IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2016
Letnik 63
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 63 • ŠT. 2 • STR 41-80 • MAREC 2016

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2016, letnik 63, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

BORSUK-ULAMOV IZREK

KATJA KELVIŠAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55M25

V članku se bomo seznaninli z Borsuk-Ulamovim izrekom in njegovo uporabo v problemu poštene delitve. Bolj konkretno se bomo ukvarjali s problemom pravičnega razreza torte. Pokazali bomo tudi izrek o sendviču. Nadalje si bomo ogledali Borsuk-Ulamovemu izreku ekvivalentne trditve. S pomočjo teorije stopnje v evklidskih prostorih bomo izpeljali posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka na simetrične množice. Pri tem bomo spoznali pojem stopnje gladke in zvezne preslikave, ovojno število ter njihove številne lastnosti.

BORSUK-ULAM THEOREM

In this article we will get familiar with the Borsuk-Ulam theorem and its application in a fair division problem. More concretely, we will deal with the fair cake-cutting problem. We will also prove the Ham Sandwich theorem. Furthermore we will take a look at equivalent statements of the Borsuk-Ulam theorem. We will obtain the generalization of the Borsuk-Ulam theorem on symmetric sets, which we will do with the help of degree theory in Euclidean spaces. We will also get to know new terms, such as the degree of a smooth or continous mapping and winding number, and their characteristics.

Uvod

Prvič sem se z Borsuk-Ulamovim izrekom srečala že v prvem letniku študija matematike, ko smo pri Analizi 1 pokazali, da v vsakem trenutku na Zemlji obstajata dve nasprotni si točki z enako temperaturo. Omenili smo še, da obstajata antipodni točki, ki imata poleg temperature enak tudi pritisk. Takrat izreka samega še nisem poznala in tako nisem vedela, da to pravzaprav sledi iz najbolj znane oblike Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi naslednje:

Izrek 1. *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.*

V izreku je s S^n mišljena enotska sfera v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, vendar izrek velja tudi za enotsko sfero v nekaterih drugih normah na $\mathbb{R}^{n+1}$, npr. v L^1 normi, ter za bolj splošne podmnožice $\mathbb{R}^{n+1}$.

Izrek je dobil ime po Stanislawu Ulamu, ki je problem zastavil, in Karolu Borsuku, ki ga je dokazal.

Zgornja verzija Borsuk-Ulamovega izreka je bila ena izmed treh originalnih trditev, ki jih je Karol Borsuk objavil leta 1933 v reviji *Fundamenta*

Mathematicae, glej [3]. Od takrat so se razvile številne različice, posplošitve ter aplikacije. Kot Borsuk-Ulamov izrek je v nadaljevanju članka mišljen izrek 1, razen ko je navedeno drugače.

V prvem delu članka se bomo osredotočili na uporabo izreka. Pomembno vlogo bo odigral t. i. izrek o sendviču, ki sledi iz Borsuk-Ulamovega izreka. Uporablja se na določenem področju problema poštene delitve (angl. fair division), ki izhaja iz problemov vsakdanjega življenja, kot so npr. dražbe, delitve premoženja ob ločitvah, razrez torte itd.

V drugem delu članka pa si bomo ogledali nekaj Borsuk-Ulamovemu izreku ekvivalentnih trditev in pokazali ekvivalence. Nato bomo s pomočjo teorije stopnje v evklidskih prostorih izpeljali posplošitev tega izreka na simetrične množice. Pri tem bomo uporabili lastnosti stopnje preslikave in ovojnega števila.

Z Borsuk-Ulamovim izrekom ste se bralci revije Obzornik že seznanili leta 1987, glej [4].

Primer uporabe Borsuk-Ulamovega izreka

Iz Borsuk-Ulamovega izreka sledi nekaj pomembnih trditev s področja topologije in diskretne matematike. V tem razdelku se bomo osredotočili na izrek o sendviču in njegovo uporabo v problemu poštene delitve.

Problem poštene delitve se ukvarja z delitvijo množice dobrin X med njene upravičence, tako da vsak dobi delež, ki mu najbolj pripada.

S tem problemom so se ljudje začeli ukvarjati že zelo zgodaj, ko je prišlo do delitve vojnega plena, premoženja, posesti, itd. Večino primerov so rešili enostransko s pomočjo avtoritete (kralji, razsodniki, ...), matematične (logične) rešitve so bile redke. Večji premiki na tem področju so se zgodili v zadnjem stoletju, ko se je razvilo kar nekaj algoritmov za različne tipe problema delitve.

Poznamo različne tipe problema poštene delitve, saj so predmeti, ki jih moramo razdeliti, lahko zelo različni. X je tako lahko končna množica nedeljivih objektov, kot npr. klavir, avto, stanovanje, ali pa množica neskončno deljivih objektov, npr. denar, torta. Objekti so prav tako lahko homogeni, kjer je pomembna samo količina, ki jo posameznik prejme, ali heterogeni, kjer je pomembno, kaj točno (glede na svoje preference) prejme. V nadaljevanju članka se bomo ukvarjali z delitvijo heterogene množice z deljivimi objekti, kot je npr. torta (angl. cake-cutting problem), pri čemer bomo predpostavili, da so preference posameznikov aditivne. To pomeni: če si posameznik določen kos objekta želi 40-odstotno, si preostanek objekta želi 60-odstotno. Vsota mora torej vedno biti 100 %.

Eden od prispevkov k modernemu reševanju problema poštene delitve je tudi izrek o sendviču. Zvezna verzija tega izreka se glasi:

Izrek 2. *Naj bodo* $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ *omejene množice z volumnom* ($\int_{A_i} dV$ *obstaja za vsak* i). *Potem obstaja hiperravnina* h, *ki vsako od teh množic razpolovi.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka na ustrezni zvezni preslikavi $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$. Izberimo poljubno točko ν na enotski sferi $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ in tako točko T_ν na premici skozi izhodišče s smernim vektorjem ν, da hiperravnina H_ν z normalo ν skozi točko T_ν razpolavlja množico A_1. Velja torej $\int_{A_1 \cap H_\nu^+} dV = \int_{A_1 \cap H_\nu^-} dV$, pri čemer sta H_ν^+ in H_ν^- zaprta polprostora z robom H_ν, prvi v smeri normale, drugi pa v nasprotni smeri. Točka T_ν obstaja zaradi omejenosti množice A_1. Če je množica A_1 nepovezana, je takšnih točk lahko več in tvorijo cel interval, za točko T_ν pa izberemo na primer središčno točko tega intervala. Preslikavo f definiramo s predpisom $f(\nu) = \left(\int_{A_i \cap H_\nu^+} dV\right)_{i=2}^{n}$. Ni težko videti, da je preslikava f zvezna. Po Borsuk-Ulamovem izreku torej obstaja taka točka $x \in S^{n-1}$, da je $f(x) = f(-x)$. Iz konstrukcije vidimo, da je $T_x = T_{-x}$ in $H_x = H_{-x} =: h$. Enakost $f(x) = f(-x)$ pomeni, da hiperravnina h razpolavlja množice $A_2, \dots, A_n$, po konstrukciji pa razpolavlja tudi množico A_1. ∎

Čeprav izrek o sendviču zagotavlja, da je sendvič ali torto mogoče razdeliti pod predpostavkami kot v izreku, nam ne pove ničesar o tem, kako naj bi to storili. Nekaj o tem nam pove naslednji algoritem za pravično delitev torte med n oseb, glej [5, str. 328, 329]. Denimo, da n ljudi sedi za okroglo mizo s torto v središču mize. Nekdo začne in odreže kos, za katerega se mu zdi, da ustreza eni n-tini, ter odrezani kos poda osebi na svoji levi. Če se tej osebi zdi, da je njen predhodnik odrezal manj ali točno eno n-tino, jo enostavno poda naprej v levo, sicer pa odreže odvečni del in ga vrne k preostanku torte v središču mize. Sedaj zmanjšan kos poda levemu sosedu. Postopek se ponavlja, dokler nihče več ne zmanjša kosa. Kos dobi oseba, ki ga je nazadnje zmanjšala. Algoritem se nato ponovi med $n-1$ osebami, ki še niso dobile kosa, in preostankom torte.

V zgornjem algoritmu smo torto razdelili na n kosov. Torto pa je mogoče razdeliti na samo dva dela glede na preference n ljudi tudi direktno z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka, glej [6, str. 16, 17]. Torto predstavimo s kompaktno množico $T \subset \mathbb{R}^3$. Želimo jo razdeliti na dva dela v skladu z željami n ljudi. Vsaka oseba lahko prereže torto, nastale kose pa nato razdelimo v dve skupini, ki predstavljata iskana dela. Želje ljudi, ki so lahko npr.

kos torte z več čokolade ali tisti z več jagodami itn., opišemo z zveznimi funkcijami $\rho_i : T \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, n$, kjer je za i-tega opazovalca vrednost kosa torte $K \subset T$ enaka $\int_K \rho_i dV$. Koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ izberemo tako, da torto omejujeta ravnini $\{z = 0\}$ in $\{z = 1\}$. Vsaka oseba naredi rez $\{z = c_i\}$, pri čemer je $c_i \in [0, 1]$ za vsak $i = 1, \dots, n$. Brez škode za splošnost velja $c_i \leq c_j$ za $i \leq j$. Videti želimo, da obstajajo taki rezi in razdelitev teh $n + 1$ kosov v dve skupini, ki tvorita razdelitev torte na podmnožici A in B, da bo delitev v očeh n ljudi poštena. To pomeni, da mora za vsak i veljati $\int_A \rho_i dV = \int_B \rho_i dV$.

Razdelitvi $n + 1$ kosov na dva dela priredimo točko na n-sferi S v L^1 normi na prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, torej na množici $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1\}$ takole: zapomnimo si debeline posameznih kosov, ki jih označimo z $d_1, \dots, d_{n+1}$ in zanje velja $d_1 = c_1 - 0, \dots, d_i = c_i - c_{i-1}, \dots, d_{n+1} = 1 - c_n$. Opazimo $\sum_{i=1}^{n+1} |d_i| = 1$. Razdelitvi priredimo točko $(\pm d_1, \dots, \pm d_{n+1})$ na sferi S, kjer je predznak k-te komponente pozitiven, če je k-ti kos v delu A, in negativen, če je v delu B torte T. Definirajmo sedaj funkcijo f, na kateri bomo uporabili Borsuk-Ulamov izrek. Da izrek velja tudi za zgoraj definirano n-sfero S, ki je simetrična množica, sledi iz četrtega razdelka tega članka. Funkcija $f : S \to \mathbb{R}^n$, ki točko $(z_1, \dots, z_n) \in S$ slika v $\left(\int_A \rho_i dV\right)_{i=1}^n$, je zvezna in zadošča predpostavkam Borsuk-Ulamovega izreka. Obstaja torej točka $z \in S$, da je $f(z) = f(-z)$. Iz konstrukcije vidimo, da točki $z \in S$ in $-z \in S$ izhajata iz kosov enakih debelin (absolutne vrednosti koordinat), vlogi delov torte A in B pa sta zamenjani (koordinate točke z so nasprotno predznačene kot koordinate točke $-z$). Ker sta tudi sliki obeh točk enaki, velja $\int_A \rho_i dV = \int_B \rho_i dV$.

Ekvivalentne trditve Borsuk-Ulamovemu izreku

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj ekvivalentnih formulacij Borsuk-Ulamovega izreka in dokazali njihovo ekvivalentnost [2, izrek 2.1.1].

Trditev 3. *Za vsak $n \geq 0$ so spodnje trditve ekvivalentne:*

1. *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.*

2. *Za vsako liho zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = 0$.*

3. *Ne obstaja liha zvezna preslikava $f : S^n \to S^{n-1}$.*

4. *Ne obstaja zvezna preslikava $f : B^n \to S^{n-1}$, ki je liha na robu, torej zadošča pogoju $f(-x) = -f(x)$ za vse $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*

5. *(Ljusternik in Shnirel'man) Za vsako pokritje sfere S^n z $n+1$ zaprtimi množicami $F_1, \ldots, F_{n+1}$ obstaja vsaj ena množica F_i, ki vsebuje antipodni točki ($F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).*

Dokaz. (1. $\Rightarrow$ 2.) Za liho preslikavo f po točki 1 dobimo $f(x) = f(-x)$, od koder sledi $f(x) = 0$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Če bi liha zvezna preslikava $f : S^n \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ obstajala, bi bilo to v nasprotju s točko 2, ker $0 \notin S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Če obstaja taka preslikava $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, da za vsako točko $x \in S^n$ velja $f(x) \neq f(-x)$, je s predpisom

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

dana liha zvezna preslikava g, ki slika iz n-sfere v $(n-1)$-sfero.

(3. $\Leftrightarrow$ 4.) Pri dokazu ekvivalence si bomo pomagali s projekcijo $\pi : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, ki je homeomorfizem zgornje hemisfere n-sfere (označimo jo s S_+) na n-disk.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Privzemimo, da je preslikava $g : B^n \to S^{n-1}$ liha na robu. Preslikavo f definiramo tako: $f(x) = g(\pi(x))$ za $x \in S_+$. Upoštevamo lihost in preslikavo f razširimo na spodnjo hemisfero, torej $f(-x) = -g(\pi(x))$ za $x \in S_+$. Preslikava f je tako definirana na vsem S^n; predpisa se ujemata na preseku, ker je preslikava g liha na ekvatorju S^n. Je tudi liha ter zvezna, saj je zvezna na obeh zaprtih hemisferah. To nasprotuje točki 3.

(3. $\Leftarrow$ 4.) Iz lihe preslikave $f : S^n \to S^{n-1}$ dobimo preslikavo $g : B^n \to S^{n-1}$, $g(x) := f(\pi^{-1}(x))$, ki je liha na ∂B^n.

(1. $\Rightarrow$ 5.) Dano je zaprto pokritje $F_1, \ldots, F_{n+1}$. Zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ definiramo takole: $f(x) := (\mathrm{dist}(x, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(x, F_n))$, pri čemer je $\mathrm{dist}(x, F_i)$ razdalja točke x do zaprte množice F_i. Po 1. obstaja točka $\overline{x} \in S^n$, za katero je $f(\overline{x}) = f(-\overline{x}) = y$. Če je i-ta koordinata točke y enaka 0, potem tako $\overline{x}$ kot $-\overline{x}$ ležita v F_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Če pa so vse koordinate y neničelne, $\overline{x}$ in $-\overline{x}$ ležita v F_{n+1}.

(5. $\Rightarrow$ 3.) Recimo, da obstaja $f : S^n \to S^{n-1}$, da je $f(-x) = -f(x)$. Sfero S^{n-1} razbijemo na $n+1$ zaprtih množic $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$, da velja $Z_i \cap -Z_i = \emptyset$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. To lahko storimo tako, da lica n-simpleksa, ki vsebuje 0 v svoji notranjosti, projiciramo na S^{n-1}. V $\mathbb{R}^2$ bi torej z radialno projekcijo stranice trikotnika projicirali na S^1, v $\mathbb{R}^3$ bi isto naredili s ploskvami tetraedra itd. Če sedaj pogledamo $F_1 =$

$f^{-1}(Z_1), \ldots, F_{n+1} = f^{-1}(Z_{n+1})$, vidimo, da zaradi lihosti f in lastnosti množic Z_i velja $F_i \cap -F_i = \emptyset$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. ∎

Pokazali smo ekvivalence med zgornjimi trditvami, ne pa tudi njihove veljavnosti. To bomo storili v naslednjem razdelku.

Posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka

Za posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka na simetrične množice potrebujemo nekaj znanja iz teorije stopnje v evklidskih prostorih. Najprej si bomo ogledali stopnjo gladke preslikave, nato pa še stopnjo zvezne preslikave, ki jo dobimo s pomočjo aproksimacije zvezne preslikave z gladkimi. Obravnavali bomo nekaj pomembnejših lastnosti tako definirane stopnje, ki jih bomo kasneje uporabili v dokazu posplošitve. S stopnjo preslikave je tesno povezano tudi ovojno število, s katerim bomo formulirali posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka.

Preden definiramo stopnjo gladke preslikave, ponovimo še pojem regularne vrednosti. Točka $a \in \mathbb{R}^m$ je *regularna vrednost* preslikave $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, če je diferencial, predstavljen z Jacobijevo matriko $J_f(x)$, surjektiven za vsak $x \in f^{-1}(a)$. Po Sard-Brownovem izreku [1, izrek 3.4, str. 63] je množica regularnih vrednosti gosta v $\mathbb{R}^m$, torej regularno vrednost najdemo v vsaki odprti množici.

Za celotni razdelek privzemimo, da je $D \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica in $X = \overline{D} \backslash D$ njena topološka meja. Ker je $\overline{D}$ kompaktna množica, je slika zvezne preslikave $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ kompakt in norma $||f|| = \max\{||f(x)|| : x \in \overline{D}\}$ je zato dobro definirana.

Trditev 4. *Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ regularna vrednost $f|_D$. Potem je $f^{-1}(a)$ končna množica (lahko tudi $\emptyset$).*

Dokaz. Množica $f^{-1}(a)$ je vsebovana v $\overline{D}$, ki je kompaktna. Zato je dovolj videti, da je $f^{-1}(a)$ diskretna in zaprta. Vzemimo poljuben $x \in f^{-1}(a)$. Po izreku o inverzni preslikavi je f lokalni difeomorfizem v neki okolici U_x točke x, kar sledi iz neizrojenosti Jacobijeve matrike. Torej je x edina točka v preseku $U_x \cap f^{-1}(a)$, iz česar sledi diskretnost množice $f^{-1}(a)$. Množica je zaprta, saj je praslika zaprte množice $\{a\}$. ∎

Definicija 5. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ regularna vrednost $f|_D$ kot v prejšnji trditvi. *Stopnjo* f definiramo kot

$$d(f, D, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sign}_x(f),$$

kjer je

$$\operatorname{sign}_x(f) = \operatorname{sign}\det\left(J_f(x)\right) = \pm 1$$

predznak f v x, $J_f(x)$ pa Jacobijeva matrika preslikave f v x.

Predznak diferenciala preslikave f nosi informacijo o orientaciji. Če je $\operatorname{sign}_x(f) = 1$, diferencial v točki $x \in D$ orientacijo ohranja, če velja $\operatorname{sign}_x(f) = -1$, pa jo obrne.

Sedaj si oglejmo pomembno lastnost zgoraj definirane stopnje gladke preslikave:

Trditev 6 (lokalna konstantnost stopnje [1, str. 139]). *Za vsako regularno vrednost a obstaja odprta okolica W v množici regularnih vrednosti $R_{f|_D} \backslash f(X)$, da velja: $d(f, D, a) = d(f, D, x)$ za vsak $x \in W$.*

Dokaz. Množice $\left\{U_x; x \in f^{-1}(a)\right\}$ iz dokaza trditve 4 ustrezno zmanjšamo, da je na njih predznak $\det\left(J_f(x)\right)$ konstanten. To lahko storimo zaradi zveznosti determinante Jacobijeve matrike. Za W vzamemo

$$W := \bigcap_{x \in f^{-1}(a)} f(U_x) \backslash \left(f\left(\overline{D} \backslash \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} U_x \right)\right). \qquad \blacksquare$$

Preden si ogledamo še eno pomembno lastnost stopnje gladke preslikave, se spomnimo, kaj je homotopija preslikav. Naj bosta X, Y topološka prostora ter $f_1, f_2 : X \to Y$ zvezni preslikavi. *Homotopija* od f_1 do f_2 je zvezna preslikava $H : X \times [0, 1] \to Y$, za katero velja $H(x, 0) = f_1(x)$ in $H(x, 1) = f_2(x)$ za vsak $x \in X$. Predstavlja torej pot med f_1 in f_2 v prostoru zveznih preslikav. Pogosto namesto $H(x, t)$ pišemo kar $H_t(x)$. Pravimo, da sta f_1 in f_2 homotopni preslikavi.

Trditev 7 (homotopska invariantnost stopnje [1, str. 140–144]). *Za gladko preslikavo $H : [0, 1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ in točko $a \in \mathbb{R}^n \backslash H([0, 1] \times X)$ velja: $d(H_0, D, a) = d(H_1, D, a)$.*

Pomembna posledica zgornje trditve je, da za gladke preslikave $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ in povezane množice $U \subset \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ velja, da je stopnja $d(f, D, a)$ enaka za vse regularne vrednosti $a \in U$. Omogoča nam, da stopnjo gladke preslikave definiramo tudi v neregularnih vrednostih.

Definicija 8. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ in U povezana komponenta $\mathbb{R}^n \backslash f(X)$, ki vsebuje a. Potem je $d(f, D, b)$ konstantna za vse $b \in U$, ki so regularne vrednosti preslikave $f|_D$. Stopnjo nad a tako definiramo kot $d(f, D, a) = d(f, D, b)$ za poljuben tak b.

Regularna vrednost $b \in U$ iz zgornje definicije vedno obstaja po Sard-Brownovem izreku.

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem stopnjo zvezne preslikave, ki jo dobimo s pomočjo gladke takole:

Trditev 9. *Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Potem obstaja gladka preslikava $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero je $||f - g|| < \operatorname{dist}(a, f(X))$. Stopnja $d(g, D, a)$ je za vse take g enaka.*

Dokaz. Po Weierstrassovem aproksimacijskem izreku najdemo polinomsko preslikavo P, ki je seveda gladka, tako da velja $||P-f|| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(a, f(X))$. Po Sard-Brownovem izreku pa najdemo regularno vrednost za $P|_D$, imenujmo jo b, da velja: $||a - b|| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(a, f(X))$. Preslikava g, ki ustreza definiciji, je $g = P + a - b$. Da imata gladki preslikavi g in $\overline{g}$, ki sta obe blizu f, enako stopnjo nad točko a, preverimo s homotopijo $H : [0, 1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n : (x, t) \mapsto (1 - t)g(x) + t\overline{g}(x)$, kjer velja $a \notin H([0, 1] \times X)$. ∎

Definicija 10. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Potem po prejšnji trditvi obstaja gladka preslikava $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero je $||f - g|| < \operatorname{dist}(a, f(X))$. Za takšne g je stopnja $d(g, D, a)$ že definirana, pri čemer je $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$, in je za vse take g enaka. Stopnjo f definiramo kot

$$d(f, D, a) = d(g, D, a).$$

Za stopnjo zveznih preslikav seveda veljajo lastnosti, navedene v trditvah 6 in 7. Še več, veljajo spodnji sklepi:

Trditev 11 (Nagumo, Führer, Deimling [1, str. 149, 150]).

1. *Če je f enaka inkluziji $Id_{\overline{D}} : \overline{D} \to \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$, potem je stopnja preslikave f nad točko a enaka 1, če je $a \in D$, in 0, če velja $a \notin \overline{D}$.*

2. *(obstoj rešitve) Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \notin f(X)$. Če je $d(f, D, a) \neq 0$, obstaja točka $x \in D$, za katero je $f(x) = a$.*

3. *(aditivnost stopnje) Naj bosta $D_1, D_2 \subset D$ disjunktni odprti množici, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in a točka, za katero velja $a \notin f(\overline{D} \backslash (D_1 \cup D_2))$. Potem je $d(f, D, a) = d(f, D_1, a) + d(f, D_2, a)$.*

Preden definiramo ovojno število, ki ga bomo uporabili v posplošitvi Borsuk-Ulamovega izreka, potrebujemo še naslednji izrek, ki sledi iz homotopske invariantnosti stopnje:

Izrek 12 ([1, str. 150]). *Naj bosta $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezni preslikavi, ki se ujemata na meji $\overline{D}$, torej je $f|_X = g|_X$, in a točka, za katero velja $a \notin f(X) = g(X)$. Potem je $d(f, D, a) = d(g, D, a)$.*

Definicija 13. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava, $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ njena zvezna razširitev in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Ovojno število f okoli a definiramo kot

$$w(f, a) = d(\overline{f}, D, a).$$

Ovojno število je dobro definirano, saj po Tietzejevem razširitvenem izreku razširitev $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ vedno obstaja, njena stopnja pa je po zgornjem izreku 12 enaka za poljubno $\overline{f}$. Za tako definirano ovojno število veljajo vse lastnosti stopnje zvezne preslikave (lokalna konstantnost, homotopska invariantnost).

Lema 14 ([1, str. 161, 162]). *Naj bosta $D, X \subset \mathbb{R}^n$, kot smo predpostavili na začetku razdelka, naj $0 \notin \overline{D}$ in naj bo D simetrična množica glede na 0, tj., za $x \in D$ je tudi $-x \in D$. Privzemimo še, da je $f : X \to \mathbb{R}^n$ soda (liha) zvezna preslikava in $0 \notin f(X)$. Potem ima f sodo (liho) zvezno razširitev $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero velja $0 \notin \overline{f}(\overline{D} \cap \{x_n = 0\})$.*

Preslikavo v lemi konstruiramo postopoma, s pomočjo trditve, ki se od leme razlikuje le v tem, da f slika v prostor višje dimenzije, kot je dimenzija D, ter da točka 0 ni vsebovana v sliki razširitve f. To trditev dokažemo s pomočjo indukcije, kjer v indukcijskem koraku uporabimo sklep, da lahko zvezno preslikavo, ki ne vsebuje točke 0 v sliki kompaktne domene K, zvezno razširimo na kompaktno množico M ($K \subset M$), tako da tudi slika M ne vsebuje točke 0. Lema nato sledi iz trditve in Tietzejevega razširitvenega izreka.

Sedaj imamo na voljo vsa orodja, da dokažemo posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi:

Izrek 15. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ simetrična omejena odprta množica, $0 \in D$, $X = \overline{D} \backslash D$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava, $0 \notin f(X)$.*

1. *Če velja*
$$\frac{f(x)}{||f(x)||} \neq \frac{f(-x)}{||f(-x)||}$$
za vse $x \in X$, je ovojno število $w(f, 0)$ liho, torej neničelno.

2. *Če velja*
$$\frac{f(x)}{||f(x)||} \neq -\frac{f(-x)}{||f(-x)||}$$
za vse $x \in X$, je ovojno število $w(f, 0)$ sodo in enako nič, če je n liho.

Opazimo, da prvi pogoj v zgornjem izreku izpolnjujejo lihe preslikave, drugega pa sode.

Dokaz. V dokazu bomo izračunali ovojno število $w(f,0)$, ki je po definiciji enako stopnji razširitve preslikave f nad 0. Razširitev bomo označili kar z oznako f. Na začetku bomo razširitev »popravili«, da bo liha preslikava v prvem oziroma soda v drugem delu dokaza. S pomočjo homotopije bomo videli, da imata »popravljena« liha/soda preslikava in naša razširitev f enako stopnjo nad 0. Iz tega sledi sklep, da je izrek dovolj pokazati na lihih/sodih preslikavah.

Predpostavimo, da velja pogoj 1. Po Tietzejevem razširitvenem izreku lahko preslikavo f razširimo na $\overline{D}$, torej do $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, ki pa ne zadošča nujno 1. pogoju, zato jo ustrezno »popravimo« v preslikavo g.

Preslikavo g definiramo kot $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) - f(-x)$, ki je očitno liha. S homotopijo $H_t(x) = f(x) - tf(-x)$, $H_0 = f$, $H_1 = g$ želimo pokazati, da se stopnja ni spremenila, torej da je stopnja f enaka stopnji g. Da bo to res, moramo po trditvi 7 preveriti še, da velja $0 \notin H([0,1] \times X)$, kar bomo pokazali s protislovjem. Recimo, da je $0 = f(x) - tf(-x)$ za neki $x \in X$ in neki $0 \leq t \leq 1$. Ker po predpostavki izreka velja $0 \notin f(X)$, mora biti $t > 0$. Iz zveze $f(x) = tf(-x)$ z normiranjem dobimo $\frac{f(x)}{||f(x)||} = \frac{f(-x)}{||f(-x)||}$, kar je v nasprotju s pogojem 1.

Preslikavi f in g imata torej enaki stopnji. Dovolj je pokazati, da izrek velja za lihe preslikave, zato bomo od zdaj naprej privzeli, da je f liha. S pomočjo f bomo nato definirali nove preslikave, ki bodo imele nad točko 0 enako stopnjo kot f. Tako bomo lažje izračunali želeno stopnjo in s tem ovojno število.

Naj bo $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, da je $K = \{x; ||x|| \leq \varepsilon\} \subset D$. Preslikavo f_1 definiramo takole:

$$f_1 : K \cup X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} f(x); & x \in X, \\ x; & x \in K. \end{cases}$$

Zaradi lažjega pisanja označimo $D_1 = D \backslash K$, $X_1 = \overline{D}_1 \backslash D_1 = X \cup \{||x|| = \varepsilon\}$ in $f_2 = f_1|_{X_1}$.

Po lemi 14 obstaja taka liha razširitev $\overline{f}_2 : \overline{D}_1 \to \mathbb{R}^n$ preslikave f_2 na $\overline{D}_1$, da velja $0 \notin \overline{f}_2(\overline{D}_1 \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Sedaj definiramo našo končno preslikavo f_3, za katero bomo izračunali ovojno število okoli 0.

$$f_3 : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} \overline{f}_2(x); & x \in \overline{D}_1, \\ x; & x \in K. \end{cases}$$

Ker se f_3 in f ujemata na X, iz izreka 12 sledi $d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0)$.

Stopnjo $d(f_3, D, 0)$ bomo izračunali z uporabo aditivnosti stopnje (lastnost 3 trditve 11) na D_1 in odprti krogli $K_0 = \{x; ||x|| < \varepsilon\}$. Za prvi del, torej za izračun $d(\overline{f}_2, D_1, 0)$, bomo prav tako uporabili aditivnost stopnje, za kar potrebujemo dve disjunktni množici, ki ustrezata predpostavkam. Definiramo ju kot: $D_{1+} = D_1 \cap \{x_n > 0\}$, $D_{1-} = D_1 \cap \{x_n < 0\}$.

Ker $0 \notin \overline{f}_2(\overline{D}_1 \backslash (D_{1+} \cup D_{1-}))$, sledi, da je $d(\overline{f}_2, D_1, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) + d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$. Radi bi videli, da je $d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$.

To vidimo, če upoštevamo simetrijo domene in lihost preslikave $\overline{f}_2$. Definiramo preslikavo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto -x$ in $\overline{f}_2(x)$ zapišemo kot $\overline{f}_2(x) = \varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x)$. Enakost $d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = d(\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x), D_{1+}, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$ sledi iz verižnega pravila ter predznaka Jacobijeve determinante. Velja torej $d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 2d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = 2N$, $N \in \mathbb{Z}$.

Za drugi del gledamo $d(Id, K_0, 0)$. Iz 1. lastnosti trditve 11 sledi, da je $d(Id, K_0, 0) = 1$.

Za končni izračun $d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0)$ bomo uporabili aditivnost stopnje na prvem in drugem delu. To lahko storimo, ker sta $K_0 \cup (D \backslash K) \subset D$, K_0, $D \backslash K$ disjunktni in $0 \notin f_3(\overline{D} \backslash (K_0 \cup (D \backslash K)))$. Torej:

$$d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0) = d(Id, K_0, 0) + d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 1 + 2N.$$

Res dobimo liho število, 1. del izreka je tako dokazan.

Predpostavimo sedaj, da velja pogoj 2. Uporabljali bomo podobne sklepe kot pri dokazu 1. dela z nekaj popravki. Na začetku, ko razširimo preslikavo f na $\overline{D}$ in potrebujemo sodo razširitev, preslikavo g tokrat definiramo kot $g(x) = f(x) + f(-x)$. Veljajo analogni sklepi. Preslikavo f_1 definiramo:

$$f_1 : K \cup X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} f(x); & x \in X, \\ |x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|); & x \in K. \end{cases}$$

Ustrezno prilagodimo tudi preslikavo f_3:

$$f_3 : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} \overline{f}_2(x); & x \in \overline{D}_1, \\ |x|; & x \in K. \end{cases}$$

Sledi

$$\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x) = \varphi^{-1}\overline{f}_2(-x) = \varphi^{-1}(\overline{f}_2(x)) = -\overline{f}_2(x).$$

In iz tega

$$d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0) = d(\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}, d_{1+}, 0) = d(-\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = (-1)^n d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0).$$

Velja torej:

$$d(\overline{f}_2, D_1, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) + (-1)^n d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = (1 + (-1)^n)N,$$

za neki $N \in \mathbb{Z}$. Preden izračunamo $d(f, D, 0)$, si oglejmo še $d(|Id|, K_0, 0)$, ki jo bomo potrebovali v končnem izračunu. Ta je po 2. lastnosti trditve 11 enaka $d(|Id|, K_0, 0) = d(|Id|, K_0, a) = 0$, kjer je $a = (-1, 0, \ldots, 0) \notin |Id|(X)$.

Stopnja, ki nas zanima, je tako enaka:

$$d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0) = d(|Id|, K_0, 0) + d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 0 + (1 + (-1)^n)N,$$

$N \in \mathbb{Z}$. ∎

Dokažimo sedaj še Borsuk-Ulamov izrek s pomočjo zgornje posplošitve:

Dokaz izreka 1. Pokazati želimo, da za zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, za katero je $f(x) = f(-x)$. Po Tietzejevem razširitvenem izreku obstaja zvezna razširitev $\overline{f} : B^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ preslikave f, da je $\overline{f}|_{S^n} = f$.

Definiramo preslikavo $g : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (f(x), 1)$, ki zadošča predpostavkam posplošitve Borsuk-Ulamovega izreka 15 ($D = \mathrm{int}(B^{n+1})$, $X = S^n$, $0 \notin g(S^n) \subset \mathbb{R}^n \times \{1\}$). Ovojno število $w(g, 0)$ je enako stopnji poljubne zvezne razširitve preslikave g na B^{n+1} nad točko 0. Oglejmo si stopnjo nad točko 0 naslednje razširitve $\overline{g} : B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (\overline{f}(x), 1)$. Ta je enaka 0, saj $0 \notin \overline{g}(B^{n+1}) \subset \mathbb{R}^n \times \{1\}$. Sledi, da obstaja točka $x \in S^n$, za katero velja $\frac{g(x)}{||g(x)||} = \frac{g(-x)}{||g(-x)||}$, kar je res natanko tedaj, ko je $\frac{(f(x),1)}{\sqrt{1+||f(x)||^2}} = \frac{(f(-x),1)}{\sqrt{1+||f(-x)||^2}}$, torej ko $(f(x), 1)$ in $(f(-x), 1)$ ležita na istem poltraku skozi izhodišče. Ta poltrak seka hiperravnino $\mathbb{R}^n \times \{1\}$, na kateri v celoti leži $g(S^n)$, v natanko eni točki, zato je $(f(x), 1) = (f(-x), 1)$, iz česar sledi $f(x) = f(-x)$. ∎

LITERATURA

[1] E. Outerelo, J. M. Ruiz, *Mapping Degree Theory, Graduate Studies in Mathematics* **108**, American Mathematical Society, Providence, 2009.

[2] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, 2nd corrected printing, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[3] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190.

[4] N. Mramor-Kosta, *On Borsuk's antipodal system*, Obzor. Mat. Fiz. **34** (1987), 65–72.

[5] T. Hill, *Mathematical Devices for Getting a Fair Share*, American Sci. **88** (2000), 325–332, ogled 1. 1. 2016, dostopno na `people.math.gatech.edu/~hill/publications/PAPER\$\%\$20PDFS/MathematicalDevicesforGettingaFairShare2000.pdf`.

[6] T. Prescott, *Extensions of the Borsuk-Ulam Theorem*, diplomsko delo, Harvey Mudd College, 2002, ogled 29. 02. 2016, dostopno na `www.und.edu/instruct/tprescott/papers/thesis/thesis.pdf`.

GRAVITACIJSKI VALOVI

ALEŠ MOHORIČ[1,2] IN ANDREJ ČADEŽ[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
[2]Institut Jožef Stefan, Ljubljana

PACS: 04.30.-w

Gravitacijski valovi so potujoče motnje v ukrivljenosti prostor-časa, ki jih ustvarjajo gibajoči objekti. Valovanje napove splošna teorija relativnosti. Prvič so ga izmerili leta 2015 z merilnim sistemom LIGO. Valovanje je nastalo ob združitvi dveh masivnih črnih lukenj, oddaljenih dobro milijardo svetlobnih let.

GRAVITATIONAL WAVES

Gravitational waves are ripples in the curvature of space-time, caused by accelerated objects. Waves are described by general theory of relativity. The phenomenon was successfully directly detected for the first time in 2015 with the measuring system LIGO. The detected waves were the result of two black holes merger more than a billion light-years ago.

Pred kratkim je v strokovni javnosti pa tudi širše odjeknila novica, da so prvič neposredno zaznali gravitacijske valove [1, 2]. Kaj ti valovi so, katera sila jih povzroča? Analogijo hitro najdemo v elektromagnetnem valovanju in električni sili. Elektromagnetno valovanje dobro poznamo iz vsakdanjega življenja. Npr. svetlobo zaznamo z očmi, mikrovalovi prenašajo informacijo med mobilnimi telefoni in dovajajo toploto hrani v mikrovalovni pečici, rentgenska svetloba prodira skozi telo in njene sence govorijo o stanju naših kosti. Pojavov, povezanih z gravitacijskim valovanjem, pa ne znamo kar tako stresti iz rokava. Ti pojavi so tako šibki, da še Albert Einstein, ki je pojav napovedal, ni verjel, da jih bomo sploh kdaj merili. Pa poglejmo, kako šibki so v resnici.

Električna in gravitacijska sila sta si na prvi pogled zelo podobni. Električno silo med dvema točkastima delcema z nabojema e_1 in e_2 opiše Coulombov zakon: $\mathbf{F}_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$. $\mathbf{e}_r$ je enotski vektor, vzporeden zveznici delcev. Sila pada s kvadratom medsebojne razdalje r in je vzporedna zveznici nabojev; privlačna za naboja nasprotnih predznakov in odbojna za naboja z enakim predznakom. Električna sila veže elektrone v atom in atome med seboj, odgovorna je za kemijske vezi. Svojo vlogo ima tudi v električnih virih in praktično poganja življenje. Gravitacijsko silo med točkastima delcema z masama m_1 in m_2 opiše Newtonov gravitacijski zakon: $\mathbf{F}_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{e}_r$.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} je gravitacijska konstanta. Gravitacijsko silo Zemlje na telesa v njeni okolici imenujemo teža. Gravitacijska sila deluje tudi med drugimi telesi na Zemljinem površju, a je tako majhna, da je običajno ne opazimo. Že na prvi pogled opazimo podobnost med izrazoma za silo. V obeh je sila obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med telesoma. Pomembna razlika je: gravitacijska sila je vedno privlačna, telesa nimajo negativne mase.

Poleg električne in gravitacijske sile poznamo samo še močno in šibko silo, ki urejata interakcije med osnovnimi delci in sta tako odgovorni za zgradbo atomskih jeder in njihovo stabilnost. Med vsemi je gravitacijska sila najšibkejša, zato njen vpliv na mikroskopske delce običajno zanemarimo. Vendar pa se ta sila zato, ker ima samo naboje ene vrste, ki se medsebojno privlačijo, razširja po celotnem vesolju in tako obvladuje njegovo strukturo.

Lastnost telesa, da s silo vpliva na telesa v svoji okolici, opišemo s poljem, ki ga to telo ustvarja v svoji okolici: električno nabita telesa ustvarjajo električno polje, vsaka masa pa gravitacijsko polje. Polje predstavljajo vektorji v vsaki točki prostora, ki dajo silo na testni delec v dani točki, če jakost polja pomnožimo z nabojem ali maso delca. Takim poljem sil lahko priredimo ustrezna potencialna polja – ki predstavljajo potencialno energijo testnega delca na danem mestu v polju.

Coulombov in gravitacijski zakon ne pojasnita, kako se sila razširja od izvora do testnega delca. Nekoč so si predstavljali, da se ustrezna polja raztezajo od trenutne lega telesa, ki oddaja polje, na enak način za vsak trenutni čas. Posebna teorija relativnosti pa je pokazala, da istočasnost ne more biti absoluten pojem: to, kar je istočasno v enem sistemu opazovalcev, zagotovo ni istočasno za sistem opazovalcev, ki se glede na prve gibljejo. Ta ugotovitev je vodila do ideje, da se morajo polja sil razširjati po prostoru kot valovanje. Analiza električne sile je pokazala, da tak razmislek vodi v pravo smer. Električna sila je namreč neločljivo povezana z magnetno silo. Na gibajoči naboj deluje tudi magnetna sila, če ustvarjajo magnetno polje tokovi ali množica drugih gibajočih se nabojev. Zato moramo električno in magnetno polje obravnavati skupaj kot elektromagnetno polje. Enačbe, ki opisujejo povezavo med poljem in naboji, so znane Maxwellove enačbe, ki se v praznem prostoru zapišejo takole: zakon o električnem pretoku pravi, da je električni pretok skozi sklenjeno ploskev enak objetemu naboju. V diferencialni obliki ga zapišemo $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e$, kjer je ρ_e gostota električnega naboja. Zakon o magnetnem pretoku pravi, da so magnetne silnice vedno sklenjene in zato je magnetni pretok skozi sklenjeno ploskev enak nič ali $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Po indukcijskem zakonu je inducirana napetost v sklenjeni zanki enaka spremembi magnetnega pretoka skozi to zanko: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Zakon o magnetni napetosti pa povezuje magnetno napetost po sklenjeni zanki s tokom, ki ga zanka objame, ali v diferencialni obliki: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$, kjer je $\mathbf{j}_e$ gostota električnega toka.

Maxwellove enačbe imajo zanimivo obliko. Štiri enačbe $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ in $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_e + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ povezujejo izvore elektromagnetnega polja s poljem, enačbe $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ in $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ pa omejujejo polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ ne glede na prisotnost nabojev ali tokov. Zaradi take oblike enačb je mogoče električno in magnetno polje izraziti s skalarnim potencialom φ in vektorskim potencialom $\mathbf{A}$, ki sta definirana z enačbama $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ in $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. S tako izbiro potencialov so omejitvene Maxwellove enačbe avtomatično izpolnjene, enačbe, ki povezujejo polji z izviri, pa preidejo v: $\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ in $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) = -\mu_0 \mathbf{j}_e$.

Če se ozremo korak nazaj, opazimo še eno zanimivost. Potenciala $\mathbf{A}$ in φ, ki pripadata danemu paru $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$, nista enolično določena, saj sprememba $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Psi$ in $\varphi \to \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ s poljubno skalarno funkcijo Ψ prav nič ne spremeni fizikalno merljivih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$. To lastnost elektromagnetne teorije imenujemo umeritvena invariantnost. Umeritvena invariantnost nudi teoretiku ugodnost, da lahko s primerno izbiro funkcije Ψ najde kako posebej lepo obliko potencialov $\mathbf{A}$ in φ. Takemu postopku rečemo umerjanje potencialov in ga navadno definiramo s kako enačbo, ki jo imenujemo umeritveni pogoj. Priljubljeni umeritveni pogoj $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ pripelje preostale Maxwellove enačbe v obliko valovnih enačb: $\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ in $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}_e$. Znano je, da lahko rešitve za $\mathbf{A}$ in φ zapišemo z uporabo Greenove funkcije v obliki[1]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_e\left(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c\right)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' \ , \\
\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_e\left(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c\right)}{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' \ ,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

[1] Spomnimo, da velja v elektromagnetni teoriji zakon o ohranitvi naboja, ki se v diferencialni obliki zapiše: $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0$. Zato je umeritveni pogoj avtomatično izpolnjen, če vsaka od komponent $\mathbf{A}$ in φ neodvisno reši valovno enačbo.

kar jasno kaže, da se elektromagnetna interakcija med delci prenaša kot valovanje, ki se razširja s svetlobno hitrostjo. Maxwellove enačbe torej avtomatično vključujejo razširjanje elektromagnetne sile z valovanjem elektromagnetnega polja s hitrostjo c.

Podobno lahko razmišljamo tudi o gravitacijskem polju. Newtonov zakon opiše silo med mirujočimi masami, za natančno obravnavo sil med gibajočimi masami pa je treba Newtonovo gravitacijsko silo, podobno kot Coulombovo, razširiti z novo teorijo gravitacijskega polja. Einsteina [3] so pri tem razvoju vodila načela posebne teorije relativnosti in načelo ekvivalence, ki pravi, da padajo v gravitacijskem polju vse mase z enakim pospeškom. Odtod je prišel do spoznanja, da je pospešek povezan s spremembo prirastka razdalje v zaporednih časovnih intervalih, zato je mogoče gibanje v gravitacijskem polju opisati tudi kot »nepospešeno« gibanje v »ukrivljenem« prostoru, kjer se razdalja med točkami v prostoru spreminja drugače kot v 4-razsežnem prostoru posebne relativnosti, kjer jo zapišemo v obliki $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. V ukrivljenem prostoru zapišemo razdaljo med točkami v obliki $ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, pri čemer so $g_{\mu\nu}$ komponente simetričnega metričnega tenzorja, ki so v splošnem funkcije koordinat x^μ.

Metrika je sorazmerna s tenzorjem posplošene napetosti $T_{\mu\nu}$, v katerem nastopajo členi, ki ustrezajo gostoti energije, gibalne količine, strižne napetosti in tlaka:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu}$ je simetričen z divergenco nič in ga lahko sestavimo iz dela, ki opiše prostornino v ukrivljenem prostoru, in dela, ki opiše ukrivljenost prostora: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$.

Preprost uvid v delovanje teorije gravitacije dobimo, če jo obravnavamo za šibka polja. Vpeljemo »kartezične« koordinate: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ in $x^3 = z$, metrični tenzor pa razstavimo na diagonalni tenzor Minkovskega $\eta_{\mu\nu}$ z diagonalnimi komponentami $-1, 1, 1, 1$ in na tenzor gravitacijskih potencialov $h_{\mu\nu}$, ki so v splošnem funkcije vseh štirih koordinat in so po absolutni vrednosti veliko manjše od 1. Einsteinova teorija gravitacije se v tem približku opiše z enačbami, ki so zelo podobne Maxwellovim enačbam, ker vsebujejo člene, ki se zapišejo kot valovna enačba. Poleg tega so enačbe gibanja snovi v gravitacijskem polju invariantne glede na transformacije koordinat $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, ki transformirajo gravitacijske potenciale kot

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} \tag{2}$$

in predstavljajo umeritvene transformacije gravitacijske teorije. Najbolj kompaktno obliko gravitacijskih enačb v šibkem polju (samo v bližini črnih lukenj in nevtronskih zvezd polje ni šibko) dobimo, če vpeljemo reducirane gravitacijske potenciale $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, pri čemer je $h = \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Enačbe polja se tako zapišejo v obliki:

$$\nabla^2 \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} + \eta_{\mu\nu}\left(\nabla^2 \overline{h} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{h}}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} = -\frac{16\pi}{c^4} G T_{\mu\nu} \ ,$$

pri čemer je $\overline{h} = -h$ in

$$V_\mu = \sum_{\nu\lambda} \frac{\partial \overline{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\eta^{\nu\lambda} \ . \tag{3}$$

Enačbe polja se ravno tako kot pri elektromagnetni teoriji še poenostavijo, če s polji ξ^μ izberemo posebej simetrične umeritvene pogoje. Posebej lepo umeritev dobimo s pogoji $V_\mu = 0$, ki naredijo enačbe gravitacijskega polja nadvse podobne enačbam elektromagnetnega polja:

$$\nabla^2 \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} = -\frac{16\pi}{c^4} G T_{\mu\nu} \ . \tag{4}$$

Odtod je jasno razvidno, da se mora gravitacijska sila, prav tako kot elektromagnetna, razširjati skozi prostor kot valovanje s svetlobno hitrostjo. Še več, razvoj kvantne teorije polja, ki opisuje preostali dve od štirih osnovnih sil narave, je pokazal, da morajo biti vsa polja opisljiva z umeritvenimi teorijami. Zato je detekcija gravitacijskih valov tako pomemben kamen v mozaiku, ki prestavlja enotno delovanje vseh naravnih sil.

Na kratko se pomudimo še pri posplošitvi Newtonovih zakonov, s katerimi opišemo silo, ki deluje na testno maso v gravitacijskem polju, ki je dano z gravitacijskimi potenciali $h_{\mu\nu}$. Enačbe »masa krat pospešek je sila« moramo zapisati za štiri komponente pospeška, ki je merjen glede na lastni čas testnega delca τ:

$$m\ddot{x}^\mu = m \sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial h_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda}\right)\dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu.$$

Kje tiči Newtonova gravitacijska sila v teh enačbah[2]? Povedali smo, da sta Coulombova in Newtonova gravitacijska sila pravzaprav sili, ki delujeta med mirujočimi telesi, zato zapišimo štiri gornje enačbe za primer, ko so vse krajevne komponente hitrosti enake nič ($\dot{x}^1 = 0$, $\dot{x}^2 = 0$, $\dot{x}^3 = 0$) in je gravitacijsko polje od časa neodvisno ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^0 &= 0 \\ m\ddot{x}^1 &= m\frac{\partial h_{00}}{\partial x^1}\left(\dot{x}^0\right)^2 \\ m\ddot{x}^2 &= m\frac{\partial h_{00}}{\partial x^2}\left(\dot{x}^0\right)^2 \\ m\ddot{x}^3 &= m\frac{\partial h_{00}}{\partial x^3}\left(\dot{x}^0\right)^2 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe je razvidno, da je $\dot{x}^0 = \frac{d(ct)}{d\tau}$ konstanta; za njeno vrednost vzamemo kar c, če uravnava mirujoči opazovalec svojo uro s koordinatnim časom. V preostalih treh enačbah spoznamo na levi produkt mase in komponent pospeška, na desni pa je z mc^2 pomnožen gradient potenciala h_{00}. Torej je $-h_{00}c^2$ kar Newtonov gravitacijski potencial[3]. Vseh preostalih potencialov v tenzorju $h_{\mu\nu}$ mirujoče mase na zaznajo, ravno tako kot mirujoči električni naboji ne zaznajo komponent elektromagnetih potencialov, ki so odgovorni za magnetno polje. Majhnost vsakdanjih hitrosti glede na hitrost svetlobe in majhnost gravitacijskih potencialov na Zemlji torej pojasnita, zakaj je Newtonova mehanika tako zelo uspešna za opis dinamike skoraj vsega, kar se giblje okrog nas. Vprašanje, ali je Einsteinova fizika res boljša od Newtonove, je zahtevalo eksperimentalne potrditve, ki jih je bilo mogoče doseči le z zelo natančnimi merjenji.

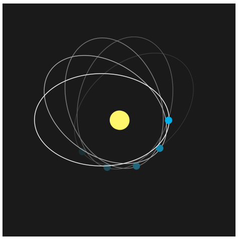
Einstein je predlagal tri teste, ki bi pokazali razliko med napovedmi njegove in Newtonove teorije. Prvo neujemanje med napovedjo Newtonove teorije in opazovanji je bila že prej znana precesija perihelija Merkurjevega tira, ki znaša skoraj desetino ločne minute na leto, vendar se v sto letih razlikuje od newtonovske napovedi za 43 ločnih sekund. To ni veliko, vendar dovolj, da so astronomi iskali planet znotraj Merkurjeve tirnice, s katerim bi

[2] Bralec se lahko hitro prepriča, da se tako zapisan pospešek ne spremeni pri umeritveni transformaciji (2).

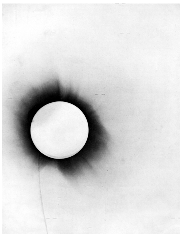
[3] Za primer lahko izračunamo vrednost h_{00} na površju Zemlje: Newtonov gravitacijski potencial je $\varphi_g = -G\frac{M_{\mathrm{Zemlje}}}{R^2_{\mathrm{Zemlje}}}R_{\mathrm{Zemlje}} = -gR_{\mathrm{Zemlje}} = -9,81\mathrm{ms}^{-2}\ 6,371\times10^6\mathrm{m} = -6,25\times 10^7\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$. Torej je $h_{00} = -\frac{\varphi_g}{c^2} = 6,9\times10^{-10}$, kar je res majhno.

pojasnili razliko. Einstein je pokazal, da se majhna izmerjena razlika lepo ujema z njegovo teorijo, vendar takrat še ni požel velike slave, saj je razlika 43 ločnih sekund na stoletje tako majhna, da bi jo bilo mogoče pripisati tudi kakšnemu drugemu vplivu. Danes vesoljske sonde, ki obiskujejo druga telesa v Osončju, še dosti bolj natančno potrjujejo skladnost gibanja z moderno teorijo gravitacije. Drugi test, ki je Einsteinovo ime ponesel med zvezde, pa je napoved, da gravitacija deluje tudi na svetlobo tako, da ukrivi njeno pot. Če prihaja svetloba k nam tako, da na svoji poti obide veliko maso, npr. Sonce, deluje Sonce kot nekakšna leča, ki popači sliko neba. Angleški astronom Frank Watson Dyson je predlagal, da bi tako popačenje opazovali na zvezdnem nebu okrog Sonca, ki je vidno med Sončevim mrkom, ko Luna zakrije bleščavo Sonca. Tako je Arthur Stanley Eddington skupaj z Dysonom organiziral dve ekspediciji za opazovanje Sončevega mrka 29. maja 1919. Eddington je analiziral fotografije, posnete v obeh ekspedicijah, in na naslovnicah pomembnih časopisov objavil, da se popačenje povsem ujema z napovedjo Einsteinove teorije. Dandanes vpliv gravitacije na smer potovanja svetlobe prepoznamo pri mnogih oddaljenih astronomskih objektih, ki se nahajajo za drugim masivnim telesom ali galaksijo. Pojav imenujemo gravitacijsko lečenje. Gravitacijske leče, ki jih najdejo veliki teleskopi v globinah vesolja, pričajo o prisotnosti temne snovi v vesolju. Tretji klasični test splošne teorije relativnosti je napoved, da se valovna dolžina svetlobe, ki je oddana blizu velike mase, daljša na poti proč od mase. Poskus, ki je potrdil napovedi teorije, sta leta 1959 izvedla Robert Pound in Glen A. Rebka. Relativna sprememba valovne dolžine svetlobe je bila pri omenjenem poskusu le nekaj bilijardink in zato sta morala uporabiti izredno občutljivo metodo merjenja spremembe frekvence svetlobe, ki vključuje Mössbauerjev pojav. Po uspehu teh treh testov se je odprlo novo področje eksperimentalne fizike, ki si je zadalo nalogo zelo natančno eksperimentalno preveriti vse aksiome Einsteinove teorije in napovedi, ki iz nje sledijo. Tehnologije, ki so se ob tem razvile, so pomembno prispevale k razvoju mnogih področij znanosti in tehnike, posebej pri astronavtiki in raziskovanju vesolja.

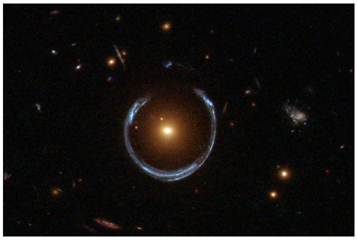
Vprašanje obstoja in pomena gravitacijskih valov je bilo dolga leta eno najbolj intrigantnih in tehnološko zahtevnih. S prvimi poskusi detekcije gravitacijskih valov je začel Joe Weber v šestdesetih letih prejšnjega stoletja. Weber je verjel, da bi lahko gravitacijski valovi, če obstajajo, resonančno vzbudili v nihanje dovolj veliko maso. Webrov instument, ki je bil v svo-



a)



b)



c)

Slika 1. Pojavi, ki potrjujejo napovedi splošne teorije relativnosti: a) precesija Merkurjeve tirnice; ponazoritev je pretirana, v resnici se os elipse zavrti le za 5740 sekund v stotih letih, vendar je od tega samo za 43 ločnih sekund odgovorna Einsteinova precesija, za večino premika pa so odgovorne motnje, ki jih v gibanju Merkurja povzročajo ostali planeti. b) Negativ Sončevega mrka, ki ga je leta 1919 naredil Sir Arthur Eddington. S primerjavo lege zvezd na tem posnetku in lege, kadar pogleda ne zakriva Sonce, lahko ugotovimo kako se ukrivi pot svetlobe, ko potuje blizu Sonca. c) Rdečkasta galaksija LRG 3-757 v sredini slike deluje kot gravitacijska leča, ki preslika bolj oddaljeno galaksijo v modrikasto podkev. V desni polovici slike je vidna še ena modrikasta galaksija, ki je po svojih fizikalnih značilnostih verjetno zelo podobna lečeni galaksiji.

jih časih neverjetno občutljiv, je res zaznaval občasna nenadna vzbujanja, vendar ni šlo za vzbujanja z gravitacijskimi valovi, ampak je šlo morda za vzbujanje, ki so ga povzročali preskoki dislokacij med kristalnimi ravninami v detektorski masi. Kljub temu, da Weber ni zaznal gravitacijskih valov, je vzbudil zanimanje za svoje delo in povzročil nastanek skupin po vsem svetu, ki so sprejele izziv, da bodo našle način za potrditev obstoja gravitacijskih valov.

Prvi posredni dokaz za obstoj gravitacijskih valov so leta 1974 nudila opazovanja frekvence, s katero kroži pulzar v sistemu dveh nevtronskih zvezd PSR B1913+16. Russell Hulse in Joseph Taylor sta pokazala, da se obhodni čas pulzarja manjša skladno z napovedmi teorije. Obhodna frekvenca se veča, ker sevanje gravitacijskih valov zmanjšuje energijo sistema zvezd. Za to delo sta leta 1993 prejela Nobelovo nagrado za fiziko. Vendar je bil ta poskus le posreden dokaz gravitacijskega valovanja. Neposredna meritev je bila še dobra štiri desetletja v prihodnosti. Pa si oglejmo, kakšni so gravitacijski valovi, ki jih lahko neposredno zaznamo.

Kako valujejo gravitacijski potenciali v ravnem gravitacijskem valu lahko hitro ugotovimo iz enačb gravitacijskega polja (4) in umeritvenih pogojev

(3). Podobno kot za raven elektromagnetni val, ki se razširja s svetlobno hitrostjo v smeri osi z, sledi iz enačbe (4) za raven gravitacijski val rešitev:

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x^3 - 2\pi\nu\frac{x^0}{c}\right), \tag{5}$$

pri čemer so $\varepsilon_{\mu\nu}$ konstantne komponente tenzorja amplitud gravitacijskega vala, med valovno dolžino in frekvenco vala pa velja znana zveza $\lambda\nu = c$. Vendar to še ni dokončna rešitev, saj moramo upoštevati še umeritvene pogoje (3), ki so zadoščeni, če so vse komponente $\varepsilon_{0\nu}$ in $\varepsilon_{3\nu}$ enake nič. Po nekaj algebre ugotovimo, da ima tenzor amplitud samo dve linearno neodvisni komponenti, navadno označeni z a_+ in $a_\times$, ki takole predstavljata $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gravitacijski val prenaša energijo, zato lahko govorimo o gostoti energijskega toka, ki se mora tako kot pri Poyntingovem vektorju elektromagnetnega polja izražati s kvadrati odvodov potencialov ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$). Po takem sklepanju uganemo, da mora imeti izraz za gostoto energijskega toka obliko $j_{gv} \propto \frac{1}{\lambda^2}\left(|a_+|^2 + |a_\times|^2\right)$, sorazmernostni faktor, ki mora imeti enoto moči, pa je treba poiskati v dobrem učbeniku, npr. [4]. Vendar se splača še prej malo pomisliti, katere osnovne konstante morajo sestavljati ta faktor. Pravzaprav nimamo velike izbire, za teorijo gravitacije sta pomembni samo dve: G in c in iz njiju lahko sestavimo konstanto $P_0 = \frac{c^5}{G} = 3.63 \times 10^{52}$ W, ki ima enoto moči. Gostota energijskega toka v gravitacijskem valu se res zapiše v obliki:

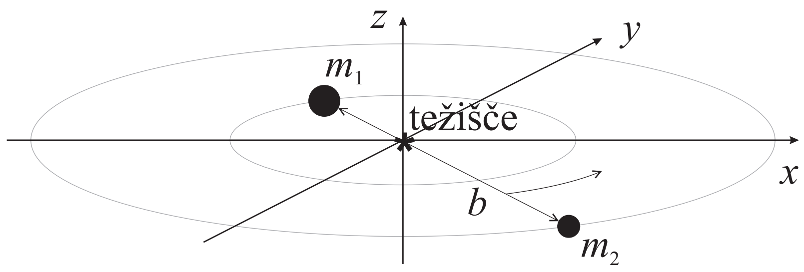
$$j_{gv} = \frac{\pi}{8}\frac{c^5}{G\lambda^2}\left(|a_+|^2 + |a_\times|^2\right).$$

Ta izraz najbolj nazorno poudarja šibkost interakcije gravitacijskega vala s snovjo in pojasni, zakaj je bilo potrebno vložiti toliko naporov za detekcijo valov. Moč P_0 je namreč grooo. . . omozanska. To je moč, ki bi jo proizvedli, če bi celotno maso Sonca pretvorili v energijo v petih mikrosekundah. Šele pri tako veliki moči bi na razdalji ene valovne dolžine od izvora valovanja zaznali spremembo $h_{\mu\nu}$ velikosti 1. Ker v vesolju tako velike in hitre spremembe energije ne morejo biti prav pogoste, saj bi v tem primeru hitro zmanjkalo barionske snovi, smo se včasih spraševali, ali je sploh smiselno pričakovati, da bo prišlo do odkritja gravitacijskih valov. Vprašati je bilo treba, kateri pojav v vesolju bi utegnil največ energije spremeniti v energijo gravitacijskih valov, kakšna je značilna frekvenca takih valov in na kakšen način lahko zaznamo očitno zelo majhne spremembe gravitacijskih potencialov.

Kot je razvidno iz enačb (4), je izvor gravitacijskega polja napetostni tenzor, zato je razumljivo, da lahko proizvaja gravitacijske valove snov, ki se ji spreminja napetostni tenzor. Ker potrebujemo veliko moč, moramo iskati izvore gravitacijskih valov med velikimi masami, zvezdami ali črnimi luknjami, ki se zelo hitro pospešujejo, ker krožijo v parih, kot npr. znameniti dvojni pulzar Hulsa in Taylorja.

Rešimo enačbe polja (4) upoštevaje umeritveni pogoj $V_\mu = 0$! Za napetostni tenzor uporabimo definicije: $T_{00} = \rho c^2$, $T_{0i} = \rho c v_i$, $T_{ij} = \rho v_i v_j$ in ugotovimo, da je umeritveni pogoj $V_\mu = \sum \eta^{\nu\lambda} \dfrac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0$ tako kot pri elektromagnetni teoriji skladen z ohranitvenim zakonom energije in gibalne količine $\sum \eta^{\nu\lambda} \dfrac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0$. Zato lahko za vsako komponento gravitacijskih potencialov neodvisno rešimo valovno enačbo z Greenovo funkcijo, kot pri enačbah (1). Naj ima dvozvezdje masi m_1 in m_2, ki ju veže gravitacijska sila in krožita okoli skupnega težišča v ravnini xy, kot kaže slika 2. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče, tako da legi teles opišemo z $\mathbf{r}_1 = b\frac{m_2}{m_1+m_2}(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ in $\mathbf{r}_2 = -b\frac{m_1}{m_1+m_2}(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$. Razdalja med telesoma je b, krožna frekvenca ω pa je določena s tretjim Keplerjevim zakonom: $d^3\omega^2 = G(m_1 + m_2)$. Integrali napetostnega tenzorja so: $\int T_{00} d\mathbf{r}' = (m_1 + m_2)c^2$, $\int T_{0i} d\mathbf{r}' = (m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i})c$ ter $\int T_{ij} d\mathbf{r}' = m_1 v_{1i} v_{1j} + m_2 v_{2i} v_{2j}$. Uvedemo še $M = m_1 + m_2$ in $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m2}$ in dobimo za komponente potencialov:

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{\mu\nu} &= 2\frac{G}{c^2 r}\begin{pmatrix} 2M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\left(\frac{\omega b}{c}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\left(\frac{\omega b}{c}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{2G\mu}{c^4 r}(\omega b)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(2\omega t_{ret}) & -\sin(2\omega t_{ret}) & 0 \\ 0 & -\sin(2\omega t_{ret}) & \cos(2\omega t_{ret}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)
\end{aligned}
$$



Slika 2. Gravitacijsko vezani telesi, ki krožita okoli skupnega težišča s frekvenco, ki ustreza $\omega^2 b^3 = G(m_1 + m_2)$. Frekvenca se poveča, če se razdalja med telesoma zmanjša.

$t_{ret} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ je retardirani čas. Gornja matrika sicer predstavlja rešitev enačb polja, vendar njenega valovnega, od časa odvisnega dela, v splošnem še ne moremo primerjati z gravitacijskim ravnim valom (5), ker v splošnem ni ortogonalen na radialno smer, v kateri se razširja valovanje. To težavo lahko rešimo z dodatno umeritvijo polja z vektorskim poljem, ki predstavlja ravni val s frekvenco ω. Tukaj se bomo zadovoljili s tem, da je val v smeri osi $\pm z$ ravno prav zapisan, za preoblikovanje rešitve v splošno smer pa napotimo bralca na dober učbenik in iz njega prepišemo izraz za izsev gravitacijskega valovanja[4], ki ga dobimo kot integral gostote toka po krogli, ki vsebuje dvozvezdje:

$$L_{gv} = \frac{2G}{5c^5} \mu b^2 \omega^3. \tag{7}$$

Ta izraz bomo uporabili v prispevku, v katerem bo opisan detekcijski sistem, s katerim so prvič neposredno izmerili gravitacijske valove. Prispevek bo objavljen v naslednji številki Obzornika.

LITERATURA

[1] D. Castelvecchi, W. Witze, *Einstein's gravitational waves found at last*, Nature News, doi:10.1038/nature.2016.19361., dostopano februar 2016.

[2] B. P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** 6, 2016. 061102. arXiv:1602.0383 7free to read. Bibcode:2016PhRvL.116f1102A. doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102.

[3] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844–847, 1915.

[4] A. Čadež, *Teorija gravitacije*, Matematika – fizika, **49**, 1. natis. Ljubljana, DMFA–založništvo, 2011.

[4]Tisti del $\overline{h}_{\mu\nu}$, ki je od časa odvisen in se nanaša na gravitacijsko valovanje ima sled nič, zato se pri gravitacijskem valu h in $\overline{h}$ ne razlikujeta.

V SPOMIN PROFESORICI SNEGULKI DETONI

Januarja letos je v Domu starejših občanov na Bokalcah v svojem 95. letu umrla prof. dr. Snegulka Detoni. Rodila se je 22. maja 1921. leta v Ljubljani. Svojo mladost je preživela v Begunjah na Notranjskem. Del mladosti je preživela v rojstni vasi, nato se je preselila v Ljubljano, kjer je doštudirala in diplomirala na Tehniški fakulteti. Prvo službo je nastopila na Bakteriološkem inštitutu Medicinske fakultete. Na povabilo prof. dr. Antona Peterlina se je leta 1946 zaposlila na Oddelku za fiziko Tehniške fakultete. Kot edina asistentka za predmet Fizika na Univerzi v Ljubljani je vodila vaje iz fizike za vse slušatelje Tehniške visoke šole (elektrotehnike, strojnike, rudarje, metalurge, gradbenike, geodete; okoli 250 slušateljev na semester) in za slušatelje Prirodoslovno matematične fakultete (fizike, matematike, kemike, geologe, meteorologe; okoli 80 slušateljev). Ker je potekala pod njenim vodstvom večina pismenih izpitov iz fizike, je zbrala izpitne naloge in jih opremila z rešitvami, tako da so izšle leta 1960 v knjigi »Naloge iz fizike« (S. Detoni, R. Korbar (risbe), T. Skubic, (107 strani)). Knjiga je doživela potem še štiri izdaje v letih 1965, 1970, 1974 in 1977, v katerih je dodala posebne naloge z izbirnimi odgovori. Pomagala pa je tudi pri eksperimentalnem delu predavanj iz fizike. Leta 1954 se je zaposlila na Katedri za strukturno kemijo, kjer je pod mentorstvom prof. dr. Dušana Hadžija leta 1956 zagovarjala doktorsko disertacijo z naslovom *Struktura sulfinskih kislin*. Sodelovala je v organizacijskem odboru mednarodnega simpozija o vodikovi vezi, ki je bil v Ljubljani v juniju leta 1957. Simpozija se je udeležil tudi prof. dr. Linus C. Pauling, dvakratni Nobelov nagrajenec, ki ji je ponudil enoletno štipendijo za delo na svojem oddelku na kalifornijski univerzi Caltech v Passadeni, vendar štipendije ni izkoristila, saj ni dobila jugoslovanske vize za odhod v Ameriko. Odpotovala pa je na Dansko, kjer je dobila 8-mesečno štipendijo danske vlade leta 1958. Delala je na univerzi v Köbenhavnu pri prof. dr. Borge Baku na področju mikrovalovne in infrardeče spektroskopije.

Kot asistentka, strokovna in znanstvena sodelavka je vodila vaje iz infrardeče in ultravijolične spektroskopije in iz teoretskih osnov organske kemije. Leta 1960 je za eno leto prevzela predavanja prof. dr. Dušana Hadžija, ki je bil na študiju v Ameriki. Od leta 1963 dalje pa je predavala osnove kemije visokomolekularnih spojin za 4. letnik študijske smeri Organska kemija. Od leta 1976 je imela na podiplomskem študiju kemijsko tehnološke smeri predavanja o infrardeči in ramanski spektroskopiji in rentgenski analizi polimerov.

Posebej se je posvetila študiju vodikove vezi. Raziskovala je vodikove vezi z vibracijsko spektroskopijo in s pripravo ustreznih spojin in kristalov. Raziskovala je tudi infrardeče in ramanske spektre organskih molekul z vezmi S-O, Se-O, P-O in C-N in organske kisline z močnimi in šibkimi vezmi O-H.

Sodelovala je tudi pri eksperimentalnem delu s feroelektriki v skupini prof. dr. Roberta Blinca na Institutu Jožef Stefan. Leta 1961 je s prof. dr. Robertom Blincem in sodelavci prejela Kidričevo nagrado za raziskave feroelektrikov z vodikovimi vezmi.

Z referati o vodikovi vezi je sodelovala na štirih mednarodnih simpozijih in kongresih. Samostojno, s prof. dr. Dušanom Hadžijem in s prof. dr. Robertom Blincem ter sodelavci je objavila 53 znanstvenih člankov.

Leta 1980 je bila upokojena, vendar je bila še naprej povezana z znanostjo. Z veseljem je sodelovala pri pripravi razstave Slovenke v fiziki in pri pisanju knjige »Fizika, moj poklic«. Udeležila se je odprtja razstave Slovenke v fiziki na Institutu Jožef Stefan, na Kemijskem inštitutu v Ljubljani in v njeni rojstni občini Cerknici. Med znanstvenicami ima pomembno mesto, saj je bila prva znanstvenica in profesorica na univerzi na področju fizike v Sloveniji.

Med sodelavci na Katedri za strukturno kemijo Fakultete za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Ljubljani in na Oddelku za strukturno kemijo Kemijskega inštituta je bila Snegulka Detoni zelo priljubljena. Veselje jo je bilo srečati in se pogovoriti z njo. Bila je prijetna sogovornica in če se je izkazalo, da je lahko ponudila pomoč, je bila to vedno pripravljena storiti. Tudi v svoji rojstni vasi, v Begunjah, je vzdrževala prijateljske stike s sovaščani. Kot ozaveščena naravovarstvenica se je zavzemala za okolju prijazne rešitve pri ohranjanju habitatov na področju presihajočega Cerkniškega jezera.

Snegulka je bila v pravem pomenu besede dama: nikoli nestrpna, vedno prijazna, nikoli ni pokazala, če jo je kdo – nehote ali hote – prizadel. Bolečino je ohranila zase, za druge je našla prijazne besede in topel nasmeh. Ni se pritoževala, vedno je pomagala, tudi v času, ko so ji pojemale življenjske moči.

Ohranili jo bomo v lepem spominu.

Marija Ipavec, Norma Mankoč Borštnik, Branko Borštnik, Helena Janžekovič, Maksimilijan Turšič, Veronika Iglič Kralj in Maja Remškar v imenu Neformalne zveze slovenskih fizičark

7. EVROPSKI KONGRES MATEMATIKE V NEMČIJI

V Berlinu je od 18. do 22. julija 2016 potekal 7ECM (7th European Congress of Mathematics), osrednje evropsko matematično znanstveno srečanje, ki ga pripravijo vsaka štiri leta. Prvi kongres je bil leta 1992 v Parizu, sledili so mu Budimpešta, Barcelona, Stockholm, Amsterdam in Krakow. Na letošnji kongres je prišlo okoli 1200 udeležencev. Organizacijski odbor je vodil Volker Mehrmann s Tehniške univerze v Berlinu v sodelovanju z vrsto partnerskih nemških ustanov, za vsebino kongresa pa je odgovorno Evropsko matematično društvo (European Mathematical Society), ki kot plenarne predavatelje na kongres povabi vodilne evropske matematike in podeli nagrade združenja.

Na uvodni slovesnosti kongresa so predstavniki EMS podelili 12 nagrad. Nagrade za vrhunsko znanstveno delo raziskovalcem, mlajšim od 35 let, so segle na različna področja matematike, prejeli pa so jih Mark Braverman (teorija izračunljivosti), Vincent Calvez (matematična biologija), Hugo Duminil-Copin (matematična fizika), James Maynard (teorija števil), Guido De Philippis (geometrijska teorija mere), Peter Scholze (algebraična geometrija), Péter Varjú (aritmetična kombinatorika), Geordie Williamson (teorija upodobitev), Thomas Willwacher (algebraična topologija) in Sara Zahedi (dinamični sistemi). Poleg omenjenih nagrad sta bili podeljeni še nagrada Otta Neugebauerja za zgodovino matematike, ki jo je prejel Jeremy Gray za vrsto knjižnih del (zadnja med njimi je Hidden Harmony – Geometric Fantasies. The Rise of Complex Function Theory, 2013), in nagrada Felixa Kleina za delo na področju matematike v industriji, ki jo je prejel Patrice Hauret za delo na področju razvoja pnevmatik v podjetju Michelin. Življenjepisi nagrajencev nedvomno kažejo, da so dobili nagrade upravičeno, nepristranski opazovalec pa bo vseeno opazil izrazito prevlado moškega spola in zahodnoevropskih držav, ki jim uspe zaradi boljših možnosti na svoje ustanove pritegniti tudi (pre)številne talente iz vzhodnih držav.

Na kongresu so kot plenarni predavatelji svoje aktualno raziskovalno delo predstavili Karen Vogtmann, Peter Scholze, Gil Kalai, Barbara Wohlmuth, Daniel Peralta-Salas, Karine Chemla, Antti Kupiainen, Leonid Polterovich in Alexander Gaifullin. Širšemu matematičnemu občinstvu so bila namenjena tudi posebna plenarna predavanja, ki so jih pripravili Abelov nagrajenec 2012 Endre Szemerédi (Abelovo predavanje Aritmetična zaporedja in leme teorije grafov), Don Zagier (Hirzebruchovo predavanje Aritmetika in topologija diferencialnih enačb), Helmut Pottmann (predavanje za širšo javnost Matematika v sodobni arhitekturi), Peter Scholze (predavanje za mlade Števila in geometrija) ter E. Knobloch, J. Sprekels, G. Wanner in G. M. Ziegler (zgodovinska predavanja o Leibnizu, Weierstrassu, Lagrangeu in Eulerju).

Preostali program je potekal v 17 splošnih sekcijah in 46 minisimpozijih. Minisimpozij z naslovom Simetrija v diskretnih strukturah je organiziral Primož Potočnik, od slovenskih matematikov sta kot predavatelja na kongresu sodelovala Tomaž Pisanski in Dragan Marušič. Med spremljevalnimi aktivnostmi kongresa so se zvrstile še razprave, posvečene financiranju raziskovalnega dela, promociji matematičnih dosežkov, objavljanju znanstvenih člankov in prihodnosti matematičnega publiciranja, razstava matematičnih vizualizacij Imaginary, razstava portretov Ženske v matematiki v Evropi, zgodovinska razstava Transcending Tradition o delu judovskih matematikov v Nemčiji, predstavitve publikacij mednarodnih založb, projekcija dveh filmov režiserke E. Eremenko (Colors of Math, Discrete Charm of Geometry), ter karierni dan za mlade matematike.

Na sklepni kongresni slovesnosti je predsednik EMS Pavel Exner razglasil kraj naslednjega kongresa in skupaj s Klavdijo Kutnar in Tomažem Pisanskim evropsko matematično skupnost toplo povabil v Portorož leta 2020.

SLOVENIJA BO GOSTILA EVROPSKI KONGRES MATEMATIKE 2020

Ob robu 7. Evropskega kongresa matematike v Berlinu je 16. in 17. julija 2016 na znameniti Humboldtovi univerzi potekalo tudi zasedanje Sveta Evropskega matematičnega društva (Council of European Mathematical Society). Udeleženci zasedanja so med drugim glasovali tudi o organizaciji naslednjega, 8. kongresa leta 2020. Predstavnika Univerze na Primorskem, prof. dr. Klavdija Kutnar in prof. dr. Dragan Marušič, sta predstavila slovensko kandidaturo za izvedbo kongresa od 5. do 10. julija 2020 v Portorožu. Kandidaturo je sicer pripravil organizacijski odbor pod vodstvom prof. dr. Tomaža Pisanskega, v njem pa so sodelovali predstavniki vseh slovenskih fakultet in raziskovalnih ustanov s področja matematike. Podporo slovenskemu predlogu so že pred glasovanjem izrazile tudi številne tuje ustanove, predvsem univerze, inštituti in matematična društva iz sosednjih držav, katerih predstavniki tudi sodelujejo v razširjenem organizacijskem odboru. V neposrednem boju je slovenski predlog s 45 glasovi premagal predlog španske Univerze v Sevilli, ki je prejel 33 glasov. Kongres bo verjetno eden največjih znanstvenih dogodkov v Sloveniji doslej in ponuja odlično priložnost za promocijo matematike in slovenskih znanstvenih ustanov v evropski matematični skupnosti. Osnovni podatki o načrtovanem kongresu so dosegljivi na spletni strani `www.8ecm.si`.

O DEJAVNOSTIH EVROPSKEGA MATEMATIČNEGA DRUŠTVA

Evropsko matematično društvo (EMS – European mathematical society) je bilo ustanovljeno leta 1990, njegov predhodnik je bil Evropski matematični svet (European Mathematical Council), v okviru katerega so se od leta 1978 dalje povezovale predvsem zahodnoevropse države. Pri ustanovitvi so pomembno vlogo odigrali ugledni matematiki Sir Michael Atiyah (Fieldsov in Abelov nagrajenec), Jean Pierre Bourguignon (danes predsednik Evropskega raziskovalnega sveta) in Friedrich Hirzebruch, ki je postal tudi prvi predsednik EMS.

Sedaj je predsednik EMS Pavel Exner (mandat 2015–18), za nova podpredsednika sta bila letos v Berlinu izvoljena Volker Mehrmann in Armen Sergeev. Pod okriljem EMS poleg 10-članskega izvršilnega odbora delujejo še odbori za uporabno matematiko, države v razvoju, izobraževanje, elektronsko publiciranje, etiko, evropsko solidarnost, publikacije, spodbujanje javnega zavedanja, srečanja, ženske v matematiki ter forum ERCOM voditeljev evropskih raziskovalnih institucij. V nekaterih od teh odborov so že sodelovali tudi slovenski matematiki (Tomaž Pisanski v odboru za etiko,

Matej Brešar v odboru za države v razvoju).

Dejavnosti EMS so danes zelo raznovrstne. EMS vsaka 4 leta organizira Evropski matematični kongres, na katerem s podeljevanjem nagrad spodbuja raziskovalne usmeritve. Sodeluje in finančno podpira tudi številne znanstvene dogodke (znanstvene poletne šole, raziskovalne vikende, vabljena konferenčna predavanja in podobno) ter aktivnosti, povezane z izobraževanjem ali promocijo znanosti. Izdaja več kot 20 periodičnih znanstvenih publikacij s področja matematike in 13 zbirk monografskih publikacij; v zbirki EMS Series of Lectures in Mathematics je denimo nedavno objavil knjigo *Higher-Dimensional Generalized Manifolds: Surgery and Constructions* Dušan Repovš (soavtorja A. Cavicchioli, F. Hegenbarth).

Letošnji pregled članstva je pokazal, da ima v EMS največ individualnih članov Francija, sledijo ji Nemčija, Italija in Združeno kraljestvo, iz vsake od preostalih evropskih držav pa je aktivnih članov le peščica – Slovenija ima trenutno 8 individualnih članov, status institucionalne članice pa sta imela v zadnjem obdobju DMFA Slovenije in UP FAMNIT. Za člane nacionalnih društev je letna članarina nižja, prav letos je bil v Berlinu sprejet tudi sklep o brezplačnem 3-letnem članstvu za mlade, ki se včlanijo v času dodiplomskega ali podiplomskega študija. Individualni člani EMS prejemajo tiskano publikacijo EMS Newsletter, ki izhaja štirikrat letno na približno 70 straneh. V njej so krajši pregledni znanstveni članki, aktualni intervjuji s prejemniki znanstvenih nagrad, poročila o dogodkih, predstavitve raziskav s področja matematičnega izobraževanja in podobno.

Ob koncu omenimo še, da ima dobro urejena spletna stran EMS, `www.euro-math-soc.eu` že nekaj časa tudi odprto bazo učiteljskih, doktorskih in podoktorskih delovnih mest za matematike, v kateri oglašujejo delovna mesta mednarodne znanstveno-raziskovalne in tudi industrijske ustanove. V času pisanja tega prispevka je bilo v njej 43 mest s še aktualnim rokom za prijavo.

Boštjan Kuzman

FMF SEMINAR ZA UČITELJE MATEMATIKE

Seminar za učitelje matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko UL ima že dolgoletno tradicijo in je gotovo eden najkvalitetnejših seminarjev. Seminar poteka v dveh delih, septembra in januarja. Na sporedu seminarja srečamo raznolike vsebine. Poleg matematičnih tem, uporabe matematike in razmišljanj o matematiki na seminarju med predavatelji spoznamo tudi znane psihologe, zdravnike, pravnike, ..., ki osvetlijo svoj pogled na življenje, poučevanje, matematiko ali težave z mladostniki še z drugih zornih kotov.

Od splošnih tem smo na seminarju 2015/16 januarja poslušali predavanje o zasvojenosti z alkoholom zdravnika in psihiatra Jožeta Kocipra, dr. Bojan Hvala pa je v povezavi z današnjimi problemi v slovenskem šolstvu in družbi osvetlil šest (zanimivih socioloških) indeksov nizozemskega sociologa Geerta Hofstedeja. V septembru je Jana Dular, pravnica in ustanoviteljica humanitarnega društva ELA predstavila svoje življenje in delo v Afriki ... drug svet, drugačne vrednote, drugačne težave ... Ko se med poslušanjem zaveš, da ugodnosti in udobje evropskega življenja jemljemo že preveč za samo po sebi umevne.

Med poljudno matematičnimi predavanji smo poslušali spomine in anekdote dr. Tomaža Pisanskega in predavanje dr. Marka Razpeta o zmotah v matematiki.

Dr. Peter Šemrl je govoril o lepotah dokazovanja matematičnih resnic. Spraševal se je, koliko je nujno dokazati in do kolikšne mere lahko zaupamo prejšnjim generacijam matematikov, da so dobro opravili svoje delo in so dokazi brez napak. Spodbudil nas je k razmišljanju o tem, kaj je resnica pri drugih znanostih in kaj pri matematiki. Pri medicini se je že pokazalo, da so bile njihove resnice napačne, fizikalna resnica pa je samo najboljši možen matematičen model, ki si ga glede na današnje merilne naprave lahko zamislimo, medtem ko so matematične resnice večne, zaključi dr. Šemrl. A po drugi strani mu Bertrand Russell oporeka, da matematiki ne vemo, o čem govorimo, niti če je to, kar govorimo, res.

Dr. Damjan Kobal je primerjal naloge naše mature, naloge TIMSSa ter naloge nekaterih sprejemnih izpitov na Japonske univerze. V deželah, kjer je znanje večja vrednota, so naloge težje in pričakovanja učiteljev večja kot pa v evropskih državah in Ameriki, kjer so vrednote zaradi moči potrošništva drugačne. Kot je prebrati v novejših raziskavah, je uspešnost pri matematiki (kot seveda tudi drugod) precej bolj odvisna od delavnosti kot od talentov.

O uporabi matematike je govorila dr. Nada Lavrač, ko je predstavila delo svojega tima, ki se na IJS ukvarja s podatkovnim rudarjenjem.

V današnjem času smo ob vseh prednostih, ki jih ponuja tehnologija, pozabili vedenja iz preteklosti. Dr. Pino Koc je v svojem predavanju Mehansko reševanje diferencialnih enačb razložil, kako so zgrajeni mehanski stroji, ki znajo reševati tudi zapletene diferencialne enačbe in sicer tako, da na eni strani rišejo podatke, na drugi strani pa se izrisuje graf rešitve. Neverjetne ideje, ki te spodbudijo videti in razumeti odvod in integral še z drugega zornega kota.

O najnovejših spoznanjih fizike pa smo poslušali predavanje dr. Igorja Muževiča o fotoniki s tekočimi kristali. Električna vezja niso več vedno kos željam po čim hitrejši računalniški obdelavi podatkov in kot kaže bi lahko tekoče kristale uporabili za izdelavo svetlobnih vezij, po katerih bi namesto elektrike tekla svetloba.

Zakaj pride do navideznih anomalij, če generator naključnih števil uporabimo na ravninskih likih, se je v svojem predavanju spraševal dr. Bojan Hvala in nam s primeri v Geogebri razložil, kaj se dogaja ter kako popraviti izbiro slučajnih točk, da bodo po veliko ponovitvah približno enakomerno razporejene po ravninskem liku.

Med teoretično matematične teme pa bi lahko uvrstili predavanje dr. Gregorja Ciglerja o frizijskih vzorcih in njihovih grupah simetrij.

Na Bledu so na spomeniku Josipu Plemlju zapisane tudi njegove formule in dr. Miran Černe nas je popeljal skozi glavne korake dokaza najbolj znanih Plemljevih formul.

In včasih se zazdi, da so zapletene formule lahko tudi preproste. Dr. Marko Kandić je povezal znane limite in neenakosti ter razložil, kako priti do Stirlingove formule in Wallisove produktne formule za $\pi/2$.

Dr. Bor Plestenjak je v svojem predavanju najprej ločil sisteme linearnih enačb na tiste, pri katerih se pri majhni spremembi podatkov tudi rešitev malo spremeni, in na tiste, ki so že na majhne spremembe podatkov zelo občutljivi, nato pa pokazal, kako uporabljajo singularni razcep pri reševanju občutljivih sistemov pri numerični linearni algebri in zaključil s primerom uporabe teorije pri obdelavi slik, kot je ostrenje zamegljenih fotografij.

Če bi seštevanje in množenje definirali drugače, kot smo navajeni ($a + b = \min\{a, b\}$, $ab = a + b$), se znajdemo v tropskih polkolobarjih. Dr. David Dolžan nas je najprej naučil na novo računati in reševati polinomske enačbe, potem pa razložil še nekaj primerov uporabe. Prav neverjetno se zdi, da sta na novo izmišljeni računski operaciji lahko v pomoč v ekonomiji, kriptografiji, filogenetiki, ...

Na seminarju za učitelje matematike tako vedno izveš kaj novega, dobiš nov odgovor na vprašanje dijakov »Kje se pa to uporablja?« in v odmorih ob kavi in piškotih poklepetaš s kolegi z drugih šol.

Prav kmalu bo na sporedu nov cikel srečanj v š. l. 2016/17.

Več sprotnih informacij o seminarju in arhiv seminarja pa najdete na spletni strani: `http://uc.fmf.uni-lj.si/mi/`.

Hanka Lebič

NOVE KNJIGE

Bor Plestenjak, Razširjen uvod v numerične metode, DMFA – založništvo, 2015, 420 strani.

V zbirki univerzitetnih učbenikov in monografij Matematika–Fizika založbe DMFA–založništvo je v septembru preteklega leta pod zaporedno številko 52 izšla knjiga Razširjen uvod v numerične metode avtorja Bora Plestenjaka. Po besedah avtorja je knjiga nastala po zapiskih, ki jih je vrsto let uporabljal in posodabljal ob predavanjih različnih predmetov s področja numerične matematike na Univerzi v Ljubljani.

Knjigo sestavlja štirinajst poglavij, ki jim sledi zgledno sestavljeno stvarno kazalo, skupaj 420 strani. K razumevanju besedila nam pomaga 84 slik in 26 tabel, spoznamo 50 samostojno zapisanih algoritmov. Citiranih je 56 virov. Besedilo je podprto s številnimi numeričnimi primeri, ki osvetljujejo teoretične izpeljave. Poglavja so zasnovana po enotnem ključu. Predstavljenemu gradivu sledi razdelek Matlab, v katerem je kratek, vsebini poglavja prirejen nabor ukazov jezika Matlab. Ti ponujajo programsko rešitev problemov, ki jih poglavje opisuje. Sledi razdelek, ki poudari vire za dodatno branje, v pomoč bralcu, ki bi želel snov poglavja še razširiti. Poglavje sklene razdelek Naloge, ki ga bodo s pridom uporabljali študenti pri utrjevanju snovi in pripravah na izpite. Med prebiranjem knjige bo bralec vesel tudi številnih opomb, v katerih dobimo kratko biografsko pojasnilo o avtorju, ki ga zgodovinsko povezujejo z danim delom zapisane snovi. Polistajmo bežno po vsebini knjige.

V prvem poglavju avtor pojasni predstavitev števil v računalniku in opiše standard IEEE, ki ga uporablja večina novejših računalnikov. Tu spoznamo vrste napak, ki jih srečujemo pri numeričnem računanju, ter pojme, kot so občutljivost problema, stabilnost metode, analiza zaokrožitvenih napak ipd. Dodani poučni primeri: računanje števila π, izračun e^x iz Taylorjeve vrste, reševanje kvadratne enačbe, ... nas zgovorno opozorijo na posebnost računanja z v računalniku predstavljivimi števili.

Drugo poglavje razgrne nabor postopkov za iskanje ničel funkcij ene spremenljivke. Srečamo bisekcijo, navadno iteracijo, tangentno, sekantno in Müllerjevo metodo, inverzno interpolacijo ter sestavljene metode. V drugem delu poglavja so opisane metode, namenjene iskanju ničel polinomov.

V tretjem poglavju avtor predstavi algoritme za reševanje sistemov linearnih enačb, vpelje občutljivost problema in analizira vpliv napak, ki pri reševanju lahko nastanejo. Poglavje naniza najprej osnovna orodja pri ocenjevanju napak, vektorske in matrične norme. Sledi podroben opis korakov in analiza osnovnega algoritma eliminacije. Poglavje sklenejo postopki, prirejeni reševanju linearnih sistemov posebne oblike, ko je pripadajoča matrika npr. simetrična, tridiagonalna, kompleksna ali razpršena.

Krajše četrto poglavje je namenjeno reševanju sistemov nelinearnih enačb. Spoznamo Jacobijevo iteracijo, več besed je namenjenih Newtonovi metodi in izpeljankam, omenjene so tudi variacijske metode.

V petem poglavju avtor osvetli reševanje predoločenih sistemov linearnih enačb, torej aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov, ki temelji na diskretnem skalarnem produktu. Najprej spoznamo osnovni QR razcep, nato avtor vpelje tudi v naslednjih poglavjih nepogrešljive ortogonalne matrične transformacije, Givensove rotacije in Householderjeva zrcaljenja. Sledita razširjeni QR in singularni razcep ter zahtevnejša razlaga in analiza nedoločenih problemov in problemov defektnega ranga. Poglavje končujejo posplošitve metode najmanjših kvadratov.

Šesto poglavje podrobno predstavi in analizira nesimetrični problem lastnih vrednosti. Najprej srečamo opis problema in nekaj splošnih izrekov, ki pomagajo pri ocenjevanju napak, in spoznamo pomen Schurove forme pri stabilnem preoblikovanju prvotnega problema. Med metodami so najprej na vrsti potenčna metoda in njene izpeljanke, kot je npr. inverzna iteracija. Sledi izpeljava ortogonalne in QR iteracije ter obširna razlaga prijemov, ki pospešijo osnovni QR algoritem, redukcija na Hessenbergovo obliko in premiki. Poglavje konča izpeljava končne oblike algoritma, implicitne QR iteracije.

Naslednje poglavje avtor namenja reševanju problema lastnih vrednosti simetričnih matrik. Uvodnemu delu in opisu Rayleighove iteracije sledi pet metod, ki vse najdejo svoje mesto v praktični uporabi: QR iteracija za simetrični problem lastnih vrednosti, bisekcija in Sturmovo zaporedje, deli in vladaj, Jacobijeva metoda in relativno robustne reprezentacije. Poglavje se konča z nekaj besedami o tem, za kakšne vrste problemov je kakšna od metod primernejša od drugih.

Osmo poglavje je namenjeno reševanju posplošitev problema lastnih vrednosti in računanju singularnega razcepa. Avtor najprej vpelje matrični šop in problem lastnih vrednosti za to posplošitev ter razloži QZ algoritem. Sledijo nelinearni problemi lastnih vrednosti in opis osnovnih metod. Zadnji del poglavja obravnava numerično računanje singularnega razcepa, ki je bil vpeljan že v petem poglavju. Predstavljene so metode: QR iteracija za singularni razcep, *dqds* in Jacobijeva metoda za singularni razcep.

Deveto poglavje obravnava aproksimacijo funkcij ene spremenljivke, podrobneje pa enakomerno aproksimacijo s polinomi in bližnjico, ekonomizacijo Čebiševa.

Deseto poglavje je avtor namenil polinomski in odsekoma polinomski interpolaciji. Avtor izpelje izražavo interpolacijskega polinoma v Lagrangeevi in Newtonovi obliki in pojasni nekaj pomembnih lastnosti deljenih diferenc. Sledita razdelka o zlepkih in Bézierovih krivuljah.

Enajsto poglavje govori o numeričnem odvajanju in predvsem integriranju. Med integracijskimi pravili spoznamo najprej Newton-Cotesove formule in njihovo nadgradnjo, sestavljena pravila. Sledijo adaptivne metode in Rombergova metoda kot ekstrapolacija sestavljenih pravil. V drugem delu so predstavljene Gaussove kvadraturne formule. Poglavje sklenejo razdelki o računanju izlimitiranih integralov in integriranju v več prostorskih razsežnostih.

V dvanajstem poglavju je obravnavano numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb, v večjem delu začetnih problemov. Začetek govori o obstoju rešitve, občutljivosti problema in stabilnosti metod. Sledi prvi razred numeričnih metod, enočlenske metode. Spoznamo preproste metode, npr. Eulerjevo, in praktično zelo pomembne metode Runge-Kutta. Razlagi metod je dodana beseda o stabilnosti in konvergenci enočlenskih metod. Sledijo razdelki, ki obravnavajo linearne veččlenske metode in opozarjajo na možne težave pri njihovi uporabi, kot je npr. inherentna nestabilnost ipd. Avtor omeni tudi začetne probleme višjega reda, implicitno podane diferencialne enačbe in metodo zveznega nadaljevanja. Poglavje končuje reševanje robnih problemov drugega reda, v linearnem in nelinearnem primeru.

Reševanju parcialnih diferencialnih enačb je namenjeno trinajsto poglavje. Začenja ga reševanje paraboličnih parcialnih diferencialnih enačb. Spoznamo eksplicitno, implicitno in Crank-Nicolsonovo shemo. Sledi eliptični tip in diferenčna metoda za reševanje Poissonove enačbe. Predstavnik hiperboličnega tipa enačb je valovna enačba. Avtor predstavi običajno pettočkovno diferenčno metodo in hiperbolični tip sklene s splošneje uporabno metodo karakteristik. Na koncu omeni še metodo končnih elementov kot pogosto uporabljan način pri reševanju eliptičnih problemov.

V zadnjem poglavju avtor naniza iterativne metode za reševanje sistemov linearnih enačb. Jacobijeva in Gauss-Seidelova metoda, SOR ter izpeljanke sodijo v klasični nabor metod, ki jih uporabljamo pri reševanju sistemov linearnih enačb, ki jih dobimo z diskretizacijo parcialnih diferencialnih enačb eliptičnega tipa. Zajeten del poglavja sestavljajo metode, ki temeljijo na podprostorih Krilova. Tu se predpostavi le, da algoritem zna izračunati produkt matrike sistema enačb in poljubnega vektorja. Avtor predstavi Arnoldijev in Lanczosev algoritem ter GMRES – posplošeni minimalni ostanek. Poglavje konča opis metode konjugiranih gradientov.

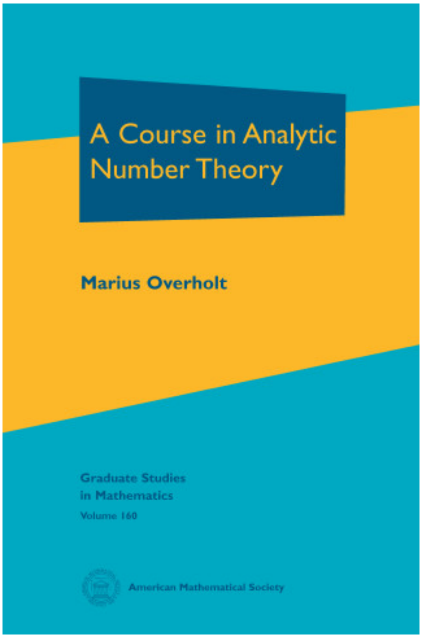
Knjiga *Razširjen uvod v numerične metode* je pisana strokovno korektno, razumljivo in lahko berljivo. Tako po pestrosti numeričnih primerov kot po primerno uravnoteženem matematičnem upravičevanju predstavljenih metod je zgleden obširen uvod v numerično računanje. Zato jo kot učbenik toplo priporočam študentom pri numeričnih predmetih, ki se pod tem ali drugim imenom predavajo na prvi stopnji univerzitetnega študija. A knjige ne sprejmimo le kot učbenik. Je dobro berilo za vse bralce, ki želijo na čim širšem naboru matematičnih problemov spoznati korake v njihovo numerično reševanje.

Peto poglavje, še posebej pa tri poglavja, ki sledijo, obravnavano snov na osnovnem nivoju bistveno in podrobno nadgradijo tako z naborom metod kot s strogo matematično analizo, ki sežeta do najsodobnejših spoznanj. Našteta poglavja so zato nedvomno izvrstno učno gradivo za posamezne izbirne predmete s področja numerične linearne algebre, ki se predavajo na višjih stopnjah študija.

Knjigo lahko kupite pri DMFA – založništvu po članski ceni 22,40 EUR.

Jernej Kozak

Marius Overholt: A Course in Analytic Number Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, 371 strani.



Učbenik je namenjen študentom višjih letnikov, ki želijo spoznati osnovne metode analitične teorije števil. Avtor v uvodu pravi, da knjiga ne zahteva posebnega predznanja, razen poznavanja osnov kompleksne analize, algebre in linearne algebre. Vsako poglavje zaokrožijo vaje oziroma naloge ter zelo podrobne, zanimive in poučne zgodovinske opombe in reference na knjige in članke, v katerih so predstavljene teme obravnavane podrobneje.

Analitična teorija števil se v glavnem posveča *aproksimativnemu preštevanju* objektov iz teorije števil, kot so npr. praštevila, delitelji, rešitve diofantskih enačb, točke mrež znotraj danega območja, razčlenitve celih števil, itd. Vendar njen domet ni omejen le na preštevanje števil, in za nekatere probleme (npr. v *algebraični teoriji števil*) dajo njene metode tudi *eksaktne* rešitve.

Prototip in eden zgodovinsko prvih primerov aproksimativnega preštevanja v teoriji števil je *praštevilski izrek*, ki število $\pi(x)$ praštevil $p \leq x$ aproksimira s t. i. *integralnim logaritmom* $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log(u)}$.

Relacijo $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{li(x)} = 1$, ki jo je na podlagi empiričnega opažanja, kako se praštevila vse bolj redčijo v tabeli števil do 1000, okrog 1792 formuliral mladi Gauss, najprej v obliki zakona oziroma hipoteze, da je na intervalih $(x-h, x]$ približno $h/\log(x)$ praštevil, in ki so jo najboljši matematiki s klasičnimi metodami zaman poskušali dokazati več kot sto let, sta leta 1896 neodvisno dokazala Jacques Hadamard in Charles de la Vallée Pousin na temelju idej Bernharda Riemanna, z uporabo kompleksne analize na *Riemannovi zeta funkciji* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, kar je pomenilo prvo veliko zmagoslavje analitične teorije števil.

Na gornjem zgledu lepo vidimo, kako matematika v svojem nastajanju, drugače od poučevanja matematike, ki terja izčiščene definicije, strogost in ekonomičnost, zahteva bujno domišljijo ter kreativen in drzen skok v neznano, tega presežka pa zgolj z asketsko logiko in dedukcijo, ki ostajata v varni domeni znanega, ni mogoče doseči. Seveda pa dokazi pomembnih izrekov poleg dobre začetne ideje, ki raziskovanje pravilno usmeri, praviloma zahtevajo vztrajnost, domiselnost in osredotočenost na cilj v vseh fazah dela; nekateri matematiki zato začenjajo vse svoje dokaze s črkami Q. E. D. – kot opomin, da se v gozdu neštetih možnih poti ne smejo izgubiti, ampak morajo svoje delo kronati z otipljivim rezultatom!

Ker je porazdelitev praštevil eden ključnih problemov v teoriji števil, so matematiki vztrajno iskali in našli še mnoge boljše ocene za funkcijo $\pi(x)$. Tako je npr. v knjigi dokazan rezultat $|\pi(x)-\int_2^x \frac{du}{\log(u)}| \leq Cxe^{-c\log^{1/10}(x)}$ za $x \geq x_0$.

V analitični teoriji števil so pomembne tudi ocene velikosti napake pri aproksimaciji $f(x) \backsim g(x)$ neke aritmetične funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ z neko analitično funkcijo $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tipičen tak problem je t. i. *Dirichletov problem deliteljev.* Če označimo število deliteljev naravnega števila n z $d(n)$, potem lahko povprečno število teh deliteljev $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} d(n)$ aproksimiramo z $\log(x)+2\gamma-1$, kjer je $\gamma = 0{,}57772\ldots$ *Euler-Mascheronijeva konstanta.* Kako hitro pri tej aproksimaciji absolutna napaka konvergira k 0, ko gre $x \to \infty$? To je Dirichletov problem deliteljev iz leta 1838, ki ima bogato zgodovino in je še do danes nerešen.

Delitelji in praštevila sodijo v t. i. *multiplikativno teorijo števil.* Metode analitične teorije števil pa so uporabne tudi v t. i. *aditivni teoriji števil*, npr. za dokaz *Waringove domneve* iz leta 1770 (prvi jo je dokazal David Hilbert 1909), da se da vsako naravno število n izraziti kot vsota $n = \sum_{i=1}^{g(k)} a_i^k$ omejenega števila k-tih potenc nenegativnih celih števil a_i, pri čemer je to število $g(k) < \infty$ odvisno od k.

Poglavja so (glede medsebojne odvisnosti) urejena po shemi: $1 \to (2,3)$, $3 \to (4,5), 5 \to (6,7,8), 8 \to (9,10)$ in imajo naslednje naslove oziroma vsebino:

V prvem poglavju z naslovom *Aritmetične funkcije* je najprej opisana metoda Čebiševa, s katero je mogoče dokazati $\pi(x) \backsim \mathrm{li}(x)$, njena začetna ideja pa je zelo preprosta. Ker je po zgoraj omenjenem praštevilskem izreku gostota praštevil do n približno $1/\log(n)$, se pri preštevanju praštevil zdi naravneje vsakemu praštevilu dati utež $\log(p)$ namesto 1. Tako je Čebišev vpeljal uteženo preštevalno funkcijo $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p)$. Ker pa so potence praštevil razmeroma redke, je vpeljal še eno preštevalno funkcijo $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log(p)$. Ti dve funkciji sta aproksimativno enaki, z njima pa lahko praštevilski izrek izrazimo v obliki $\psi(x) \backsim x$ oziroma $\vartheta(x) \backsim x$. Za boljšo predstavo o zahtevnosti teh izpeljav povejmo le, da ustrezni dokaz v knjigi zavzema skoraj tri strani!

Z izboljšano verzijo svoje metode je Čebišev našel za funkcijo $\psi(x)$ naslednji meji: $0{,}921 \cdot x \leq \psi(x) \leq 1,106 \cdot x$ za vse dovolj velike x, in uporabil ti meji za prvi dokaz *Bertrandovega postulata*, ki pravi, da za vsak $x \geq 2$ obstaja najmanj eno praštevilo na intervalu $(x/2, x]$. Ta njegov članek iz leta 1850 velja za začetek študija lokalne porazdelitve praštevil. V knjigi je podan krajši dokaz Bertrandovega postulata iz dveh delov: i) za $2 \leq x \leq 797$ trditev sledi iz opažanja E. G. H. Landaua, da je v zaporedju praštevil $2, 3, 5, 7, 11, 17, 31, 59, 107, 211, 401, 797$ vsako število manjše od dvakratnika svojega predhodnika; ii) za $x \geq 797$ pa se da (na podlagi Ramanujanove ideje in z veliko računske spretnosti) razliko $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$ omejiti navzdol s funkcijo $f(x) = \frac{\log(2)}{3} - \log(4x) - \frac{3 \log n^2(x)}{2 \log(2)} - 4 \log(2) x^{1/2}$, ki ima za $x \geq 797$ pozitiven odvod $f'(x) > 0$, v točki $x = 797$ pa ima pozitivno vrednost $f(797) = 1{,}2$, torej je $\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \geq f(x) > 0$, Q. E. D.

Knjiga pomeni nekaj standardnih orodij, ki se uporabljajo v analitični teoriji števil. Tako npr. dolge račune z neenakostmi zelo poenostavi Bachmannov zapis $f(x) = O(g(x))$, ki pomeni, da obstaja neka konstanta $C > 0$ in neko realno število x_0, da velja $|f(x)| \leq Cg(x)$ na intervalu $x \geq x_0$; pri ocenjevanju integralov na intervalu I dostikrat pride prav Hölderjeva neenakost $\int_I |f(x)g(x)| dx \leq (\int_I |f(x)|^p dx)^{1/p} (\int_I |g(x)|^q dx)^{1/q}$, kjer je $1 < p, q < \infty$ in $1/p + 1/q = 1$; morda najpogosteje uporabljano orodje v analitični teoriji števil je *parcialna sumacija* (diskretna analogija integracije per partes), katere osnovna verzija je identiteta: $\sum_{m=1}^{n} a_m b_m = b_n \sum_{m=1}^{n} a_m - \sum_{m=1}^{n-1} (b_{m+1} - b_m) \sum_{k=1}^{m} a_k$. Za ocenjevanje uteženih vsot *aritmetičnih funkcij* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ je zelo uporabna formula parcialne sumacije $\sum_{n \leq x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - \int_1^x F(u)g'(u)du$, kjer je $F(u) = \sum_{n \leq x} f(n)$ *sumacijska funkcija* aritmetične funkcije f, g pa je zvezna funkcija z odsekoma zveznim odvodom na $(1, \infty]$.

Kot primer zahtevnejše metode, predstavljene v Overholtovi knjigi, omenimo *metodo normalnega reda* (angl. normal order method) P. Turána, opisano v drugem poglavju knjige. Realna funkcija g je *normalni red* za realno funkcijo f, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja neenakost $-\varepsilon g(n) \leq f(n) - g(n) \leq \varepsilon g(n)$ za $n \leq x$ z največ $o_\varepsilon(x)$ izjemami, kjer je $f(x) = o(g(x))$ Landauova mali-o notacija za $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$.

G. H. Hardy in S. A. Ramanujan sta pokazala, da imata funkciji $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ različnih praštevilskih deliteljev števila n in $\Omega(n) = \sum_{p^k|n} 1$ vseh deliteljev števila n obe normalni red $\log(\log(n))$. To je v knjigi dokazano s Turánovo metodo, ki ima tudi verjetnostno interpretacijo. Turánov dokaz pa je odprl polje raziskovanja, ki se imenuje *verjetnostna teorija števil.*

V tretjem poglavju z naslovom *Karakterji in Eulerjevi produkti* je dokazana identiteta $\prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, ki velja za poljubno nenegativno *multiplikativno* aritmetično funkcijo f, tj. tako, ki ni identično enaka nič in za katero je $f(mn) = f(m)f(n)$, če je le $gcd(m, n) = 1$. Obravnavane so tudi *Dirichletove vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ s koeficienti $a_n \in \mathbb{C}$ in spremenljivko $s \in \mathbb{C}$. Dirichletovo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ aritmetične funkcije f imamo lahko za *rodovno funkcijo* funkcije f. Podobno kot so formalne potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uporabne v aditivni teoriji števil zaradi lastnosti $z^m z^n = z^{m+n}$ monomov, tako so Dirichletove vrste primerne za multiplikativne probleme zaradi lastnosti $m^{-s}n^{-s} = (mn)^{-s}$ Dirichletovih monomov.

Pomembno vlogo v analitični teoriji števil igrajo tudi ideje iz harmonične analize; ta način je vpeljal Dirichlet okrog 1830. Kot pravi M. Overholt, v harmonični analizi študirajo aproksimacije ali celo natančne reprezentacije funkcij s končnimi linearnimi kombinacijami $f(x) = c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x) + \cdots + c_N b_N(x)$, ali pa z neskončnimi vrstami ali integrali, kjer si vse bazne funkcije $b_n(x)$ delijo neko skupno simetrijsko lastnost. Le-ta je navadno določena z delovanjem neke grupe na prostoru, na katerem so funkcije definirane. Najbolj znan primer so klasične Fourierove vrste $f(x) \backsim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e(nx)$, kjer so vse bazne funkcije $e(nx)$, dane z $e(x) = e^{2\pi ix}$ periodične s periodo 1.

Najpreprostejši primer uporabe harmonične analize v analitični teoriji števil se nanaša na tiste aritmetične funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, ki so periodične s periodo q. Le-te so izomorfne prostoru kompleksnih funkcij na ciklični grupi $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_q$. V knjigi je kot primer izpeljan Fourierov razvoj Legendrovega simbola $(\frac{n}{p}) = p^{-1/2} \sum_{k=1}^{p} \frac{\sqrt{p}}{\tau_p}(\frac{k}{p})e(kn/p)$. Posplošitev teh metod naravno vodi do zelo uporabnega koncepta *reprezentacij grup.* Če namreč neko abstraktno grupo G, o kateri sicer ne vemo veliko, homomorfno preslikamo npr. v neko grupo matrik, lahko z metodami linearne algebre študiramo prvotno grupo G. Vendar so reprezentacije grup pomembne ne samo v teoriji grup, ampak tudi v analitični teoriji števil, in sicer za generiranje baznih funkcij v smislu zgoraj skicirane harmonične analize aritmetičnih funkcij.

Tako je npr. Dirichlet s pomočjo idej harmonične analize dokazal izrek o praštevilih v aritmetičnih zaporedjih, enega pomembnih mejnikov v teoriji števil, ki pravi: *Če sta p in q naravni, tuji si števili, potem aritmetično zaporedje $pm + q$, kjer $m = 0, 1, 2, \ldots$, vsebuje neskončno mnogo praštevil.* Pri svojem dokazu pa se ni mogel nasloniti na teorijo grup, saj je bil pojem grupe okrog 1830 znan le v obliki permutacijskih grup rešitev polinomskih enačb.

Četrto poglavje je posvečeno *krožni metodi*, ki je uporabna v diofantski analizi. Z njo se da oceniti število celoštevilskih rešitev različnih polinomskih enačb nad $\mathbb{Z}$, kadar je število neznank dovolj veliko. V knjigi je razvita do mere, da se da z njo dokazati Waringovo domnevo. Ta metoda se je najprej pojavila v članku Hardyja in Ramanujana (1917) o particijski funkciji $p(n)$, ki šteje, na koliko načinov lahko zapišemo n kot vsoto naravnih števil, pri čemer vrstni red ni važen. Z analizo singularnosti njene rodovne funkcije $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$, ki se jo da predstaviti z neskončnim produktom $f(z) = \prod (1 - z^m)^{-1}$, ter z uporabo Cauchyjeve integralske formule sta dobila asimptotsko oceno $p(n) \backsim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$.

V petem poglavju je predstavljena metoda konturnih integralov, s katero se da dobiti asimptotske ocene za sumacijske funkcije $F(x) = \sum_{n \le x} a_n$ iz ustreznih Dirichletovih vrst $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ s pomočjo teorije residuov.

S to metodo je v šestem poglavju dokazan praštevilski izrek $\pi(x) \backsim \psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log(p)$ v obliki, da obstaja $c > 0$, da je $\psi(x) = x + O(x e^{-c \cdot \log^{1/10}(x)})$, ko $x \to +\infty$.

Morebitnega bralca naj opozorimo, da težavnost knjige iz poglavja v poglavje narašča. Ob tem se spomnimo Evklidove opazke, da ni kraljevske poti v matematiko.

V sedmem poglavju je praštevilski izrek posplošen na aritmetična zaporedja $n \equiv a \pmod{q}$. Že sama formulacija Siegel-Walfiszovega izreka je zahtevna, dokaz prav tako.

V osmem poglavju so obravnavane Fourierove vrste, Poissonova formula, Jacobijeva funkcija theta $\vartheta : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, definirana s predpisom $\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e(nz)$, nadalje funkcija gama $\Gamma(s)$, ki jo po Weierstrassu lahko definiramo s pomočjo neskončnega produkta v obliki

$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{s}{n})e^{-s/n}$, ter funkcijska enačba za Riemannovo funkcijo $\zeta(s)$ v obliki: $\pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{s})\zeta(1-s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$.

Knjiga postaja, kot že rečeno, iz poglavja v poglavje vse bolj dostopna le specialistom (ali vsaj tistim, ki natančno preštudirajo vsa prejšnja poglavja).

V devetem poglavju je podan dokaz izreka Ikehare z metodami kompleksne analize. Kdor ta izrek pozna, ve, o čem je govor, kdor ga ne pozna, se mu tega ne da razložiti na kratko. Nespecialist za to področje lahko na takšne izreke gleda le kot na oddaljene vrhove Himalaje, izgubljene v meglicah.

V desetem poglavju je izpeljana eksplicitna formula za $\psi(x)$, v kateri nastopajo netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta: $\psi(x) = x - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2})$.

Čému brati takšno knjigo, oziroma kaj lahko nespecialist za to področje s tem pridobi? Odgovor je odvisen od vsakega bralca, njegove vztrajnosti in pripravljenosti za učenje nečesa novega in neznanega. Tudi če tega področja sploh ne pozna in če knjigo prebere le po diagonali, si bo lahko ustvaril neko osnovno predstavo o tem, kakšne probleme analitična teorija števil sploh obravnava. Če bo premagal pogost, a povsem neumesten strah pred formulami, v katerih mrgoli integralov in grških črk, se bo lahko prepričal, da se da prav vse razumeti, če le napreduje sistematično in v tempu, ki ga pač zmore, in če rešuje tudi naloge na koncu poglavij. Prebiranje podrobnih zgodovinskih opomb pa mu bo osvetlilo in približalo razvoj idej in metod tega zanimivega področja v širšem kontekstu, kar ga bo še dodatno spodbudilo, da se z boljšim razumevanjem ponovno vrne k študiju mest, ki so se mu prej zdela težka.

Če je ta prispevek vsaj enega bralca navdušil za analitično teorijo števil ali ga celo spodbudil k odločitvi za študij tega izredno zanimivega in zahtevnega področja, za kar se zdi Overholtova knjiga zelo primeren uvod, saj dolgo in naporno pot do vrha vendarle naredi nekako prijazno in dostopno, je njegov namen dosežen. Čudovit razgled, o katerem lahko dolgo samo sanjaš, odpre pa se šele z vrha gore, poplača vse. Iz doline vidiš samo meglice in tu in tam kakšen sončni žarek. A kot pravi stara kitajska modrost: *Pot, dolga tisoč milj, se začne z enim korakom.*

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2016
Letnik 63, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Joe Weber je v šestdesetih letih prejšnjega stoletja sprožil eksperimentalni lov na gravitacijske valove. Slika ga kaže z eno izmed njegovih gravitacijskih anten. Foto: Univerza v Marylandu.