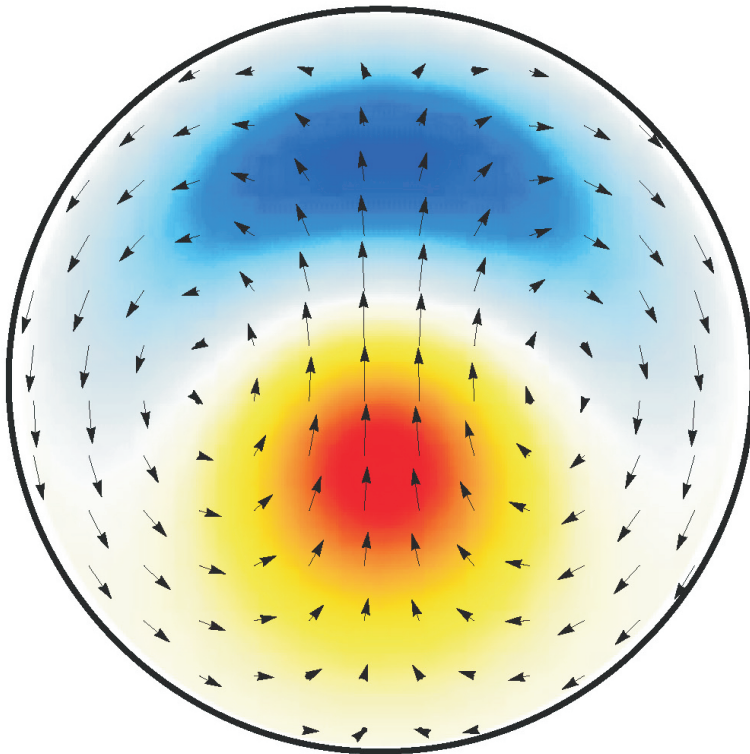


2010

Letnik 57

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2010, letnik 57, številka 4, strani 121–156

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Marko Petkovšek (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Peter Legiša, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2010 DMFA Slovenije – 1796

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PRAVA SIMETRIČNA VERIŽNICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 49J05, 49S05

Z metodo variacijskega računa izpeljemo enačbo simetrične verižnice v radialnem gravitacijskem polju. Podamo tudi nekatere lastnosti dobljene krivulje.

THE TRUE SYMMETRIC CATENARY

By using the calculus of variations, we derive the equation of the symmetric catenary in a radial gravitational field. Some properties of the obtained curve are also given.

Nekaj zgodovine problema

Tanka, gibka, neraztegljiva in homogena nit ali veriga, ki jo obesimo v dveh točkah tako, da prosto visi, zaradi težnosti po umiritvi zavzame obliko krivulje, ki ji pravimo *verižnica*. Znanstveniki so se že od nekdaj zanimali, kako bi to znamenito krivuljo opisali tudi matematično. Galileo Galilei (1564–1642) je trdil, da je verižnica kar parabola. Okrog leta 1646 je Christiaan Huygens (1629–1695) v nekem pismu Marinu Mersennu (1588–1648) zaupal, da verižnica ni parabola. Do tega sklepa je prišel tudi Joachim Jungius (1587–1657) in to tudi potrdil z eksperimentom. Ko je bil na voljo infinitezimalni račun, so se s problemom oblike verižnice na pobudo Jakoba Bernoullija (1654–1705) spoprijeli Johann Bernoulli (1667–1748), David Gregory (1659–1708) in Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Prišli so do ugotovitve, da je verižnica del grafa funkcije $x \mapsto a \operatorname{ch}(x/a)$. Robert Hooke (1635–1703) je raziskoval trdnostne lastnosti obokov, ki imajo v preseku obliko narobe obrnjene verižnice. V gradbeništvu so take oboke izdelovali že veliko prej. Baje je angleško besedo za verižnico, *catenary*, predlagal Thomas Jefferson (1743–1826), tretji predsednik ZDA. Beseda temelji na latinski *catena*, kar pomeni *veriga*. Raziskovali so tudi nehomogene, raztegljive, vrteče se in druge verižnice.

Običajno pridemo do enačbe verižnice z uporabo načela, da se prosto obešena idealna veriga umiri tako, da je njeno težišče najnižje (Bernoullijevo načelo statike). Ravnina, v kateri je verižnica, je navpična. Do enakega rezultata pridemo, če uporabimo načelo, ki pove, da se veriga umiri tako, da je njena potencialna energija najmanjša (Hamiltonovo načelo). Eno in drugo pa zahteva znanje *variacijskega računa*, zlasti reševanje *vezanih, izoperimetričnih variacijskih nalog* (več o tem je napisanega na primer v [2, 4, 5]).

Običajna verižnica nastane ob predpostavki, da je potencialna energija točkaste mase sorazmerna z njeno višino nad izbrano vodoravno ravnino in da je celotna verižnica v homogenem gravitacijskem polju, kjer je pospešek prostega pada v območju verižnice povsod enak. To je zelo natančno res, dokler so razsežnosti verižnice zelo majhne v primerjavi s polmerom Zemlje, na kateri verižnico realiziramo. Če pa bi realizirali verižnico ogromne dolžine in jo obesili zelo visoko, pa bi morali upoštevati pojemanje pospeška prostega pada z višino. Tako verižnico si je zamislil že Johann Bernoulli in najbrž še kdo. Ni pa splošno znano, do katerih rezultatov so prišli.

Pokojni prof. Egon Zakrajšek (1941–2002) se je ukvarjal z različnimi, običajno težjimi matematičnimi nalogami, tudi z verižnico. O tej je predaval na Sredinem seminarju nekaj let pred svojo prezgodnjo smrtjo. Na koncu ga je nekdo vprašal, kakšna bi bila zelo dolga in zelo visoko obešena verižnica v zemeljskem gravitacijskem polju. Profesor se je samo prijazno nasmehnil. Toda razvoj znanosti je prinesel fulerene in ogljikove nanocevkke. Ko je prof. Denis Arčon, Zoisov nagrajenec za vrhunske znanstvene in razvojne dosežke na področju fizike, v okviru občnega zbora in 60-letnice DMFA Slovenije novembra 2009 na Bledu predaval o fulerenih in nanocevkah, je povedal tudi morda nekoliko futuristično zamisel, da bi z nanocevkami, ki imajo primerne fizikalne lastnosti, povezali med seboj zelo oddaljene točke na Zemlji in v vesolju. Ob tem se je morda marsikomu porodila misel o ogromnih verižnicah, pri katerih je treba upoštevati nehomogenost gravitacijskega polja.

Iskanje po literaturi pa je pokazalo, da sta se s problemom *prave verižnice*, to je verižnice v radialnem gravitacijskem polju, že pred letom 2000 temeljito ukvarjala Jochen Denzler in Andreas M. Hinz ter leta 1999 objavila članek [1]. V pričujočem prispevku bomo do prave simetrične verižnice prav tako prišli z variacijskim računom kot pravkar omenjena avtorja, dobljeno diferencialno enačbo pa bomo reševali nekoliko drugače.

Matematična formulacija problema

Zamislimo si verižnico v gravitacijskem polju

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r = |\vec{r}| > 0,$$

kjer je G splošna gravitacijska konstanta in M masa Zemlje ali kakega drugega planeta, na katerem bi verižnico realizirali. Polje \vec{F} je potencialno:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}U(\vec{r}), \quad U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}.$$

Privlačno središče je v točki O , ki ustreza vektorju $\vec{r} = \vec{0}$. Privlačno središče lahko nadomestimo tudi s kroglo polmera R in središčem v točki O , pri čemer je masna gostota krogle odvisna le od r . Takrat obravnavamo verižnico, če je le-ta v celoti v tistem prostorskem območju, kjer velja $r > R$.

Verižnica naj bo dolga 2ℓ in homogena, to se pravi, da je njena krivuljska masna gostota $\rho = dm/ds$ konstantna. Pri tem je ds diferencial ločne dolžine. Ukvarjali se bomo z najpreprostejšim primerom, ko ima verižnica krajišči v različnih točkah A_- in A_+ , ki sta na enaki, dovolj veliki razdalji od točke O . Tedaj je iskana krivulja simetrična, kar olajša računanje. Simetričnost verižnice sledi iz načela njene minimalne potencialne energije. Posledica tega načela je tudi ta, da verižnica leži v ravnini, ki jo določajo točke A_- , A_+ in O , ter konveksnost verižnice, gledano iz točke O . Celotna verižnica je v trikotniku OA_-A_+ . Nesimetrično verižnico obravnavata avtorja v [1].

Za udobno računanje vpeljemo polarni koordinatni sistem s polom v točki O in polarno osjo, ki je pravokotna na daljico A_-A_+ , kakor kaže slika 1. Polarna kota točk A_- in A_+ sta potem ustrezno $-\alpha$ in α . Smiselno je vzeti naravno omejitev $0 < \alpha < \pi/2$. Polarna radija obeh točk sta enaka r_1 . V polarnih koordinatah lahko zapišemo: $A_{\pm}(r_1, \pm\alpha)$.

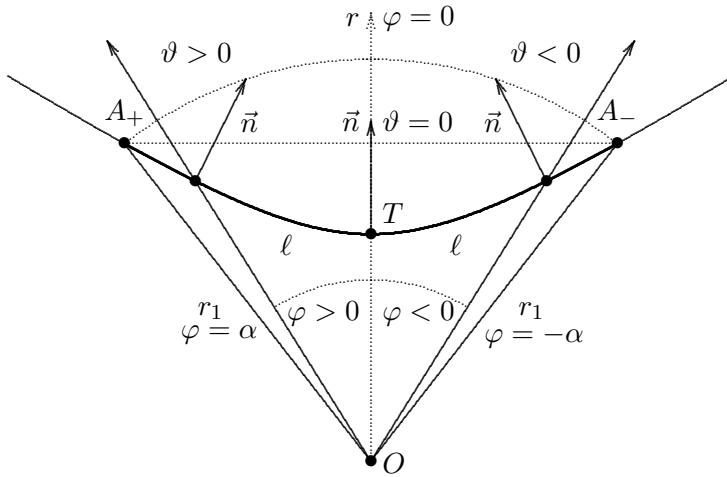
Enačbo verižnice bomo iskali v polarnih koordinatah: $r = r(\varphi)$. Njena celotna potencialna energija je

$$W_p[r] = -GM\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (1)$$

pri pogoju

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2\ell. \quad (2)$$

Pri tem smo uporabili izraz za diferencial loka krivulje $r = r(\varphi)$ v polarnih koordinatah in označili $r' = dr/d\varphi$ ter upoštevali, da ima infinitezimalno majhna masa dm na razdalji r od točke O potencialno energijo $-GM dm/r$. Iščemo tako pozitivno in odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, definirano na intervalu $[-\alpha, \alpha]$, ki minimizira integral (1) pri pogoju (2) in z dodatkom $r(\pm\alpha) = r_1$. Graf rešitve, ekstremalo v polarnih koordinatah, bomo imenovali *prava simetrična verižnica*. Na njej doseže polarni radij minimum v točki $T(r_0, 0)$. Pri tem je $R \leq r_0 < r_1$.



Slika 1. Prava simetrična verižnica.

Dolžina 2ℓ verižnice med točkama A_- in A_+ zadošča naravnim pogojem (slika 1): tetiva A_-A_+ krožnice $r = r_1$ mora biti krajša kot 2ℓ , kar pa mora biti manj od $2r_1$, iz česar sledi naravna omejitev:

$$r_1 \sin \alpha < \ell < r_1. \quad (3)$$

Brez škode za splošnost lahko rešujemo nalogo tako, da vzamemo $GM\varrho = -1$ in iščemo ekstremalo funkcionala

$$\mathcal{F}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (4)$$

pri pogojih

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2\ell, \quad r(\pm\alpha) = r_1. \quad (5)$$

Gre torej za tipičen vezan problem variacijskega računa. Reševanje nas spominja na Lagrangeevo metodo iskanja vezanih ekstremov pri funkcijah več spremenljivk. Uporabimo izrek, ki ga je utemeljil Lazar A. Ljusternik (1899–1981). Več o Ljusternikovem izreku najdemo na primer v [2, 4, 5]. Sestavimo funkcional

$$\mathcal{L}[r] = \mathcal{F}[r] - \lambda \mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} - \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} \right) d\varphi, \quad (6)$$

kjer je λ neka realna konstanta. Vpeljemo

$$f(r, r', \varphi) = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} - \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} = \left(\frac{1}{r} - \lambda \right) \sqrt{r^2 + r'^2} \quad (7)$$

in nastavimo potreben pogoj za ekstrem funkcionala (6), to je Euler-Lagrangeeva diferencialna enačba drugega reda:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

S problemom, ali dobljena rešitev zares minimizira funkcional \mathcal{F} , se tukaj ne bomo ubadali, zanesli se bomo pač na fizikalno vsebino naloge.

Ker spremenljivka φ v (7) eksplicitno ne nastopa, lahko diferencialni enačbi (8) takoj znižamo red (glej na primer [2, enačba (10), str. 365]):

$$f(r, r') - r' \frac{\partial f}{\partial r'}(r, r') = -c. \quad (9)$$

Pri tem je c integracijska konstanta. V našem primeru dobimo najprej iz (9)

$$\left(\frac{1}{r} - \lambda \right) \left(\sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) = -c.$$

in po poenostavitvi:

$$r(\lambda r - 1) = c \sqrt{r^2 + r'^2}. \quad (10)$$

Poglejmo še, kakšni sta lahko konstanti c in λ , ki pri naših pogojih obstajata po Ljusternikovem izreku. Očitno je $c \neq 0$. Za $\lambda = 0$ pa bi dobili diferencialno enačbo $cr' = \pm r \sqrt{1 - c^2}$ in za $|c| < 1$ bi imeli za rešitev logaritmsko spiralo, kar pa spet ne gre. Torej bomo v nadaljevanju privzeli pogoja $c \neq 0$ in $\lambda \neq 0$.

Reševanje problema

Omenili smo že, da sta J. Denzler in A. M. Hinz v [1] problem reševala drugače. V enačbo (10) sta vpeljala novo funkcijo $\rho(\varphi) = 1/r(\varphi)$, ki nam enačbo poenostavi. Po odpravi korena in odvajanju dobimo namreč preprosto nehomogeno linearno enačbo s konstantnimi koeficienti, ki jo zlahka rešimo. Vsemu navkljub pa se bomo naloge lotili po nekoliko daljši, morda celo naravnejši poti.

Označimo s ϑ orientirani kot od zunanje normale na krivuljo do podaljška polarnega radija r (slika 1). Iskali bomo ekstremalo, ki je konveksna, gledano iz točke O . Zato mora kot ϑ zvezno naraščati od negativnih na pozitivne vrednosti, ko kot φ narašča od $-\alpha$ proti α .

Znano je (glej na primer [3, enačba (5), str. 439]), da velja enakost $\operatorname{tg} \mu = r/r'$, če je μ kot med polarnim radijem in tangento krivulje. Zato je $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$. Iz enačbe (10) dobimo $\lambda r - 1 = c/\cos \vartheta$ in

$$r = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{c}{\cos \vartheta} \right). \quad (11)$$

Iz enakosti

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

hitro sledi

$$\frac{c \sin \vartheta}{\lambda \cos^2 \vartheta} = \frac{d\varphi}{d\vartheta} \cdot r \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta \left(1 + \frac{c}{\cos \vartheta} \right)$$

in po preureditvi

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{c}{c + \cos \vartheta}. \quad (12)$$

S tem imamo povezavo med kotoma φ in ϑ , in sicer

$$\varphi = c \int_0^{\vartheta} \frac{d\theta}{c + \cos \theta}, \quad (13)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\varphi = 0$, ko je $\vartheta = 0$, kar je posledica minimalnosti polarnega radija r v temenu T in enačbe $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$. Funkciji (11) in (13) nam določata družino ekstremal v polarni parametrični obliki. Toda s tako obliko nismo popolnoma zadovoljni, kajti radi bi izločili kot ϑ in dobili eksplisitni izraz $r = r(\varphi)$.

Preprost rezultat, ki nam bo obenem povedal predznak konstante c , dobimo za ukrivljenost κ iskane krivulje po formuli

$$\kappa = \frac{rr'' - r'^2 - 2r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}. \quad (14)$$

Pri tem upoštevamo $r' = r \operatorname{tg} \vartheta$ in (12). Najprej izračunamo

$$r'' = r' \operatorname{tg} \vartheta + \frac{r}{\cos^2 \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi} = r \operatorname{tg}^2 \vartheta + \frac{r}{\cos^2 \vartheta} \left(1 + \frac{\cos \vartheta}{c} \right),$$

nato pa po poenostavitvi dobimo:

$$\kappa = \frac{\cos^2 \vartheta}{cr}.$$

Krožnica $r = a$ ($a > 0$) je konkavna, gledano iz točke O , njena ukrivljenost pa je po (14) enaka $-1/a$, torej negativna. Iskana ekstremala pa je, gledano iz točke O , konveksna in mora zato imeti po (14) pozitivno ukrivljenost na celotnem intervalu $[-\alpha, \alpha]$. To pomeni, da je $c > 0$, iz (11) pa sklepamo, da je tudi $\lambda > 0$.

Integral (13) računamo z univerzalno substitucijo $\tau = \operatorname{tg}(\theta/2)$, ki nam da $\cos \theta = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $d\theta = 2 d\tau/(1 + \tau^2)$ in

$$\varphi = 2c \int_0^t \frac{d\tau}{(c-1)\tau^2 + (c+1)}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (15)$$

Brez težav iz (11) in (12) izrazimo za ekstremalo diferencial loka:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}.$$

Z integracijo dobimo še dolžino $s(\varphi)$ ekstremale med njenim temenom in točko, ki ustreza polarnemu kotu φ :

$$s(\varphi) = \frac{c}{\lambda} \int_0^{\vartheta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{c}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{cr'(\varphi)}{\lambda r(\varphi)} = -cr(\varphi) \left(\frac{1}{\lambda r} \right)'(\varphi). \quad (16)$$

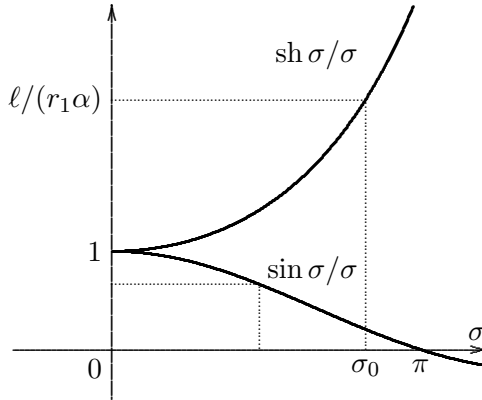
Rezultat (16) je pomemben pri določevanju konstante c pri dani dolžini ℓ in danem kotu α .

Iz oblike integranda v (15) razberemo, da se kot φ izraža s funkcijo $\operatorname{ar th}$ v primeru $0 < c < 1$ in s funkcijo $\operatorname{arc tg}$ v primeru $c > 1$. Primer $c = 1$

je posebno lep, ker nam da preprost rezultat: $\varphi = t = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$. Sedaj si oglejmo vse tri možnosti, ki dejansko pridejo v poštev pri omejitvi (3).

A. Najprej se vprašajmo, ali obstaja pri omejitvi (3) rešitev, v kateri je $0 < c < 1$. Tedaj dobimo iz (15):

$$\varphi = \frac{2c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{ar th} \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} t, \quad t = \sqrt{\frac{1+c}{1-c}} \operatorname{th} \frac{\varphi \sqrt{1-c^2}}{2c}. \quad (17)$$



Slika 2. Parameter σ_0 reši enačbo $\operatorname{sh} \sigma/\sigma = \ell/(r_1\alpha)$ oziroma $\sin \sigma/\sigma = \ell/(r_1\alpha)$.

Iz izraza (11) izpeljemo

$$\frac{1}{\lambda r} = \frac{\cos \vartheta}{c + \cos \vartheta} = \frac{1 - t^2}{(1 + c) - (1 - c)t^2},$$

nato pa iz (16) in (17) sledi po krajšem računu

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \operatorname{ch}(\varphi \sqrt{1-c^2}/c)}{1 - c^2}, \quad s(\varphi) = r(\varphi) \frac{c \operatorname{sh}(\varphi \sqrt{1-c^2}/c)}{\sqrt{1-c^2}}. \quad (18)$$

Iz pogojev $s(\alpha) = \ell$ in $r(\alpha) = r_1$ dobimo iz druge relacije v (18) enačbo

$$\ell = r_1 \frac{c \operatorname{sh}(\alpha \sqrt{1-c^2}/c)}{\sqrt{1-c^2}},$$

v katero za lažjo obravnavo vpeljemo novo neznancko

$$\sigma = \alpha \sqrt{1-c^2}/c \neq 0, \quad (19)$$

tako da dobimo transcendentno enačbo

$$\frac{\ell}{r_1\alpha} = \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\sigma}. \quad (20)$$

Iz poteka funkcije $\sigma \mapsto \operatorname{sh} \sigma / \sigma$, ki je namreč večja kot 1 in naraščajoča za pozitivne σ (slika 2), razberemo, da ima enačba (20) natanko eno rešitev $\sigma_0 > 0$ pri pogojih $0 < \alpha < 1$, $r_1 \alpha < \ell < r_1$. Enačbo (20) seveda rešujemo v konkretnem primeru numerično, za kar je na voljo precej metod. Ko izračunamo σ_0 , dobimo iz (19) natanko določeno konstanto $c = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}$, ki očitno zadošča pogoju $0 < c < 1$. Iskana krivulja je tedaj določena z relacijo

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}{1 - c^2}.$$

Ker je

$$\frac{1}{\lambda r_1} = \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c^2},$$

s čimer je določena tudi konstanta λ , dobimo nazadnje za rešitev:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}}. \quad (21)$$

B. Nato pogledajmo, ali obstaja pri omejitvi (3) rešitev, v kateri je $c > 1$. Podobno kot v primeru **A** dobimo iz (15):

$$\varphi = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} t, \quad t = \sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi \sqrt{c^2 - 1}}{2c}. \quad (22)$$

Iz izraza (11) izpeljemo

$$\frac{1}{\lambda r} = \frac{\cos \vartheta}{c + \cos \vartheta} = \frac{1 - t^2}{(c+1) + (c-1)t^2},$$

nato pa iz (16) in (22) sledi po krajšem računu

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \cos(\varphi \sqrt{c^2 - 1}/c)}{1 - c^2}, \quad s(\varphi) = r(\varphi) \frac{c \sin(\varphi \sqrt{c^2 - 1}/c)}{\sqrt{c^2 - 1}}. \quad (23)$$

Iz pogojev $s(\alpha) = \ell$ in $r(\alpha) = r_1$ dobimo iz druge relacije v (23) enačbo

$$\ell = r_1 \frac{c \sin(\alpha \sqrt{c^2 - 1}/c)}{\sqrt{c^2 - 1}},$$

v katero za lažjo obravnavo vpeljemo novo neznanke

$$\sigma = \alpha \sqrt{c^2 - 1}/c \neq 0 \quad (24)$$

in dobimo transcendentno enačbo

$$\frac{\ell}{r_1\alpha} = \frac{\sin \sigma}{\sigma}. \quad (25)$$

Iz poteka funkcije $\sigma \mapsto \sin \sigma / \sigma$, ki je namreč manjša kot 1 in padajoča za $0 < \sigma < \pi$ (slika 2), razberemo, da ima tudi enačba (25) natanko eno rešitev σ_0 pri pogojih $0 < \alpha < \pi/2$, $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1\alpha$. Očitno velja relacija $\sin \alpha / \alpha < \sin \sigma_0 / \sigma_0$, iz česar sledi $\sigma_0 < \alpha$. Ko izračunamo σ_0 , dobimo iz (24) natanko določeno konstanto $c = \alpha / \sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}$, ki očitno zadošča pogoju $c > 1$. Iskana krivulja je tedaj določena z relacijo

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}{1 - c^2}.$$

Ker je

$$\frac{1}{\lambda r_1} = \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c^2},$$

s čimer je določena tudi konstanta λ , dobimo nazadnje za rešitev naše naloge krivuljo:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}}. \quad (26)$$

C. V najenostavnejšem primeru $c = 1$ lahko pridemo do rezultata za $1/(\lambda r(\varphi))$ tudi z limitnim prehodom iz primerov $c \neq 1$, na primer:

$$\lim_{c \rightarrow 1+0} \frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \lim_{c \rightarrow 1+0} \left(\frac{1-c}{1-c^2} - \frac{\varphi^2}{2c} + \frac{(c^2-1)\varphi^4}{4!c^3} - \dots \right) = \frac{1-\varphi^2}{2}.$$

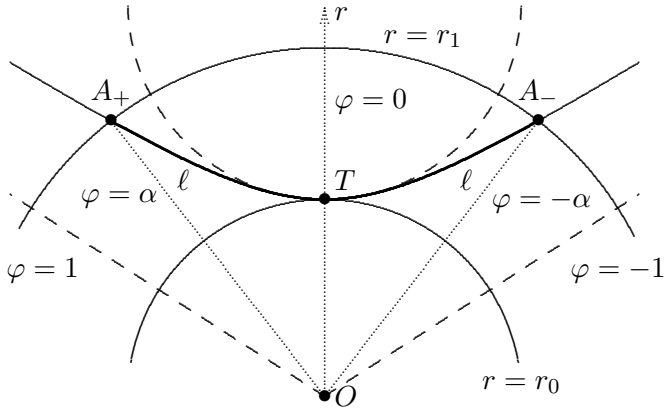
Pri tem smo uporabili razvoj funkcije \cos v potenčno vrsto. Za $c = 1$ je zato

$$\frac{1}{\lambda r(\varphi)} = \frac{1-\varphi^2}{2}$$

in po (16) še $s(\varphi) = \varphi r(\varphi)$. Ta primer očitno nastopi, če je $\ell = r_1\alpha$ in $0 < \alpha < 1$, kajti tedaj velja $s(\alpha) = r(\alpha)\alpha$. V tem mejnem primeru je parameter λ določen z relacijo $1/(\lambda r_1) = (1 - \alpha^2)/2$ in iskana krivulja je

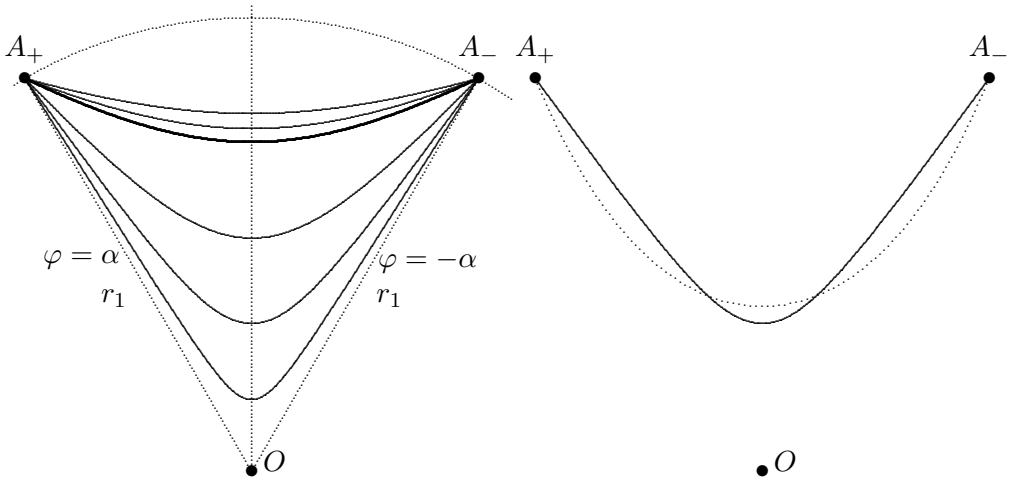
$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \varphi^2}. \quad (27)$$

Prava simetrična verižnica



Slika 3. Prava verižnica $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$ s krivinskim krogom v temenu T .

Ukrivljenost rešitve v temenu T je v vsakem primeru $\kappa = 1/(cr_0)$ in krivinski polmer je tam cr_0 , kjer je $r_0 = r(0)$.



Slika 4. Prave verižnice (levo) in primerjava ene od njih s klasično (desno).

Slika 4 na levi strani kaže prave simetrične verižnice različnih dolžin skozi isti točki. Krepkeje je načrtana tista, za katero je $\ell = r_1\alpha$ ($c = 1$) in se njen polarni radij izraža racionalno s kotom φ . Nad njo so verižnice, za katere je $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1\alpha$ ($c > 1$) in se njihov polarni radij izraža s funkcijo \cos , pod njo pa verižnice, za katere je $r_1\alpha < \ell < r_1$ ($0 < c < 1$) in se njihov

polarni radij izraža s funkcijo ch . Parameter $c > 0$ na sliki se manjša od zgoraj navzdol.

Na desni strani slike pa je s polno črto narisana prava verižnica, s pikčasto pa klasična verižnica enake dolžine.

Glavni rezultat in sklep

Če se ne oziramo na velikost planeta, na katerem realiziramo prave simetrične verižnice, so njihove enačbe za $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ take:

A. Za $0 < \alpha < 1$, $r_1\alpha < \ell < r_1$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \operatorname{ch} \sigma_0}{1 - c \operatorname{ch}(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad \frac{\operatorname{sh} \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\ell}{r_1 \alpha}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma_0^2}}.$$

B. Za $0 < \alpha < \pi/2$, $r_1 \sin \alpha < \ell < r_1 \alpha$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - c \cos \sigma_0}{1 - c \cos(\sigma_0 \varphi / \alpha)}, \quad \frac{\sin \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\ell}{r_1 \alpha}, \quad c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2}}.$$

C. Za $\ell = r_1 \alpha$, $\alpha < 1$:

$$r(\varphi) = r_1 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \varphi^2}, \quad c = 1.$$

Če bi katerokoli verižnico po zgornjih enačbah nadaljevali prek krajišč A_{\pm} , bi se bližala asimptotama, ki sta vzporedni poltrakoma

$$\varphi = \pm(\alpha/\sigma_0) \operatorname{ar ch}(1/c)$$

oziroma

$$\varphi = \pm(\alpha/\sigma_0) \operatorname{arc cos}(1/c)$$

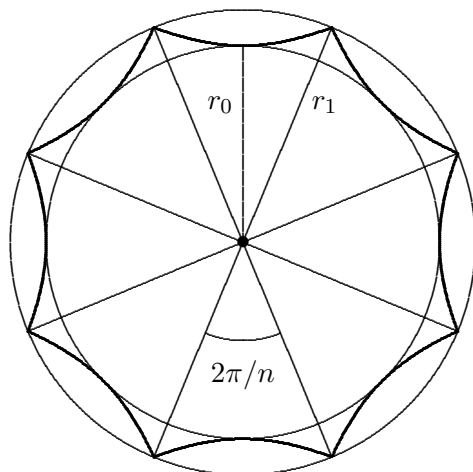
oziroma

$$\varphi = \pm 1.$$

Da se izračunati, kje se asimptoti v posameznem primeru sekata, vendar dobimo precej zapletene izraze. Zato končajmo računanje samo še z eno zanimivostjo.

Za vsako naravno število $n \geq 4$ zlahka sestavimo sklenjeno verigo pravih, najenostavnejših verižnic (27), če vzamemo $\alpha = \pi/n < 1$. Skupna dolžina

sklenjene verige je $2\pi r_1$, kar je enako obsegu njenega očrtanega kroga. Polmer včrtanega kroga pa je $r_0 = r_1(1 - \alpha^2)$ (slika 5).



Slika 5. Sklenjena veriga pravih verižnic.

Našli smo enačbo prave simetrične verižnice v radialnem gravitacijskem polju. Uporabili smo mehansko načelo najmanjše potencialne energije, infinitesimalni in variacijski račun, pa tudi numerično reševanje enačb nam je prišlo prav. Vsekakor je zanimivo primerjati klasične in prave verižnice v konkretnih primerih (slika 4).

LITERATURA

- [1] J. Denzler, A. M. Hinz, *Catenaria Vera – The True Catenary*, Expo. Math. **17** (1999), str. 117–142.
- [2] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.
- [3] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.
- [5] E. Zakrajšek, *Analiza III*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.

NARAVNA KONVEKCIJA V VODORAVNEM VALJU

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

PACS: 47.55.P-

Prispevek opisuje preprost model naravne konvekcije v valjasti geometriji. Reševanja sklopljenega sistema diferencialnih enačb, ki opisujejo gibanje in toplotne tokove tekočine, se lotimo s Fourierjevo metodo in obdržimo čim manj členov. Rešitve poenostavljenega sistema v faznem prostoru težijo k Lorenzovemu atraktorju, če je temperaturni gradient dovolj velik. Rešitve, ki jih poiščemo numerično, dajo občutek za temperaturne gradiente, velikosti tokov in časovno skalo, na kateri pride do sprememb.

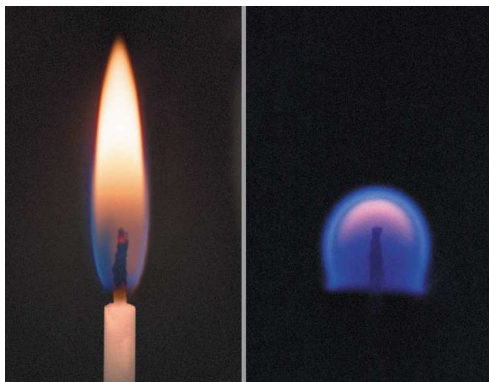
NATURAL CONVECTION IN A HORIZONTAL CYLINDER

The article describes a basic model of natural convection in cylindrical geometry. We solve the coupled system of dynamical and thermodynamical equations describing a liquid by truncating the Fourier series. The solutions of the simplified system tend toward the Lorenz attractor in phase space for large enough temperature gradients. The numerical solutions offer an insight into the order of temperature gradient, flow, and characteristic time, typical for convection in a closed container.

Uvod

Do prenosa toplote lahko pride na tri načine: s prevajanjem, sevanjem in konvekcijo. Pri konvekciji toploto prenaša tok tekočine. Tekočina toploto prejme v delu z višjo temperaturo, se pretoči v del z nižjo temperaturo in tam toploto odda. Konvekcija je prisilna, če tok tekočine poganjajo črpalke. Tako hladimo procesor v računalniku. Ko se procesor zaradi obremenitve preveč segreje, se vključi ventilator in požene tok hladnega zraka čez rebra hladilnika nad procesorjem. Tok v tekočini lahko požene tudi vzgon, če se gostota tekočine pri segrevanju dovolj spremeni. V tem primeru poganja tok gravitacija. V breztežnostnem prostoru do konvekcije ne pride. To lepo opazimo na plamenu sveče, ki se na Zemlji zaradi navpičnega toka vročega zraka razpotegne v obliko kaplje, v breztežnem prostoru pa ostane okrogel, ker ni dotoka svežega zraka (slika 1).

Naravna konvekcija je torej masni tok tekočine v gravitacijskem polju, kjer je zaradi temperaturnega gradienta gostota tekočine pri dnu manjša kot

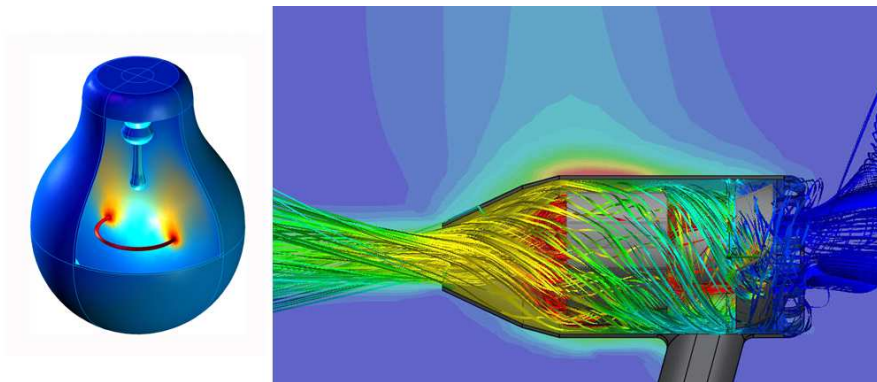


Slika 1. Plamen sveče na levi in plamen v breztežnem prostoru na desni. V breztežnem prostoru ni naravne konvekcije in plamen je okrogel ter šibek, saj ni dotoka svežega zraka s kisikom. Vir: NASA.

pri vrhu in vzgon požene masni tok. Konvekcija je v splošnem tok z zapleteno geometrijo in dinamiko. Ta tok lahko postane turbulenten z zapletenim časovnim potekom. Najlažje rešitve poiščemo z modelsko analizo. Primer kaže slika 2, ki prikaže konvekcijo v žarnici. Dinamiko konvekcije opišejo Navier-Stokesova enačba, kontinuitetna enačba ter enačba toplotnega prevajanja. Sistem enačb v prvem približku poenostavimo na Lorenzov sistem enačb, ki opišejo Lorenzov oscilator. Oscilatorju v faznem prostoru ustreza fraktalni Lorenzov atraktor [1]. Sistem enačb nastopa tudi pri obravnavi konvekcijskih tokov v atmosferi [3]. Konvekcijski tok je pri dovolj velikih temperaturnih razlikah kaotičen. Ena od najboljših metod, s katero lahko spremljamo spreminjanje hitrosti, je slikanje z jedrsko magnetno resonanco. Gibanje lahko opazimo na slikah, s katerimi merimo porazdelitve difuzijske konstante. Kot primer si bomo ogledali konvekcijo vode v vodoravnem valju, ki ga pri vrhu oboda hladi izparevanje alkohola [7].

Naravna konvekcija

Gibanje tekočine opišemo v okviru hidrodinamike. Tekočino obravnavamo zvezno - še tako majhen del sestavlja veliko število molekul. Tekočino opišemo s trenutnim hitrostnim, tlačnim ter gostotnim poljem. Preostale količine lahko izračunamo z enačbami stanja. Pogoj za nastanek konvekcije je



Slika 2. Konvekcija v žarnici, kjer tok plinov požene kovinska žička, segreti z električnim tokom, ter prisilna konvekcija v fenu. Sliki sta narejeni z računalniško simulacijo. Vir: COMSOL Inc. in 121 Designs Pty Ltd.

dovolj velik temperaturni gradient [2]:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g T \beta}{c_p}, \quad (1)$$

ki za vodo pomeni naraščanje temperature za 1 K z vsakim metrom globine. V enačbi nastopajo gravitacijski pospešek g , absolutna temperatura T , specifična toplota pri konstantnem tlaku c_p ter koeficient prostorninskega temperaturnega raztezka β . Gostota tekočine se ne spreminja, ko del prostornine v časovni enoti zapusti toliko tekočine, kot jo vanjo pride. To izrazimo s kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Drugi Newtonov zakon poda pospešek elementa tekočine $a = F/m$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3)$$

V pospešku na levi strani upoštevamo popolni odvod hitrosti po času, saj tekočino opišemo s hitrostnim poljem. Na desni so na enoto mase preračunane zunanja sila \mathbf{f} , sila zaradi krajevno odvisnega tlaka ter sila zaradi viskoznosti tekočine. Pri tem sta $\nu = \eta/\rho$ kinematična in η dinamična viskoznost. Tlak, ki je povsod enak, ne povzroči toka tekočine. Če je poleg

tlaka edina zunanja sila teža, zamenjamo \mathbf{f} z gravitacijskim pospeškom \mathbf{g} . Enačba velja za nestisljivo tekočino v približku majhne hitrosti in njenega gradienta. Robni pogoj za mirujoče stene zahteva $\mathbf{v}(\mathbf{r})|_{rob} = 0$.

Stanje tekočine se ireverzibilno spreminja zaradi notranjega trenja in toplotnega prevajanja. Sprememba temperature elementa tekočine v Boussinesq-ovem približku [5] sledi iz energijskega zakona

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T. \quad (4)$$

Tu je χ toplotna prevodnost. V približku zanemarimo toploto, ki nastaja pri notranjem trenju med plastmi tekočine, vpliv tlaka na gostoto in temperaturno odvisnost vseh snovnih lastnosti (viskoznosti, toplotne prevodnosti, specifične toplote...) razen gostote. Približek dobro velja za počasne tokove, majhne hitrostne gradiente in majhno temperaturno razliko med vrhom in dnem posode.

Konvekcijski tok začne teči, ko temperaturni gradient preseže omenjeno mejo. Pri dovolj nizkih temperaturnih gradientih je tok laminaren in stacionaren. Pri višjih pa tok postane turbulenten. Število, s katerim karakteriziramo režim konvekcije, sestavimo iz dveh brezdimenzijskih števil: Prandtlovega števila, ki je razmerje viskoznega prenosa gibalne količine in prenosa toplote, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$, in Grashofovega števila, ki je razmerje vzgona in viskozne sile, $Gr = \frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$. Pri tem je l tipična razsežnost posode, v kateri je tekočina, ΔT je razlika temperatur med dnem in vrhom posode. Grashofovo število pove tudi, kako učinkovit je prenos toplote s konvekcijo. Pri majhnih vrednostih Gr naravna konvekcija k prenosu toplote ne prispeva pomembno. Meje med laminarnim in turbulentnim gibanjem pri naravni konvekciji ne določamo z Reynoldsovim številom kot pri toku, saj ni tipične hitrosti, temveč z Grashofovim številom - gibanje je turbulentno pri velikih Gr (~ 50000) - ali pa s produktom Grashofovega in Prandtlovega števila, kot bo razloženo kasneje.

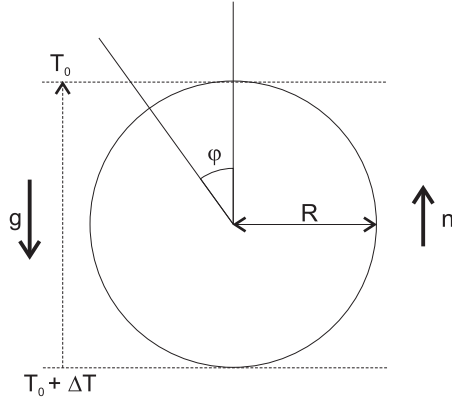
V nadaljevanju si oglejmo naravno konvekcijo v neskončno dolgem vodoravnem valju z negativnim temperaturnim gradientom v navpični smeri:

$$T(r = R, \varphi, t) = T_0 + \frac{1}{2} \Delta T \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{R} \right). \quad (5)$$

\mathbf{n} je enotski vektor v navpični smeri (glej sliko 3).

V Boussinesqovem približku

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 (1 - \beta[T(\mathbf{r}) - T_0]) \quad (6)$$



Slika 3. Neskončno dolg valj s polmerom R leži v temperaturnem polju z linearnim gradientom. Temperatura na dnu valja je ΔT višja kot na vrhu. Prikazana je smer gravitacijskega polja (\mathbf{g}) in enotski vektor v navpični smeri (\mathbf{n}). Kot φ merimo od vrha valja v nasprotni smeri urnega kazalca.

se kontinuitetna enačba poenostavi v $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Če je gibanje tekočine dvodimenzionalno, to enačbo avtomatično izpolnimo, če hitrost zapišemo s funkcijo toka ψ , ki jo v cilindrični geometriji, ko ni gibanja vzdolž osi z , vpeljemo z

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial r}. \quad (7)$$

Krivulje $\psi = konst.$ so tokovnice.

Temperaturno polje v tekočini zapišemo kot vsoto linearnega gradienta (5) in majhnega popravka $\theta(r, \varphi, t)$:

$$T(r, \varphi, t) = T_0 + \frac{1}{2} \Delta T \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{R} \right) + \theta(r, \varphi, t). \quad (8)$$

Hitrostno in temperaturno polje v enačbah (3) in (4) nadomestimo z nastavki (7) in (8), se z rotorjem enačbe (3) znebimo člena s tlakom in dobimo enačbi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(r, \varphi)} + \frac{\Delta T}{2R} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) + \chi \nabla^2 \theta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \varphi)} + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) + g\beta \left(-\frac{\partial \theta}{\partial r} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \quad (10)$$

in
$$\frac{\partial(a,b)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial \varphi} - \frac{\partial a}{\partial \varphi} \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Robni pogoji za θ sledijo iz predpostavk, da je ta količina na robu valja s polmerom R enaka nič in da je v notranjosti valja omejena. Simetrijski razlogi narekujejo sodost v kotu.

Robne pogoje za funkcijo toka dobimo iz robnih pogojev za hitrost: $\psi(\varphi) = -\psi(\varphi)$, $\psi(r < R) < \infty$, $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} |_{R=0} = 0$, $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + k2\pi)$. Tangencialna komponenta hitrosti na robu v prvem približku ne more biti enaka nič. S tem se odrečemo napovedim toplotnega prevajanja, hitrostno polje pa večinoma ostane neprizadeto, saj se hitrost na steni bistveno spremeni v dokaj tanki plasti [2] debeli približno $\delta \sim \sqrt{\nu l / v_0}$. Pri tem je v_0 hitrost nad plastjo, l pa dolžina plasti.

Enačb (9) in (10) ne moremo analitično rešiti, lahko pa temperaturni popravek in funkcijo toka razvijemo v ustrezni bazi – Besslove in harmonične funkcije – in obdržimo najnižje rede:

$$\psi(r, \varphi, t) = \chi a_{11}(t) J_1(\xi_{11} r / R) \sin \varphi, \quad (11)$$

$$\frac{Ra}{\Delta T} \theta(r, \varphi, t) = b_{02}(t) J_0(\xi_{02} r / R) + b_{11}(t) J_1(\xi_{11} r / R) \cos \varphi, \quad (12)$$

kjer je ξ_{nm} m -ta ničla Besslove funkcije J_n reda n . Zapisani nastavki že ustrezajo robnim pogojem. Ra je Rayleighovo število, ki ga dobimo kot produkt Grashofovega in Prandtllovega števila:

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T 8 R^3}{\nu \chi} \quad (13)$$

in ima vlogo kontrolnega parametra. Člen $J_0(\xi_{01} r / R)$ odpade zaradi definicije temperaturnega odmika – povprečni odmik je enak nič.

Hitrostno polje in temperaturni popravek, ki se vzpostavita v vodoravnem valju, v preseku kaže naslovnica. Puščice na sliki predstavljajo hitrostno polje. Opazimo lahko simetričen vzorec dveh vrtincev – neke vrste Benardovo celico, ko se tekočina dviga po sredini in pada na robovih valja. Temperaturno polje pokaže, da je temperatura tik nad dnem, kamor priteka bolj segreti voda z dna valja, povišana v primerjavi z linearnim profilom (rdeča). Od vrha pa se ob straneh vijeta dva kraka relativno nižje temperature tekočine (modra), ki se shladi ob zgornjem robu valja.

Časovni potek sprememb hitrosti in temperature dobimo z rešitvijo nelinearnega sistema diferencialnih enačb za koeficiente razvoja a_{11} , b_{02} in b_{11} .

Sistem dobimo, ko nastavke vstavimo v enačbi (9) in (10). To je Lorenzov [3] sistem diferencialnih enačb:

$$\dot{b}_{02} = c_2 a_{11} b_{11} - \xi_{02}^2 b_{02} - Ra \ c_1 a_{11}, \quad (14)$$

$$\dot{b}_{11} = -c_3 a_{11} b_{02} - \xi_{11}^2 b_{11}, \quad (15)$$

$$\dot{a}_{11} = -\sigma \xi_{11}^2 a_{11} - \sigma c_4 b_{02}, \quad (16)$$

Pika pomeni odvod po času $\tau = \frac{\chi}{R^2} t$, brezdimenzijski parameter $\sigma = \nu/\chi$, številске konstante pa so

$$c_1 = \frac{\xi_{11} \int_0^1 J_0(\xi_{11}x) J_0(\xi_{02}x) x dx}{4 \int_0^1 J_0^2(\xi_{02}x) x dx} \approx 0.80$$

$$c_2 = \frac{\xi_{11} \int_0^1 (J_0(\xi_{11}x) - J_2(\xi_{11}x)) J_1(\xi_{11}x) J_0(\xi_{02}x) dx}{2 \int_0^1 J_0^2(\xi_{02}x) x dx} \approx 2.6$$

$$c_3 = \xi_{02} \frac{\int_0^1 J_1(\xi_{02}x) J_1(\xi_{11}x) J_1(\xi_{11}x) dx}{\int_0^1 J_1^2(\xi_{11}x) x dx} \approx 3.8$$

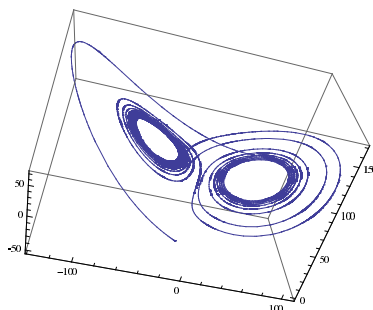
$$c_4 = \frac{\xi_{02} \int_0^1 J_1(\xi_{02}x) J_1(\xi_{11}x) x dx}{8 \xi_{11}^2 \int_0^1 J_1^2(\xi_{11}x) x dx} \approx 0.019$$

Sistem enačb (14), (15) in (16) rešimo numerično. V Mathematici za to poskrbi ukaz:

```
atr=NDSolve[ A11'[t]==- 95 A11[t]- 0.13 B02[t],
B02'[t]==2.6 A11[t] B11[t]-Ra 0.8 A11[t]-31 B02[t],
B11'[t]==-3.8A11[t] B02[t] - 15 B11[t],
A11[0]==0,B02[0]==1,B11[0]==0,
{A11,B02,B11},{t,0,zgmeja},MaxSteps->maxsteps],
```

kjer *zgmeja* in *maxsteps* predstavljata normiran čas, do katerega iščemo rešitev, ter število iteracij pri numeričnem reševanju.

Kontrolni parameter *Ra* bistveno vpliva na tip rešitve. Pri majhnih vrednostih *Ra* lastne konvekcije ni oziroma hitro zamre. Z višanjem temperaturne razlike se konvekcijski tok ustali pri stalni vrednosti, nato se v toku pojavijo stabilne oscilacije, ki pri dovolj velikih *Ra* pridejo v kaotične in rešitev enačb je čudni atraktor. V prostoru vseh treh parametrov (faznem prostoru) opiše rešitev sistema enačb krivuljo, ki ne konvergira k določeni



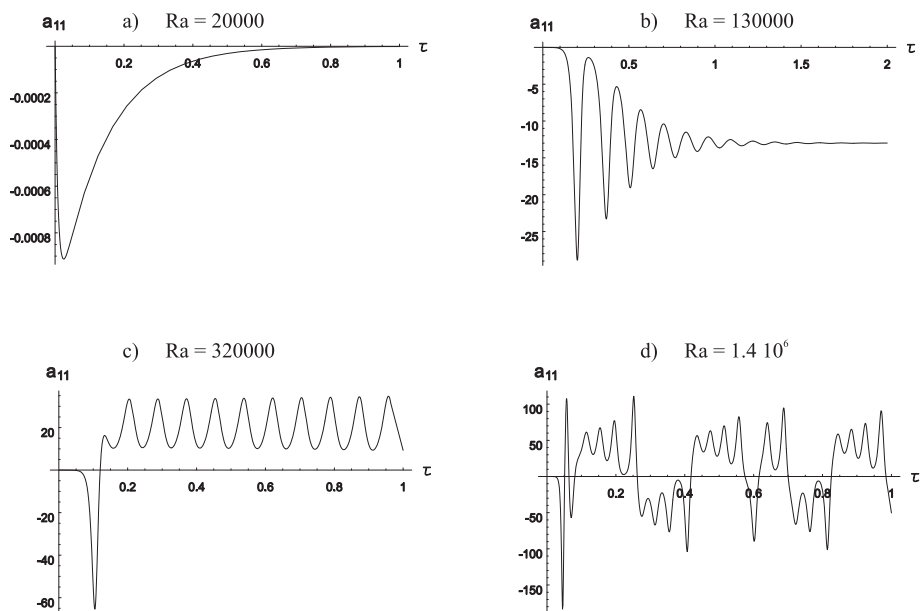
Slika 4. Lorenzov atraktor kaže razvoj nelinearnega dinamičnega sistema v faznem prostoru vseh spremenljivk; dveh komponent temperaturnega popravka ter funkcije toka.

vrednosti, ampak se suče okoli dela faznega prostora, ki mu lahko rečemo čudni atraktor. Primer take rešitve za $Ra = 350000$ kaže slika 4.

Na meritve difuzije z magnetno resonanco [7] vpliva le hitrost, ki je podana s spremenljivko a_{11} . V primeru, da konvekcijo vzbudimo in potem temperaturo na zgornjem in spodnjem robu izenačimo ($r = 0$), ostane v prvem približku:

$$\partial a_{11}/\partial t = -\nu \left(\frac{\xi_{11}}{R} \right)^2 a_{11}. \quad (17)$$

Konveksijski tok eksponentno pojema. Relaksacijski čas za vodo v valju premera 10 cm pri 20°C s $\sigma = 6.3$, $\chi = 1.4 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$, $\nu = 9 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ in $\beta = 2.2 \times 10^{-4}/\text{K}$ je približno 150 s. Če je zunanji temperaturni gradient stalen, se hitrost lahko kaotično spreminja, če temperaturni gradient preseže mejno vrednost. Spremenljivki $a_{11} = 1$ ustreza na sredini valja hitrost $v = 1 \times 10^{-6} \text{m/s}$, spremenljivki $\tau = 1$ pa ustreza čas $t = 3.5 \times 10^4 \text{s}$. To pomeni, da so konveksijski tokovi kljub kaotičnosti lahko zelo počasni in se počasi spreminjajo. Razvoj nestabilnosti in prehod v kaotično gibanje nazorno kaže slika 5. Za male vrednosti Ra je tekočina v mehanskem ravnovesju in konvekcije ni (slika 5 a), nato se pojavi stabilen konveksijski tok pri $Ra > 2.5 \times 10^4$ (slika 5 b). Šele pri večjih temperaturnih razlikah ($Ra = 3.1 \times 10^5$, slika 5 c) postane konvekcija kaotična vendar s stabilno periodo. Kogar zanima več o nastanku nestabilnosti, mu priporočam [6].

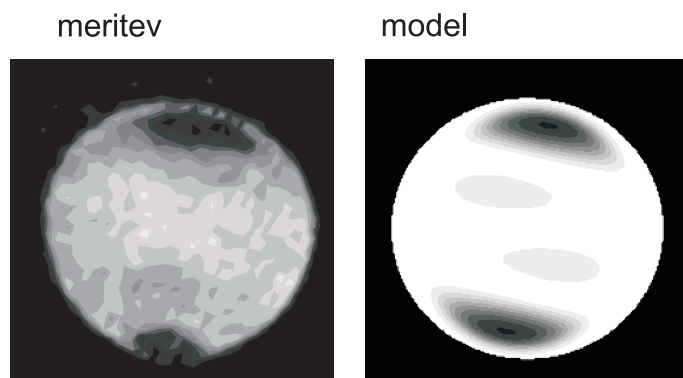


Slika 5. Spreminjanje hitrosti konvekcije s kontrolnim parametrom - temperaturno razliko. Za majhne vrednosti Ra je tekočina v mehanskem ravnovesju in konvekcije ni (a), nato se pojavi stabilen konvekcijski tok pri $Ra > 2.5 \times 10^4$ (b). Šele pri večjih temperaturnih razlikah ($Ra = 3.1 \times 10^5$) postane konvekcija nestacionarna (c) in končno (pri $Ra \sim 10^6$) kaotična, vendar s stabilno periodo (d).

Konvekcija in NMR

Pri slikanju z jedrsko magnetno resonanco (NMR) dobimo sliko sestavljeno iz slikovnih elementov. Pri najbolj običajnem načinu slikanja z NMR je signal slikovnega elementa odvisen od števila vodikovih jeder v elementu, strukture elementa (vrste tkiva in podobno, kar vpliva na relaksacijski čas), tehnike slikanja in gibljivosti molekul v elementu [8]. Gibljivost pomeni, kako hitro in kako naključno se gibljejo molekule. Naključno gibanje molekule, ko molekula naključno spreminja svojo smer, imenujemo difuzija. Urejeno gibanje molekul imenujemo tok. Difuzijo opazimo v vseh tekočinah in je povezana z viskoznostjo. Bolj ko je tekočina viskozna, šibkejša je difuzija in počasneje se molekule razbežijo po prostoru. Tok molekul ne vpliva na velikost signala slikovnega elementa, razen če se tok v času, ko signal zajemamo, večkrat naključno spremeni. Do tega pride pri kaotični naravni konvekciji. Fluktuacije hitrosti se na sliki pokažejo kot predel s šibkejšim

signalom. Tako smo pri meritvah difuzije v zemeljskem magnetnem polju dobili levi del slike 6, čeprav bi pričakovali le bel krog, ko ni konvekcije. Iz geometrije in dinamike konvekcijskega toka, kot sta bili predstavljeni v prejšnjem poglavju, lahko naredimo napoved, ki jo kaže desni del slike 6. Dobro se ujema z meritvami za enako temperaturno razliko, kot smo jo pri poskusu izmerili s termočlenom.



Slika 6. Levo: izmerjena porazdelitev difuzijske konstante z jedrsko magnetno resonanco. Na sliki so izrazite temne proge, ki jih pri tekočini brez konvekcije ni. Na desni je napoved modela iz poglavja o naravni konvekciji za temperaturno razliko nekaj stotin kelvina, ki se dobro ujema z meritvijo.

LITERATURA

- [1] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos: an introduction*, VCH, Weinheim, 1988.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987).
- [3] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130-41 (1963).
- [4] B. Saltzman, *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem*, J. Atmos. Sci. **19**, 329-41 (1962).
- [5] J. Boussinesq, *Theorie Analytique de la Chaleur* **2**, 172, Gauthier-Villars, Paris (1903).
- [6] C. Sparrow, *The Lorenz Equations, Bifurkations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982).
- [7] A. Mohorič, J. Stepišnik, M. Kos, and G. Planinšič, *Self-diffusion imaging by spin echo in earth's magnetic field*, J. Magn. Reson. **136**, 22-26 (1999).
- [8] P. T. Callaghan, *Principles of Nuclear Magnetic Resonance Microscopy* (Oxford University Press, Oxford, 1991).

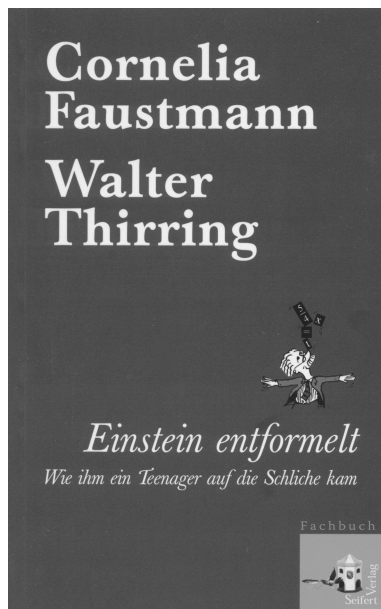
NOVE KNJIGE

Cornelia Faustmann, Walter Thirring, EINSTEIN ENTFORMELT – Wie ihm ein Teenager auf die Schliche kam, Seifert Verlag, Dunaj, 2007, vezano in tiskano v Ljubljani, 100 strani.

Einstein brez formul. Kako ga je domel najstnik. Ali je posebna teorija relativnosti res razumljiva le matematično in fizikalno nadarjenim? Pričujoča knjižica nas skuša prepričati, da ne. Ravno nasprotno, vsakdo jo lahko razume, in to celo brez aritmetike in formul, kakor razberemo iz naslova. Razlagamo si jo lahko samo s slikami in diagrami. Avtorja jo duhovito in šaljivo, o čemer se bralec lahko sam prepriča, predstavita v štiridejanki. V njej nastopajo višja bitja, pa tudi čisto navadni ljudje in zemeljski geniji z znanstvenimi ambicijami. Vsi rešijo uganko o prostoru in času in se približajo samemu Einsteinu. Avtorja prav nič ne varčujeta z ilustracijami, napetimi

zgodbami in življenjepisi matematikov in fizikov, ki so pripomogli k razvoju geometrije in teorije relativnosti. Tisti pa, ki nikakor ne morejo shajati brez formul, imajo na voljo ustrezen dodatek, da si z njim lahko potešijo svojo znanstveno slo in tako niso prehudo prikrajšani.

Knjižica poljudno razloži pojem relativnosti in postopoma vpelje pojem *inercialni opazovalni sistem*. V vseh inercialnih opazovalnih sistemih morajo imeti fizikalni zakoni enako obliko. Ker pa je s poskusi potrjeno, da ima svetloba v vseh takih sistemih enako hitrost c , ne glede na to, ali se eden glede na drugega giblje premo in enakomerno ali ne, ni več mogoče govoriti o absolutni sočasnosti dogodkov. Dogodka, ki se v enem opazovalnem sistemu zgodita istočasno, se v drugem, ki se glede na prvega giblje premo in enakomerno s hitrostjo $v \neq 0$, ne zgodita več istočasno. Časovna razlika je tem večja, čim večja je hitrost v , za katero se izkaže, da v praznem prostoru ne more preseči svetlobne hitrosti c . Tako kot Einstein, avtorja vzameta $c = 1$. Dogodki se dogajajo v prostoru in času, ki ju neločljivo združimo



v štirirazsežni svet *Minkowskega*. Da pa si vse skupaj laže predstavljamo, pogledamo ta svet v projekciji na ravnino, v kateri je prva razsežnost krajevna, druga pa časovna. V tej ravnini postavimo pravokotni koordinatni sistem Oxt , ki ustreza mirujočemu opazovalnemu sistemu. Točkam D pravimo *dogodki*. Dogodki, ki se zgodijo istočasno za opazovalca v tem sistemu, ležijo na vzporednicah osi x , dogodki, ki se zgodijo na istem mestu, pa na vzporednicah osi t .

Inercialnemu opazovalnemu sistemu, ki se glede na mirujočega giblje premo in enakomerno s hitrostjo $v < 1$, na začetku pa sta se njuni izhodišči ujemali, priredimo poševnokotni koordinatni sistem $Ox't'$. Kot α od osi x do osi x' je enak kotu od osi t' do osi t . Pri tem velja $\operatorname{tg} \alpha = v$. Dogodki, ki se zgodijo istočasno za opazovalca v tem drugem sistemu, pa seveda ležijo na vzporednicah osi x' , dogodki, ki se zgodijo na istem mestu, pa na vzporednicah osi t' . Tako predstavimo dogajanje s tako imenovanim *diagramom Minkowskega*. Dogodek D ima v vsakem od koordinatnih sistemov svoje koordinate: $D(x, t)$ in $D(x', t')$. Lepa vaja iz analitične geometrije oziroma linearne algebre nam da ravno *Lorentzevo* in *obratno Lorentzevo transformacijo* koordinat:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Pri tem vzamemo, da je razmerje enot na sliki v smeri x' in x oziroma t' in t enako $k = \sqrt{(1 + v^2)/(1 - v^2)}$.

Z diagrami Minkowskega avtorja pojasnjujeta na primer probleme v zvezi z istočasnostjo in zaporednostjo dogodkov glede na opazovalni koordinatni sistem, skrajšanje dolžine ($\ell = \ell' \sqrt{1 - v^2}$) in podaljšanje časa ($T = T' / \sqrt{1 - v^2}$). Povesta tudi, zakaj se ujemata simetrali $t = x$ in $t' = x'$ v diagramu Minkowskega.

Cornelia Faustmann se je rodila leta 1986 in je na gimnaziji kot del svojih obveznosti napisala maturitetno nalogo *Entstehung und Eigenschaften Schwarzer Löcher–Nastanek in lastnosti črnih lukenj*. Temo je predlagala sama, po nasvetu svoje profesorice fizike pa je morala nalogo prilagoditi gimnazijskim standardom, z daljšo verzijo pa je kandidirala za nagrado na nekem državnem razpisu. Delo je prišlo v roke prof. Walterju Thirringu, ki mu je bilo tako všeč, da je nemudoma stopil v stik z avtorico in jo prepričal, da sta skupaj napisala in izdala pričujočo knjižico. Tako Avstrijsko fizikalno društvo kot tudi Avstrijsko društvo za astronomijo in astrofiziko je Corne-

lijo nagradilo. S tem si je pridobila laskavi vzdevek *čudežni otrok fizike*. Od leta 2004 študira astronomijo in latinščino na dunajski univerzi, kjer od leta 2007 opravlja tudi delo tutorke za latinsko slovnico in pripravlja doktorsko disertacijo. Leta 2008 je izšla njena knjiga *Schwarze Löcher–Črne luknje*.

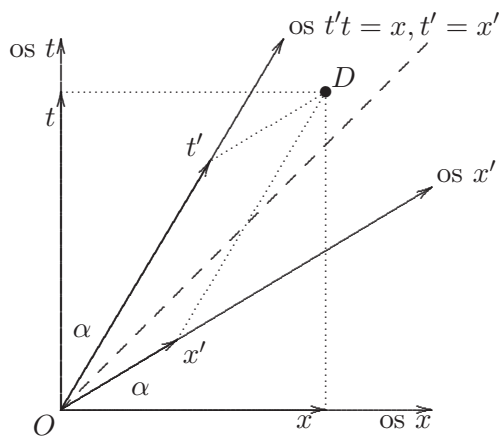


Diagram Minkowskega

Dodajmo še to, da je Cornelijina mati dr. Gerlinde Faustmann, ki jo nekateri poznamo kot veliko poznavalko življenja in dela barona Jurija Vege. Kot glavna govornica je sodelovala ob praznovanju njegovega rojstnega dneva leta 1997 v Zagorici in na svojem obisku imela v organizaciji FMF, IMFM in DMFA predavanje o Vegi. S svojim prispevkom se je udeležila tudi Vegovih dnevov leta 2004 ob 250-letnici njegovega rojstva.

Prof. dr. Walter Thirring se je rodil leta 1927. Fiziko je študiral na univerzah v Innsbrucku in na Dunaju, kjer je doktoriral leta 1949 in 10 let kasneje postal profesor za področje teoretične fizike, kjer je eden od najuspešnejših v Avstriji. Po njem se imenuje *Thirringov model* v kvantni teoriji polja. Osebnostno je poznal velike fizike, kot so Schrödinger, Heisenberg, Einstein in Pauli. V petdesetih letih preteklega stoletja je deloval na nekaterih ameriških in evropskih inštitutih in univerzah. V letih 1968–71 je bil direktor teoretičnega oddelka pri CERN-u. Ima okoli 150 znanstvenih objav, številna mednarodna odlikovanja, med drugim Eötvösovo medaljo (1967), Schrödingerjevo nagrado (1969), Planckovo medaljo (1978), častni doktorat Univerze Komenskega v Bratislavi (1994) in Poincaréjevo nagrado (2000). Upokojil se je leta 1997. Je član več znanstvenih akademij. Thirringova velika ljubezen je glasba, zlasti orgelska.

Marko Razpet

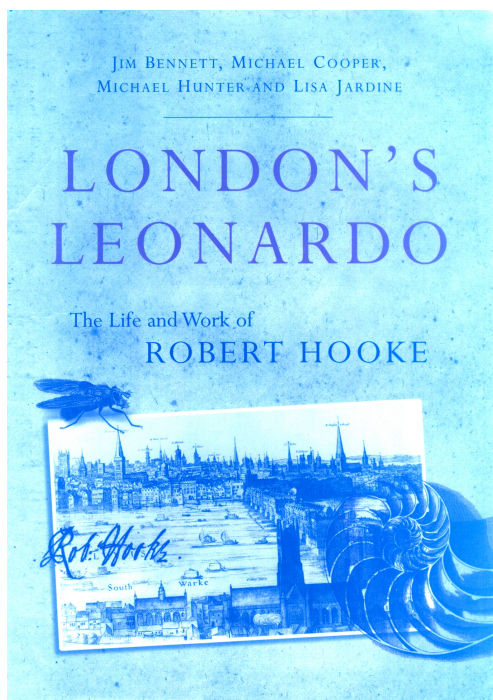
DVE KNJIGI O ROBERTU HOOKU

Jim Bennett, Michael Cooper, Michael Hunter in Lisa Jardine: LONDON'S LEONARDO – THE LIFE AND WORK OF ROBERT HOOKE, Oxford University Press, Oxford 2003, 240 strani.

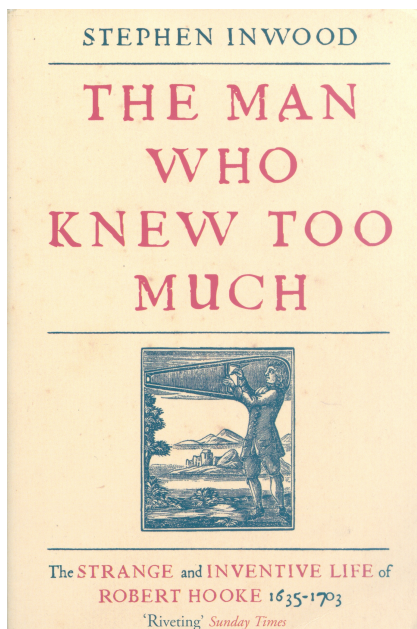
Stephen Inwood: THE MAN WHO KNEW TOO MUCH – THE STRANGE AND INVENTIVE LIFE OF ROBERT HOOKE 1635–1703, Pan Books, London 2003, 544 strani.

Obe knjigi ponovno odkrivata zanimivo podobo Roberta Hooka (1635–1703), ki ga poznamo predvsem po *Hookovem zakonu*: razteg vzmeti je premo sorazmeren sili. Hooke je to izrazil po latinsko: UT TENSIO, SIC VIS (*Kakrššen raztezek, takšna sila*) in to sprva skrnil v anagram: CEIINOSSSTTUU. Njegovi drugi dosežki so bili tri stoletja skoraj pozabljeni. Šele v zadnjih letih spoznavamo, da je bil odličen znanstvenik in izumitelj na mnogih področjih in da je njegova intuicija prehitela čas zlasti na področju geologije in biologije, kjer je pravilno razložil nastanek fosilov in zagovarjal spreminjanje vrst. Hookova vsestranskost, ki je vključevala tudi slikarsko izobrazbo, je najbolje prišla do izraza v knjigi *Micrographia*

je najbolje prišla do izraza v knjigi *Micrographia or some Physiological Descriptions of Minute Bodies made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries thereupon* (1665). V njej najdemo naravnost čudovite slike žuželk, pa tudi rastlinskega in mineralnega sveta, sad natančnega opazovanja z mikroskopom in povečevalnim steklom. Odkril je in imenoval celice v pluti, čeprav so ga zanimale predvsem zaradi mehaničnih lastnosti plute – prožnosti in majhne gostote. Hookova *Micrographia* je imela izreden vpliv na evropsko znanost. Slovenski prevod Hookovega opisa celic najdemo na spletni strani *Zeleni skrat*.



Skoraj neverjetno je, da Angleži do zdaj njegovih dosežkov niso poskušali ovekovečiti. Razlog je v Hookovem konfliktu z Isaacom Newtonom. Ko je Newton leta 1672 objavil svoj članek o barvah, je Hooke zavrnil Newtonove rezultate o beli svetlobi kot mešanici barv in svetlobi kot curku delcev – sam je zagovarjal valovno teorijo. Kot je sam priznal, je za študij Newtonovega članka in pisanje zavrnitve „imel časa“ le tri ali štiri ure. To za Hooka, ki je bil navajen delati hitro in več stvari hkrati, verjetno niti ni bilo posebno nenavadno. Zdi se, da je bilo v ozadju tudi ljubosumje na Newtona. Newton je užaljen hotel izstopiti iz Royal Society, ker tega Hooku nikoli ni mogel odpustiti. Ta zamera je imela za Hooka posledice, ki jih je čutiti še danes. Obe knjigi se Newtonovega odnosa do Hooka lotevata skrajno previdno.



Prvo knjigo so napisali štirje specialisti. Zadnji del zelo podrobno opisuje Hookovo nenehno jemanje raznih poživil, kar mu je sčasoma uničilo zdravje. Najden je bil namreč Hookov dnevnik, ki vsebuje mnoge presenetljive podrobnosti.

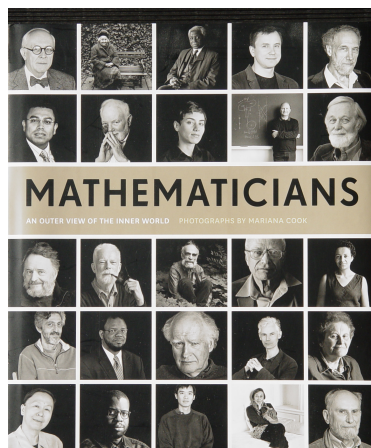
Stephen Inwood je drugo knjigo kljub velikemu obsegu naredil privlačno. Knjiga opisuje tudi takratno družbo in vsebuje nekatere bolj škandalozne strani življenja Hooka in njegovih sodobnikov. Nekatere podrobnosti se slovenskemu bralcu zdijo prvi hip nezanimive. Hooke je bil recimo Gresham Professor of Geometry na Gresham College v Londonu. No, prav ta položaj je pred kratkim dobil Robin Wilson, matematik, ki ga dobro poznamo tudi pri nas.

Hooke je bil s svojimi racionalnimi in dobrimi razlagami naravnih pojavov presenetljivo moderen. Poleg znanosti se je ukvarjal še z drugimi stvarmi. Bil je eden od arhitektov obnove Londona po velikem požaru leta 1666, stavbar in zemljemerec, izumitelj vertikalnih drsnih oken, uravnovešenih z utežmi. Tudi ti njegovi prispevki so bili dolgo pozabljeni.

Peter Legiša

Mariana Cook, MATHEMATICIANS – An Outer View of the Inner World, Princeton University Press, 2009, 200 strani.

Knjiga je zbirka 92 črno-belih celostanskih fotografij matematičark in matematikov, ki jih je fotografinja Mariana Cook v nekem časovnem obdobju posnela v Princetonu. Odprta knjiga ponuja bralcu na desni strani fotografijo osebe, na levi strani pa njeno krajšo življenjsko zgodbo. Marsikatera vsebuje kakšno zanimivo anekdoto ali pa opis odločitve, po kateri je kdo krenil na pot matematičnih znanosti. Ko bremo za posamezno osebo besedilo, ki ga je bodisi napisala sama ali pa je nastalo kot rezultat pogovora s fotografi-



njo, se nam zdi, kot da nam z desne strani želi povedati nekaj zelo pomembnega. Morda tudi to, da je samo človeško bitje s svojo osebnostjo, navadami in nagnjenji, tako kot vsi drugi. Vendar pa prej ali slej uvidimo, da le imajo nekaj, kar nima vsak. Osebe v knjigi so različnih starosti, obeh spolov, različnih polti in narodnosti.

Mariana Cook je napisala knjigi predgovor, v katerem opisuje, zakaj se ji zdijo matematičarke in matematiki izjemni. Uvod je napisala ena izmed 92 oseb, predstavljenih v knjigi, in sicer Robert Clifford Gunning, profesor matematike na Univerzi Princeton, sklepno besedo pa Brandon Fradd, ki je diplomiral iz matematike v Princetonu in zaradi dobrega poznavanja matematičark in matematikov dal Cookovi idejo, da je izdala o njih knjigo s fotografijami.

Mariana Cook je priznana ameriška fotografinja, ki je svoje zbirke fotografij razstavljala v več umetnostnih galerijah v ZDA, Parizu in Londonu. Izdala je tudi več knjig s svojimi fotografijami. Morda bo tukaj predstavljeno delo prišlo v roke tudi mladim bralkam in bralcem in upajmo, da bo kdo od njih dobil navdih za študij matematike.

Marko Razpet

MERJENJE KVALITETE¹
Prispevek na Posvetu o poučevanju fizike, kemije in
matematike²

DAMJAN KOBAL

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

in

BOJAN HVALA

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Če merimo kvaliteto pouka v naših šolah po številu odličnih ocen, številu maturantov, številu diplomantov, doktorandov, smo lahko ponosni. Kvaliteta šole pa ni v številu odličnih spričeval, ampak v odličnosti in globini vsebine. Kvalitete ni mogoče meriti, lahko jo le ocenimo. Ocena pa zahteva odgovornega in pristojnega ocenjevalca in dejansko ni težka. Tako učitelji kot otroci in starši namreč dobro vedo, kdo je dober in kdo slab učitelj ali učenec in kaj je dobro ter kaj slabo znanje.

V novih tehnološko-medijskih razmerah je delo učitelja vse težje. Zahteva veliko inovativnosti, poleg strokovnega in pedagoškega znanja pa tudi močno in zrelo osebnost. Le tak učitelj lahko v šoli ustvari intelektualno in čustveno izjemne dogodke, ki se dotaknejo učenca. Zato potrebujemo intelektualno zmožne, osebno zrele in pedagoškemu delu predane učitelje. Zato morajo biti kriteriji pri izobraževanju učiteljev večstranski in dovolj visoki. Ne potrebujemo velike množice medlih učiteljev, pač pa zmerno število odličnih.

Odličnih učiteljev imamo v naših šolah kar nekaj. Poleg njih imamo tudi ravnodušno-ležerne učitelje, ki si iz meseca v mesec služijo plačo; in končno tudi učitelje, ki iz tega ali onega razloga v šoli delajo veliko škodo. Ključno vprašanje je, ali znamo prepoznati ene, druge in tretje? Ali znamo prve

¹Ponatis s soglasjem avtorjev in SAZU

²SAZU, Ljubljana, 22. 9. 2010

nagraditi, druge spodbuditi in tretje odstraniti? Bojimo se, da je odgovor negativen.

Kaj lahko storimo, da bi bil pouk v naših šolah kvalitetnejši?

- a. Da bi bil pouk lahko kvaliteten, se moramo ločiti od zablode permisivne vzgoje, ki se je izrodila v kaotičen sistem nezaupanja, izigravanja, lenobe in nesmiselne (pre)obremenjenosti. Mladi potrebujejo izzive, ne udobja. Mladi potrebujejo enostaven in pregleden sistem dolžnosti. Jasna pravila obnašanja. Potrebujejo (simbolično) „brezpogojno ljubezen matere“ in tudi „pogojno ljubezen očeta“. Mladi potrebujejo „motivacijo“, torej odgovorne odrasle, ki jih znajo, zmorejo in smejo „pognati v tek“. Potrebujemo učitelje, ki zmorejo globoko misliti, da bi lahko obvladali gnetljivega duha mladih. Potrebujemo učitelje, ki bodo znali v mladih razvijati kritičnost, ki jih edina lahko obvaruje pred modernim suženjstvom potrošništva. Mlade je treba učiti konstruktivnega in odgovornega reševanja (lahko razumljivih, a težko rešljivih) problemov. Nasprotno pa „permisivna vzgoja“ živi v iluziji, da problemov ni. Problemi in konflikti so sestavni del življenja, spretnost in modrost pri njihovem reševanju pa sta vir navdiha in temelj človeškega dostojanstva. Šola naj mlade povede od odgovorov na naravne otroške zakaje do odraslih zakajev, ki odgovarjajo na probleme človeškega bivanja. Čeprav je mogoče razumeti „vzgib staršev in vzgojiteljev“, da bi otroke zaščitili pred problemi, je „zaščitniška“ vzgoja nezrela, neodgovorna in škodljiva. Človek se lahko produktivno uči in navaja novega le v mladosti. Petindvajsetletni študent, ki mu mati rešuje življenjske in študijske probleme, je izgubljen in nima več skoraj nikakršnih možnosti dostojnega življenja. Niti on niti njegovi bližnji. Akademiki in tudi drugi ljudje, ki se z veseljem lotevamo svojega dela, se najbrž dobro zavedamo, kako vznemirljivo utegne biti delo, tako v znanosti, umetnosti kot tudi drugje, kako se odpirajo svetovi, kako se rojevajo in ugašajo upanja in kako čudovito se včasih sestavijo dogodki in spoznanja. Kako torej produktivno delo utegne biti veliko bolj zabavno od vsake tako imenovane zabave. Tovrstnega duha odprtosti in radovednosti je v naših šolah premalo. Tudi zaradi permisivne vzgoje.
- b. Da bi bil pouk lahko bil kvaliteten, je treba nujno zagotoviti primerno selektivnost šolskega sistema. Velik del osnovnošolcev se z odličnim

uspehom vpiše na srednje šole in tudi tam je prehodnost skoraj popolna. Ovir za vpis na univerzitetne študijske programe je malo, število razpisanih mest nesorazmerno visoko. Financiranje univerze po številu študentov odstranjuje tudi zadnje filtre v sistemu. Večina generacije se torej dovolj gladko zapelje skozi različne faze sistema in se znajde na ogromnem in nepreglednem zaposlitvenem trgu. Na njem potem divja krut boj, v katerem sposobnost in znanje pogosto nista ključna. V selektivnem šolskem sistemu bi diploma pomenila solidno službo in bi že s tem motivirala kvalitetnejši študij.

- c. Da bi bil pouk bolj kvaliteten, bi ga morali osvoboditi forme. Formalizem le navidezno dobro definira pomene, o katerih govorimo. Formalizem marsikje postaja slepilo pomena in odsotnost odgovornosti. Namesto miselnega navora pri iskanju pomena se neodgovorno zatečemo k formalnemu. Namesto odgovornih „Kaj to sploh pomeni?“, „Ali otrok to razume?“, „Zakaj me ne razume?“, „Kako bi lahko razumel še drugače?“ imamo poudarjene „pomene v okvirčkih“! Kot rečeno, kvalitete pouka ni mogoče formalno meriti. Da bi jo lahko formalno merili, smo marsikje pouk sistemsko zakomplicirali, vsebinsko pa trivializirali. Iluzija, da bomo s formo preprečili napake, je ena največjih zablod moderne dobe. Dostojanstvo človeka temelji na svobodi in odgovornosti. Na pravici in dolžnosti, da se odloča. V naivnem pohodu formalizma, ki naj bi preprečil človeške napake, smo napake pomnožili, odgovornost zmanjšali in človeku vzeli dostojanstvo. Da bi pouk naredili kvaliteten, je nujno, da učitelju damo vsebinsko in organizacijsko svobodo. Namreč, neskončni sistem kombinacij in nesmiselnih formalnopравnih „moraš“ in „ne smeš“ ima za posledico, da učitelji ne znajo, si ne upajo ali ne smejo „razumno in jasno odgovoriti“ niti na najosnovnejša (sistemska) vprašanja, kaj šele postavljati jasne in dovolj težke zahteve. Kot bi igrali igro, katere pravil ne poznamo in se moramo za vsako potezo posvetovati, ali je v skladu s pravili . . . Pri taki igri ni strategije, ni globine, ni izziva. Taka igra ubija, namesto da bi razvijala duha. Dobre igre imajo enostavna pravila, ki jih hitro obvladate/razumete, da se lahko čim prej posvetite vsebini.
- d. Da bi bil pouk kvaliteten, mora učitelj nujno imeti pravico ocenjevanja. Pod krinko objektivnosti je namreč učitelju odvzeta pravica ocenjeva-

nja, znanje naj bi le še meril. Objektivno meril. Na podlagi točno določenih pravil in forme, ki naj bi zagotavljali objektivnost. Ocena je odgovorno dejanje posameznika in jo je nemogoče formalizirati. Učiteljevo dajanje ocene temelji na dostojanstveni odločitvi. Za učenca je ocena izziv, ogledalo, nagrada, kazen,... V strahu, da bi učitelj storil napako, in v želji, da bi bila učencu dana nova priložnost, smo iz ocene marsikje naredili sprevrženo laskanje, ki ima z objektivnostjo komaj kaj povezave. Iz ocene smo naredili virtualni mehanizem, ki učenca ne spodbuja k naporu in delu, ampak k iskanju bližnjic in vedno novih možnosti. Značilno za celo šolsko vertikalo, še najbolj pa za osnovne šole, je, da so meje odličnosti postavljene zelo nizko. Število odličnih ocen je nerazumno visoko, naši učenci so po anketah mednarodnih raziskav izrazito in neupravičeno samozavestni. Vse to zamegljuje kritičen pogled na lastne sposobnosti, povzroča napačne poklicne odločitve in znižuje prag napora, ki so ga učenci pripravljani vložiti v opravljanje dela. V nekaterih šolah ravnatelji celo odkrito pozivajo k nižanju kriterijev. Zlahka podeljena odlična ocena je zdravilo za vse težave, kup odličnih ocen kratkoročno zagotavlja vsesplošno zadovoljstvo. Dolgoročno pa se s tem povzroča velika škoda. Koristno bi bilo analizirati ekonomsko, izobraževalno, človeško in čustveno škodo, ki jo povzroča (hiper)inflacija „podeljevanja spričeval“.

- e. Da bi pouk naredili kvaliteten, je nujno učitelju dati konkretno strokovno podporo v obliki možnosti vzajemnih konzultacij in svetovanj ter vzorčnih ur, ki naj jih opravljajo najuglednejši učitelji. Slednje bi ob veliko nižji ceni imele na kvaliteto pouka veliko večji vpliv kot trenutni sistem vsebinsko pogosto škodljivih in zgolj formalnih inšpekcij, kot kompleksen in nepregleden sistem formalnih izobraževanj in kot razvejen sistem projektnih aktivnosti učiteljev.
- f. Da bi pripravili okvire za kvaliteten pouk, je nujno na vseh ravneh šolske organizacije promovirati zdrav razum, sistematičnost, jasnost, razumljivost in preprostost – v jeziku „psihoanalize“: od Junga k Frommu.
- g. Da bi pripravili okvire za kvaliteten pouk, je nujno vzpostaviti smiseln sistem vrednotenja učiteljev, ki naj temelji na kvaliteti dela v razredu.

Težavnost vrednotenja resnega učiteljskega dela in lahkotnost, s katero lahko štejemo in merimo formalne učiteljske „strokovne dosežke“, nikakor ne moreta biti opravičilo za povzdigovanje slednjega in za preziranje prvega. Z drugimi besedami, znanje bi morali izvzeti iz košarice banalnih potrošniških artiklov in mu vrniti vrednost, ki temelji na radovednosti duha in ne na ambiciji in partikularnih interesih. Gledano s finančnega vidika posamezne šole vlaganje v kvaliteto osnovnih šolskih dejavnosti niti ni smiselno. Učitelj, ki se razdaja v razredu in tke pristno mrežo odnosov z učenci in starši, danes v viziji šole pomeni manj od učitelja, ki se v razredu sicer slabo počuti, zato pa je spreten pri izpeljavi projektov, s katerimi šoli za nekaj rezultatov sumljive teže lahko zagotovi dodatne prihodke. Najbrž bi bilo treba pogosteje poudarjati, kaj je pravo bistvo učiteljeve dejavnosti.

- h. Da bo pouk kvaliteten, ga je nujno graditi na miselnih izzivih in zadovoljstvu, ki ga daje razumevanje. Že pred 2500 leti je Platon zapisal: *Skozi vzgojo moramo pomagati mladim najti užitek v učenju. Če je (bolj pridobitev kot) posedovanje materialnih dobrin eden najprimarnejših gonov, ki poganja moderno potrošniško družbo, je želja po razumevanju najprimarnejši vzgib človeškega duha. Učenje zahteva jasno in preprosto strukturo z dovolj miselnega napora. Pouk naravoslovja je pri tem ključen, saj vseskozi gradi na principih pomena (in je tudi navdih v vlogi iskalca pomena). Ne nazadnje je kvaliteten pouk naravoslovja, ki utrjuje dojemanje eksaktnih pomenov, nujen predhodnik humanistične izobrazbe, kjer postajajo pomeni ohlapnejši (manj formalni), da bi lahko zaobjeli najkompleksnejše pojme človeškega bivanja. Na področjih kemije, fizike ... se podeljujejo Nobelove nagrade. Najvišja nagrada na področju matematike, po časti primerljiva z Nobelovo, je Fieldsova medalja. Na njej je zapisano (v latinščini): Iščeš, da bi prešel lastnega duha in razumel svet. Citat je vzet iz 2000 let stare Maniliusove *Astronomicae* in cel odstavek čudovito opisuje vrednoto in poslanstvo znanja, ki se je v današnji šoli v veliki meri izgubilo in z njim kvaliteta pouka: ... iščeš, da bi premeril nebo, in čeprav si rojen s smrtjo, iščeš, da bi lahko osvojil vedenje, ki ga vsebuje tvoja usoda, iščeš, da bi prešel lastnega duha in razumel svet. Muke na poti spoznavanja so primerljive z nagrado spoznanja in nikar ne pričakuj resnice brez visoke cene ... *Manilius's Astronomica* 4.392*

Za sklep se vprašajmo, kdo je učitelj in kakšnega učitelja želimo. Ker želimo odgovornega, pristojnega in kompetentnega učitelja, mu vrnimo odgovornosti in pristojnosti. Začnimo mu zaupati, kajti čeprav ni brez napak, je bolj zaupanja vreden, kot so mnogi stihijski mehanizmi, ki jih poganjata forma in ambicija. Če nam učitelji niso všeč, jih zamenjajmo z boljšimi, a ne oropajmo jih zaupanja, brez katerega ni mogoče učiti. Za začetek pa se z mislijo legendarnega ameriškega in svetovnega menedžerja Leeja Iacocce, dolgoletnega direktorja Forda in Chryslerja, zamislimo nad razumnostjo naše družbe. Lee Iacocca namreč pravi: *V razumni in civilizirani družbi bi najboljši izmed nas hoteli postati učitelji, saj je prenašanje spoznanj človeštva na mlade generacije dejanje najvišje časti in odgovornosti, ki si ga je mogoče zamisliti.* Bojimo se, da naša šola drsi v medlost, ravnodušnost in nižanje kvalitete. Obstajajo učitelji, ki v duhu pravih pedagogov želijo svojim učencem dati popotnico v obliki znanja in izoblikovanja osebnosti, a ti niso prepoznani in nagrajeni. Bojimo se, da vse bolj prevladuje pragmatičen ležeren pristop z nizkim vložkom in nizkimi pričakovanji do učečih. Temu bi se želeli izogniti. V ta namen po najvišji instituciji znanosti in umetnosti pozivamo k ponovnim razmislekom tako glede organiziranosti celotne šolske vertikale, vzgojnih osnov, pa tudi možnosti za prepoznavanje in podporo tistih posameznikov, ki šolsko poslanstvo jemljejo iskreno in ga v vsej svoji globini razumejo.

Damjan Kobal in Bojan Hvala

VESTI

ASTRONOMSKE NOVICE

1. DMFA Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko sta pričeli cikel poljudnih predavanj iz astronomije z naslovom Sprehod skozi vesolje. Predavanja so vsak prvi četrtek v mesecu od 19h–20h v Peterlinovem paviljonu (poleg Inštituta Jožef Štefan), Jadranska 26, Ljubljana. Prvo predavanje je bilo 7. oktobra, ko je o začetkih astronomije predaval prof. dr. Tomaž Zwitter. Naslednje predavanje bo 4. novembra, ko bo Anja Lautar predavala o telesih v Sončnem sistemu. Datume in seznam predavanj, ter prosojnice in posnetek predavanja, ki je že bilo, lahko dobite na spletni strani <http://www.sprehodskozivesolje.si/> www.astronomija2009.si.

2. Tudi letos bo potekalo tekmovanje iz znanja astronomije pod organizacijo DMFA Slovenije. Šolsko tekmovanje bo 2. decembra, državno pa 18. decembra. Na spletni strani www.astronomija2009.si je odprt forum Tekmovanje iz astronomije namenjen vprašanjem glede tekmovanja in izmenjavi izkušenj med mentorji tekmovalcev. Tudi vzorčne naloge bodo kmalu objavljene na tem spletnem naslovu.
3. V soboto, 6. novembra 2010 bodo s pričetkom ob 14. uri v Portorožu na občnem zboru DMFA potekala predavanja namenjena mentorjem tekmovalcev kot tudi ostalim učiteljem astronomije v osnovnih in srednjih šolah. V primeru lepega vremena bodo potekala tudi opazovanja na prostem.
4. V mesecu novembru nameravamo organizirati dvodnevno astronomsko delavnico Opazovanja s teleskopi s poudarkom na pridobivanju praktičnih izkušenj iz priprave in izvedbe opazovanj v šolah. Vsi zainteresirani za sodelovanje na delavnicah za dodatne informacije pošljite elektronsko pošto na astro2009@mf.uni-lj.si.

Anja Lautar

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Spoštovani bralci, v uredništvu smo se odločili, da vam v razmislek občasno ponudimo zanimive probleme. Če imate na zalogi kakšno zanimivo fizikalno ali matematično nalogo, vas prosimo, da nam jo skupaj z rešitvijo pošljete na naslov zaloznistvo@dmfa.si.

Bralce pozivamo, da zastavljeni problem skušajo rešiti in nam rešitve pošljejo na zgornji naslov. Radovednost tistih, ki jim bo problem pretrd oreh, bomo potešili v naslednji številki, kjer bomo objavili najbolj posrečeno rešitev.

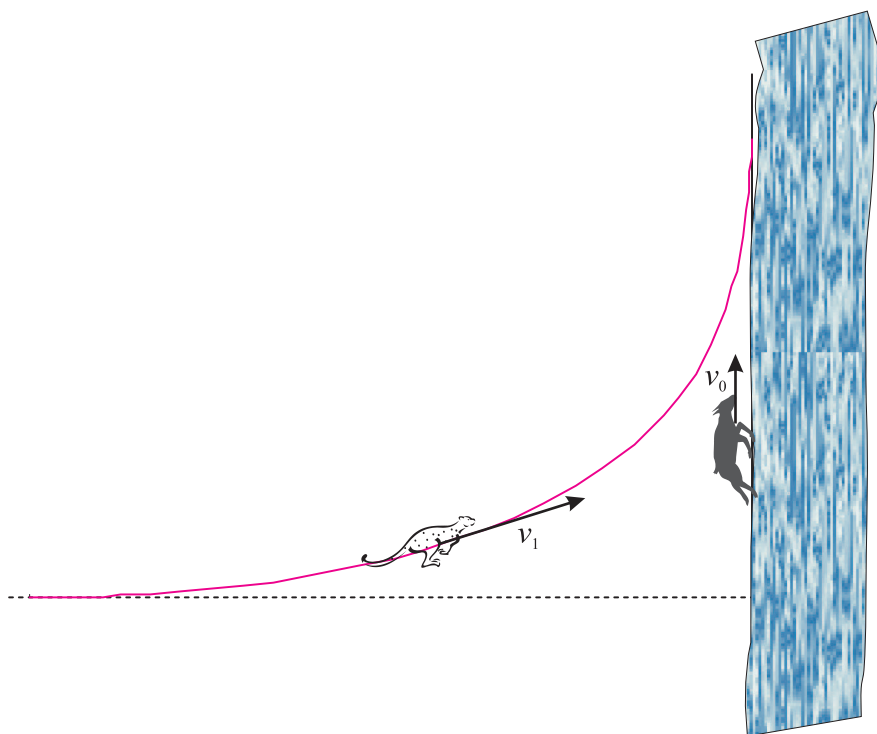
Gepard in gazela

Nekaj let bo že, kar smo asistenti pri fiziki tuhtali o četrtni nalogi prvega kolokvija. Četrta naloga na fizikalnem kolokviju običajno velja za težko –

Naloga

sicer ne z veliko računanja, le zvito. Razmišljali smo o sledečem problemu, ki pa na koncu ni prišel v poštev, saj smo se sami preveč namučili z njim.

Ob ravnem potoku se napaja gazela, ko jo uzre gepard. Zveznica med gepardom in gazelo je pravokotna na potok. Gazela in gepard se poženeta v tek v istem trenutku in takrat začnemo meriti čas. Gazela beži s konstantno hitrostjo v_0 vzdolž potoka, gepard pa s konstantno hitrostjo v_1 tako, da je ves čas usmerjen proti gazeli. Po kakšni krivulji se giblje gepard ter kje in po kolikšnem času ujame gazelo? Podoben problem je poznan tudi kot „Kmet in prašiček“, ko kmet lovi prašička, da mu ne uide iz ograde, v kateri je pozabil zapreti vrata.



Slika 1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 2010

Letnik 57, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

| Članki | Strani |
|--|---------|
| Prava simetrična verižnica (Marko Razpet) | 121–133 |
| Naravna konvencija v vodoravnem valju (Aleš Mohorič) | 134–143 |
| Nove knjige | |
| Einstein Entformelt (Marko Razpet) | 144–146 |
| Dve knjigi o Robertu Hooku (Peter Legiša) | 147–148 |
| Mathematicians (Marko Razpet) | 149 |
| Šola | |
| Merjenje kvalitete (Damjan Kobal in Bojan Hvala) | 150–155 |
| Vesti | |
| Astronomske novice (Anja Lautar) | 155–156 |
| Vprašanja in odgovori | |
| Gepard in gazela – naloga (Aleš Mohorič) | 156–XV |

CONTENTS

| Articles | Pages |
|--|---------|
| The true symmetric catenary (Marko Razpet) | 121–133 |
| Natural convection in a horizontal cylinder (Aleš Mohorič) | 134–143 |
| New books | 144–149 |
| School | 150–155 |
| News | 155–156 |
| Questions and Answers | 156–XV |

Na naslovnici: V dolgem vodoravnem valju polnem tekočine, ki ga grejemo pri dnu, se pojavi konvekcija. Slika prikazuje v preseku hitrostno polje in polje temperaturnega popravka k linearnem temperaturnem profilu, ki se vzpostavi v valju. Puščice na sliki predstavljajo hitrostno polje in opazimo lahko simetričen vzorec dveh vrtincev – neke vrste Benardovo celico, ko se tekočina dviga po sredini in pada na robovih valja. Na temperaturnem polju razberemo, da je temperatura tik nad dnom, kamor priteka bolj segreta voda z dna valja, povišana v primerjavi z linearnim profilom (rdeča), od vrha pa se ob straneh vijeta dva kraka relativno nižje temperature tekočine (modra), ki se shladi ob zgornjem robu valja. Slika sodi k članku *Naravna konvekcija v vodoravnem valju*.