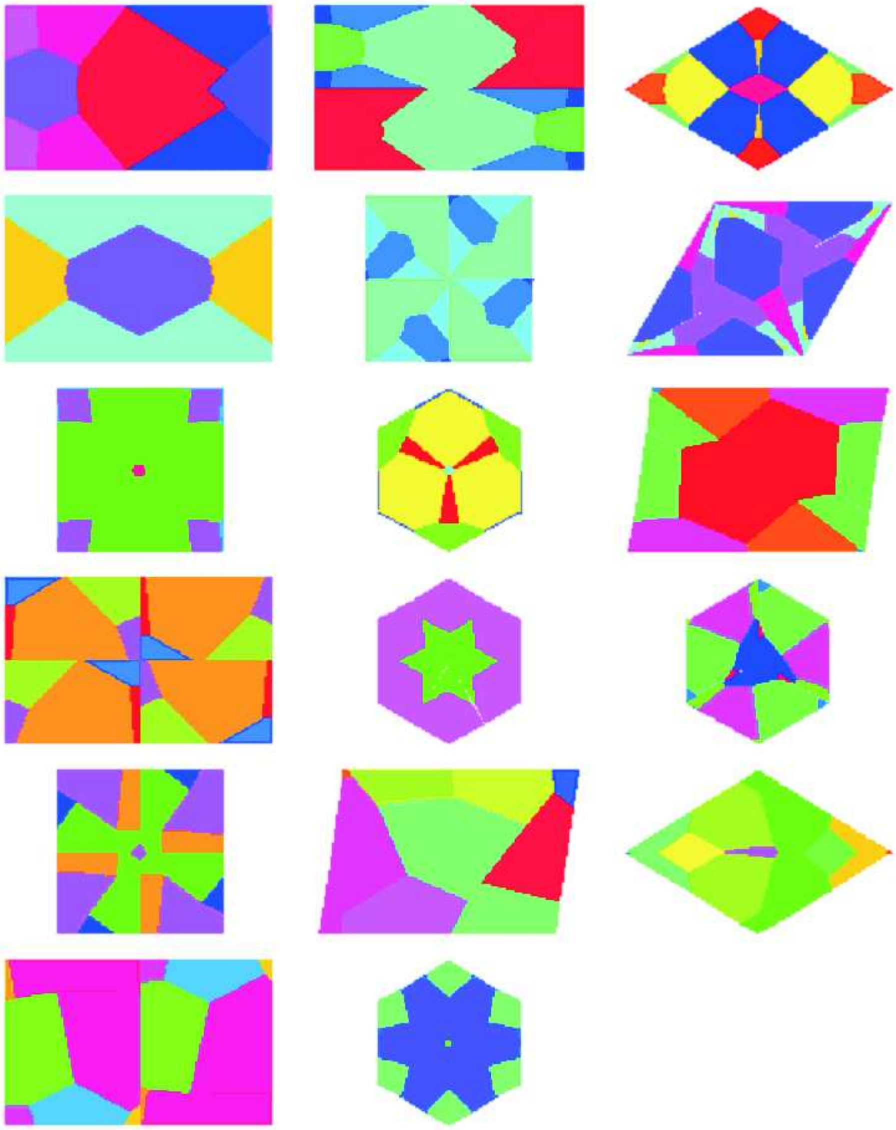


Slike v vsaki izmed petih nalog na naslednjih straneh prikazujejo vseh 17 ravninskih kristalografskih grup, vendar v slučajnem vrstnem redu. Ugotovi zaporedno številko grupe, ki jo prikazujejo posamezne slike.

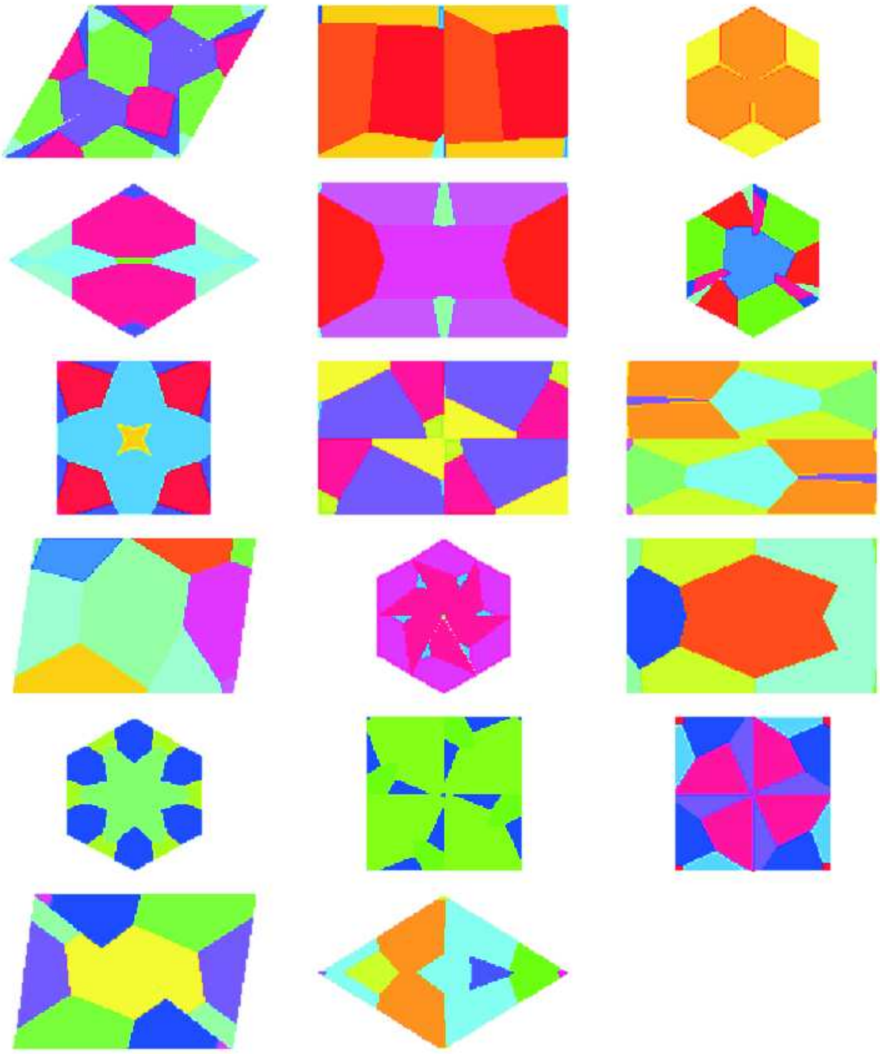
1.



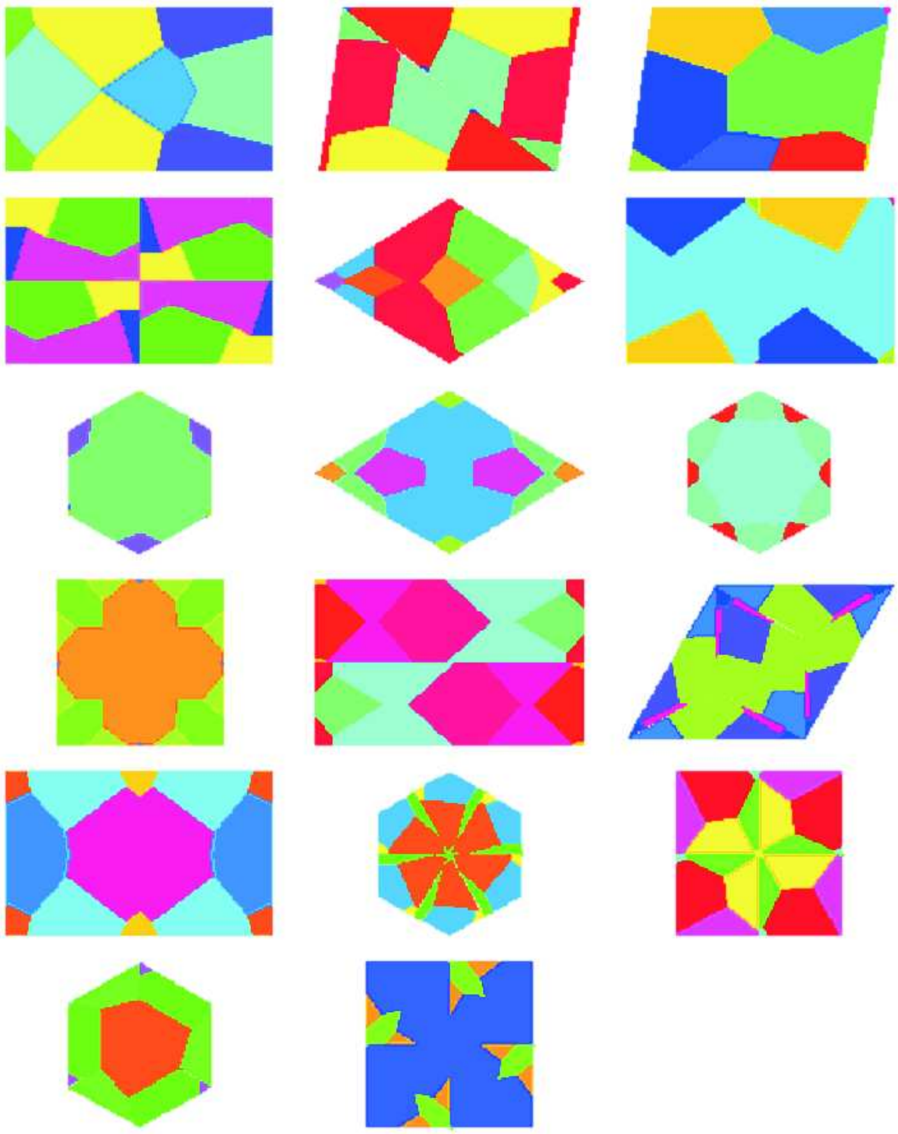
2.



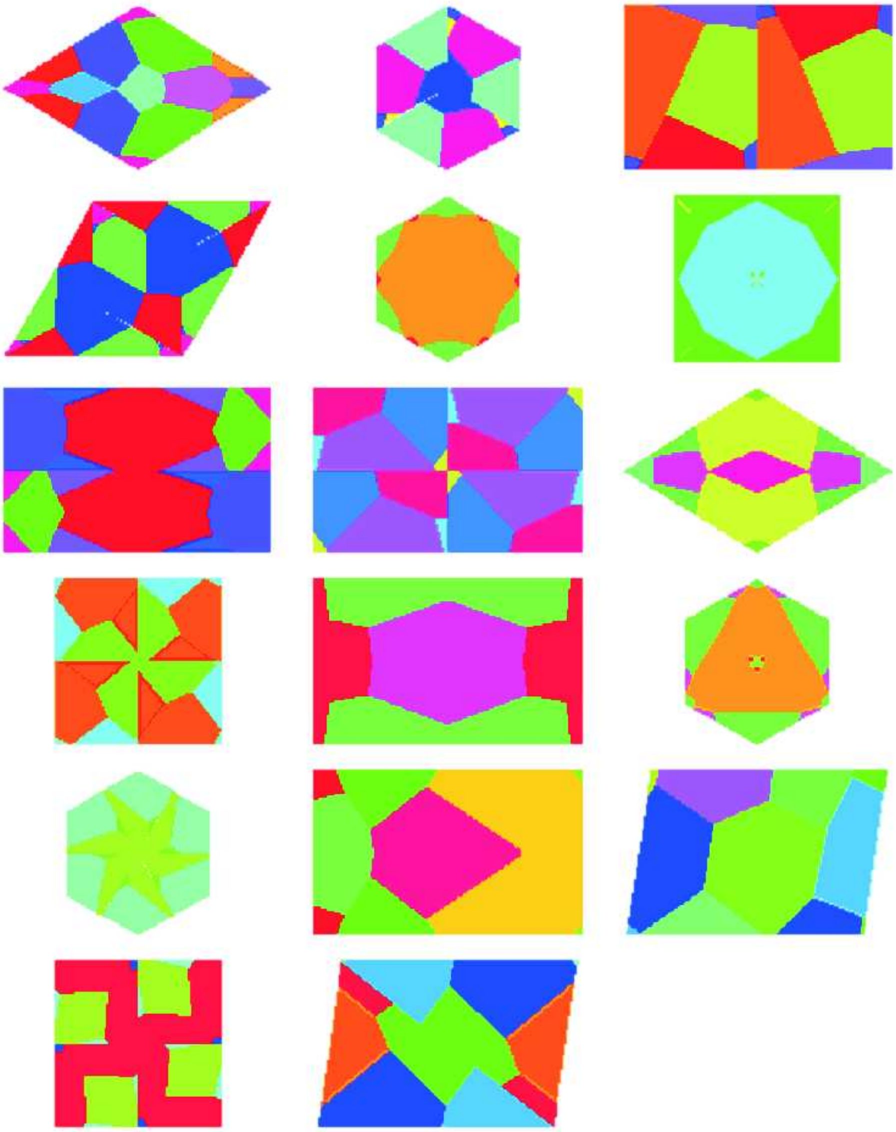
3.



4.

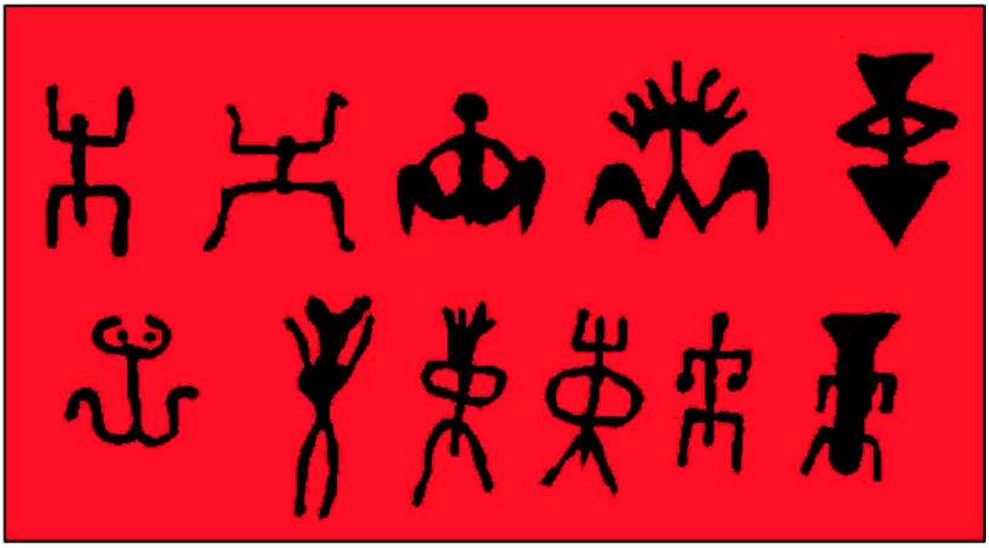


5.



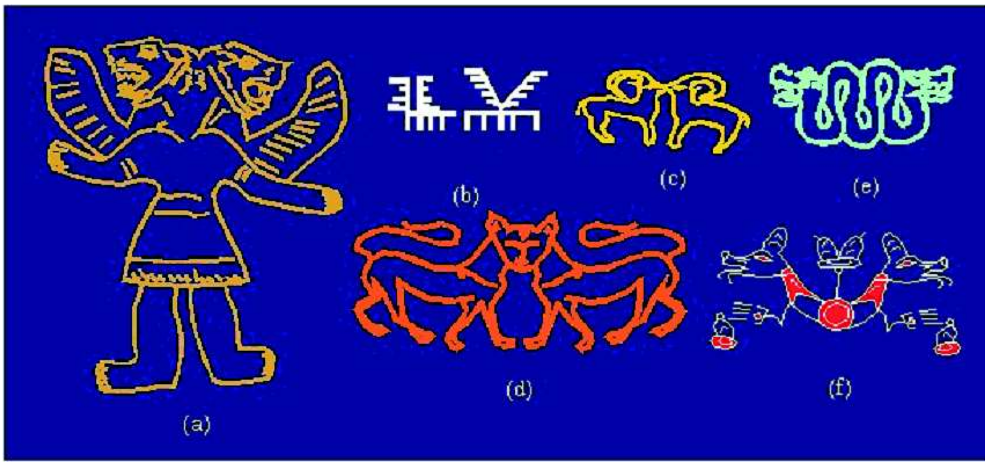
6. Simetrija skozi tisočletja

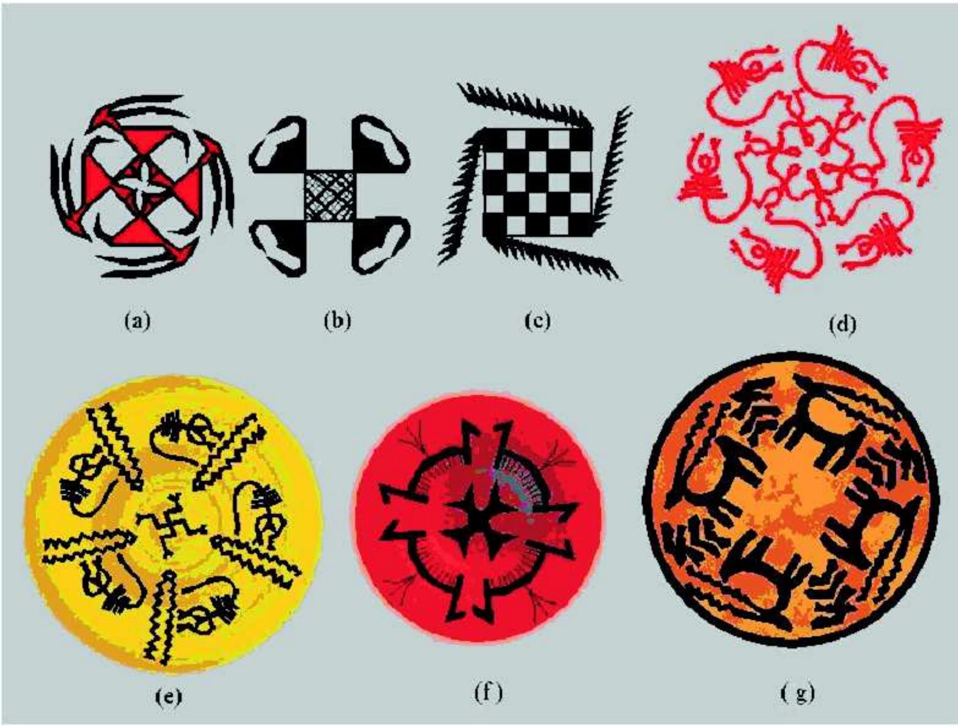
Pridobljeno znanje bomo izkoristili za boljše razumevanje umetnostnih stvaritev v tisočletni zgodovini in prazgodovini. Simetrija je že zgodaj pritegnila človekovo pozornost.



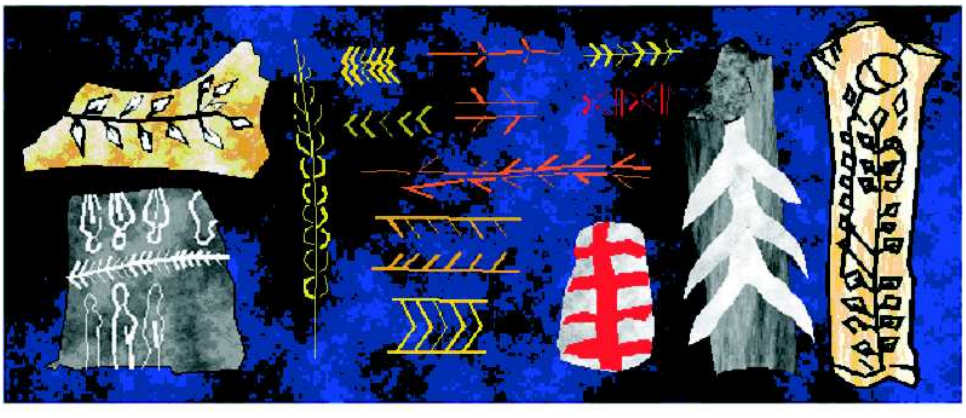
Zgornja slika prikazuje stilizirane človeške podobe simetrije D_1 iz paleolitika in neolitika s področja Italije in Španije.

Tudi na spodnji sliki so primeri simetrije tipa D_1: (a) dvoglavi krilati lev (Tell Hallaf, 5000 let pred našim štetjem), (b) jamske risbe (La Pileta, Španija), (c) umetniški motiv iz predfaraonskega obdobja (Egipt), (d) motiv z jonske amfore, (e) dvoglava mayevska kača, (f) primitivna umetnost ameriških indijancev.

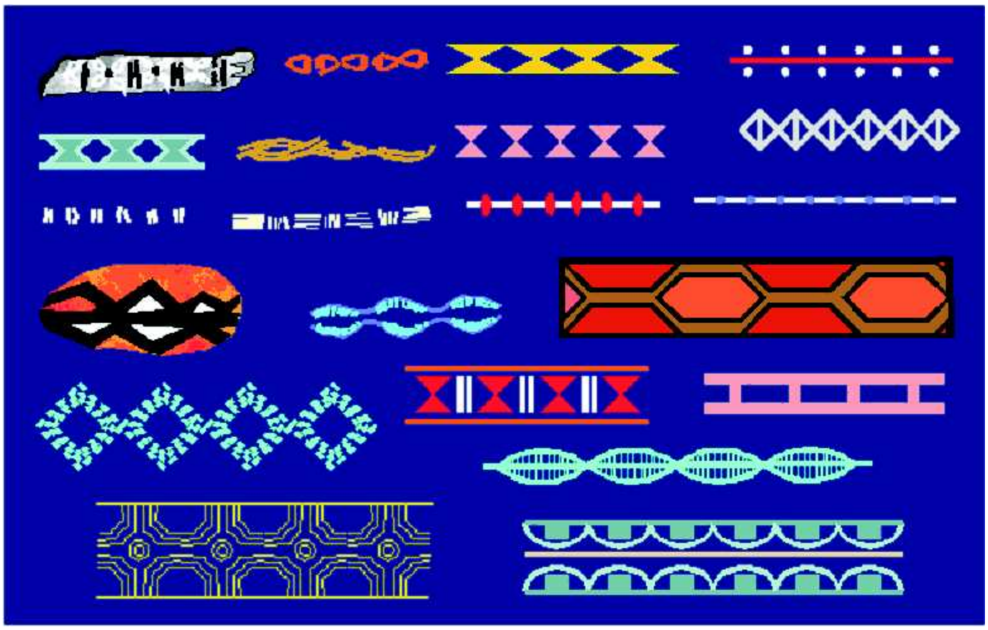




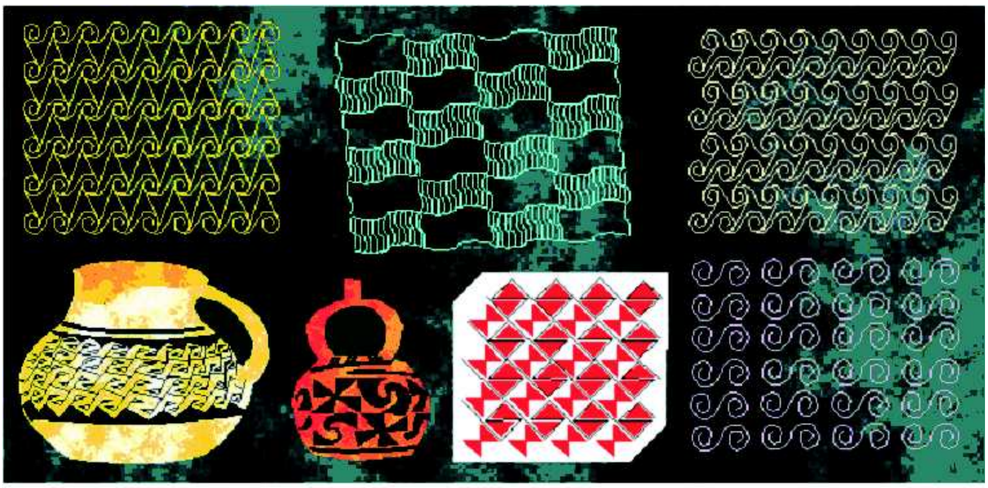
Primeri grup D in C na neolitski keramiki srednje Azije: (a) C_4, (b) C_6, (c) C_5, (d) D_4, (e) C_4, (f) D_4, (g) C_4 ((a) – (d), (g) Samara; (e), (f) Susa; okoli 5500 – 5000 pred našim štetjem).



Frizi paleolitske umetnosti (Maz d'azil, La Madlene, Barma Grande, Laugerie Base; okoli 10000 pr. n. š.)



Frizi iz paleolitika (Magdalenian, okoli 10000 pr. n. š.)



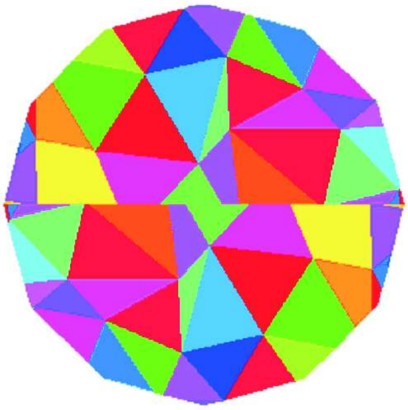
Tlakovanja z ravninskimi grupami: (a) Egejska kultura in Egipt, (b) Knossos, (c) Peru pred Kolumbom, (d) umetnost Pueblo indijancev, (e) Indonezija.

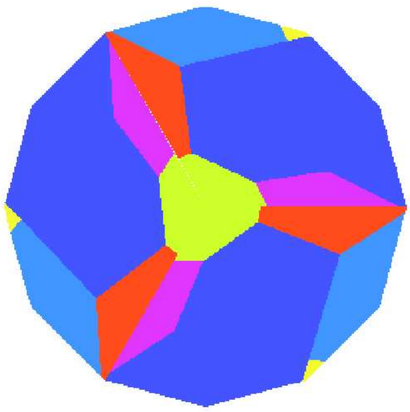
Primeri ravninskih grup neolitske umetnosti: (a) tripolinska kultura (Rusija) okoli 4000 pr. n. št., (b) Hallaf, okoli 6000 pr. n. št., (c) Catal Hujuk, okli 6400 – 5800 pr. n. št.

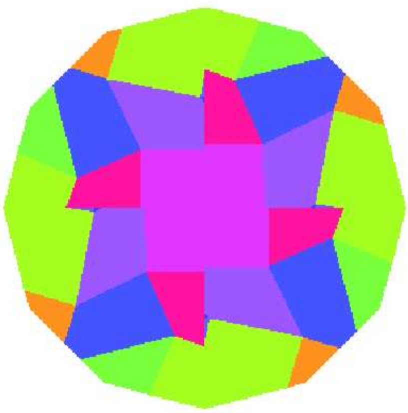
Zgledi so vzeti iz [3], kjer najdete še več primerov.

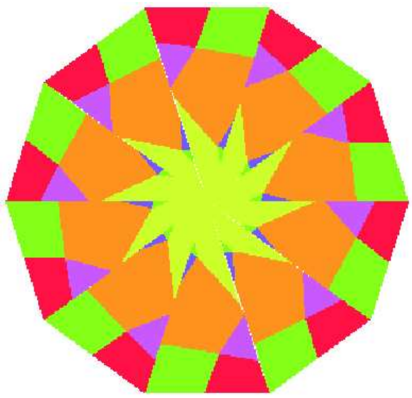
Rešitve:

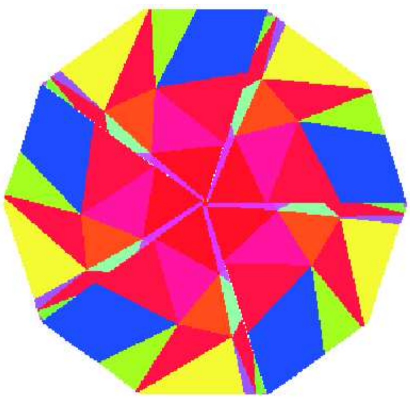
3. poglavje

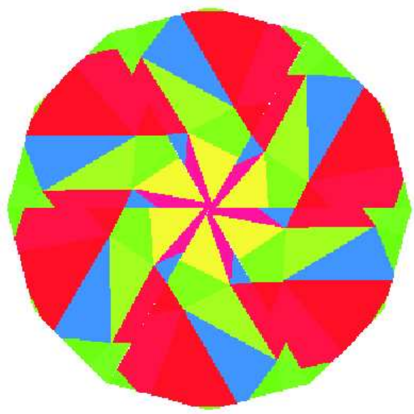


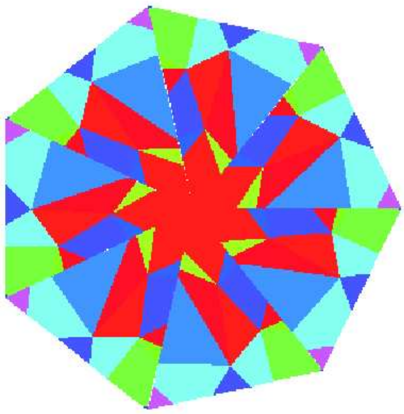


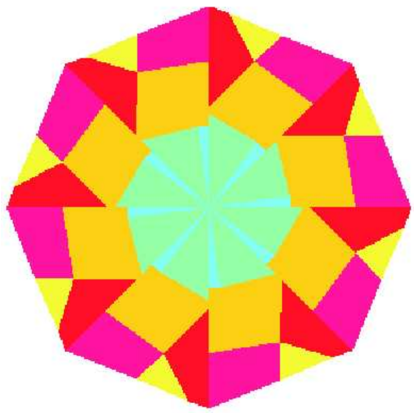


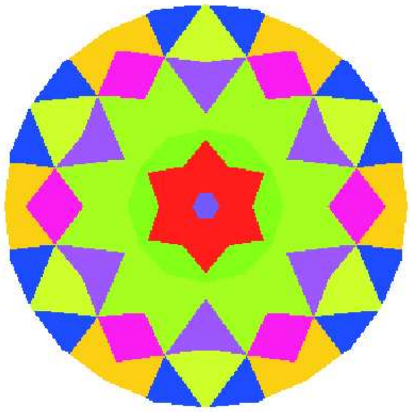


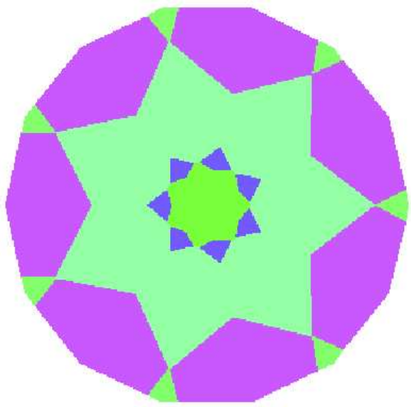












1. $\{C_9,\ C_8,\ C_{10},\ C_5,\ D_1,\ C_2\}$
2. $\{C_9,\ C_4,\ D_4,\ C_2,\ D_5,\ C_6\}$
3. $\{C_6,\ C_4,\ D_3,\ C_9,\ C_7,\ D_1\}$
4. $\{C_3,\ C_6,\ D_8,\ C_9,\ C_2,\ D_3\}$
5. $\{C_7,\ C_9,\ D_8,\ C_{10},\ C_3,\ C_4\}$
6. $\{C_4,\ D_7,\ C_9,\ C_6,\ D_8,\ D_1\}$
7. $\{C_5,\ C_6,\ C_4,\ D_7,\ D_8,\ D_2\}$
8. $\{D_3,\ C_9,\ D_6,\ D_4,\ D_5,\ D_2\}$

4. poglavje

$\{1,\ \{6,\ 3,\ 7,\ 4,\ 2,\ 1,\ 5\}\}$
$\{2,\ \{7,\ 2,\ 5,\ 1,\ 6,\ 4,\ 3\}\}$
$\{3,\ \{1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 5,\ 3,\ 4\}\}$
$\{4,\ \{5,\ 3,\ 6,\ 7,\ 2,\ 1,\ 4\}\}$
$\{5,\ \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 2,\ 6,\ 4\}\}$

5. poglavje

$\{1,\ \{2,\ 8,\ 14,\ 3,\ 7,\ 15,\ 13,\ 9,\ 12,\ 11,\ 16,\ 6,\ 5,\ 1,\ 10,\ 4,\ 17\}\}$
$\{2,\ \{3,\ 6,\ 9,\ 5,\ 12,\ 15,\ 11,\ 14,\ 2,\ 7,\ 16,\ 13,\ 10,\ 1,\ 8,\ 4,\ 17\}\}$
$\{3,\ \{15,\ 4,\ 14,\ 9,\ 5,\ 13,\ 11,\ 7,\ 6,\ 1,\ 16,\ 3,\ 17,\ 12,\ 10,\ 2,\ 8\}\}$
$\{4,\ \{3,\ 2,\ 1,\ 7,\ 8,\ 4,\ 14,\ 9,\ 17,\ 11,\ 6,\ 15,\ 5,\ 16,\ 10,\ 13,\ 12\}\}$
$\{5,\ \{8,\ 13,\ 4,\ 15,\ 17,\ 11,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 5,\ 14,\ 16,\ 3,\ 1,\ 10,\ 2\}\}$

Literatura:

[1] B. Grunbaum, G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Co., New York, 1986.

[2] I. Hafner, *Ravninske kristalografske grupe*, Logika & razvedrilna matematika **10**/1 (2000/2001), str. 62 – 65.

[3] S. Jablan, *Symmetry and Ornament*, Visual Mathematics (1999), članek št. 5.

[4] J. I. Locher (urednik), *M. C. Escher*, Harry N. Abrams Inc. Publishers, New York, 1982.

[5] G. E. Martin, *Transformation geometry*, Springer Verlag, New York, 1982.