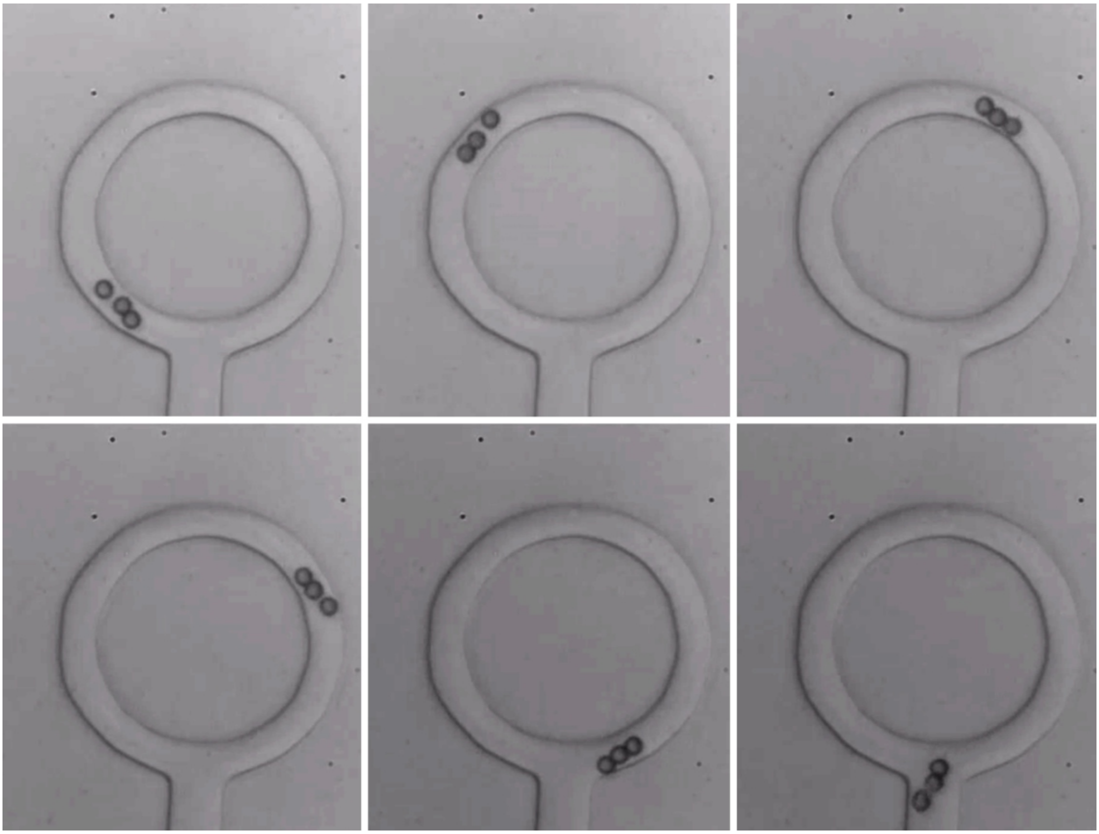
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2018
Letnik 65
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 65 • ŠT. 3 • STR 81-120 • MAJ 2018

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2018, letnik 65, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PRAVOKOTNIKI NA KRIVULJI

ŽIGA VIRK

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04 51M20

Pri podani enostavni sklenjeni krivulji v ravnini predstavimo nekaj konstrukcij večkotnikov, katerih oglišča ležijo na krivulji. Vprašanje obstoja kvadrata, katerega oglišča ležijo na taki krivulji, je odprto že več kot stoletje.

RECTANGLES ON A CURVE

We present some constructions of polygons, whose vertices lie on a given simple closed curve in the plane. The question whether such a square can always be found for a given curve has been open for more than a century.

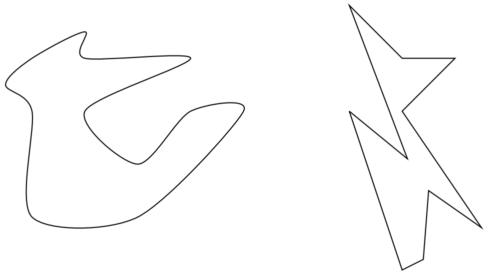
Definicije in zgodovinsko ozadje

Krivulja K v ravnini $\mathbb{R}^2$ je zvezna slika intervala. Krivulja je sklenjena, če je slika zaprtega enotskega intervala, pri čemer se prva in zadnja točka ujemata, tj. $K = f([0,1])$, pri čemer je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zvezna in $f(0) = f(1)$. Sklenjena krivulja je enostavna, če enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$. Enostavno sklenjeno krivuljo lahko ekvivalentno definiramo kot sliko injektivne zvezne preslikave iz krožnice v ravnino. Znameniti Jordanov izrek pravi, da enostavna sklenjena krivulja K ravnino razdeli na dva dela, izmed katerih je en del neomejen, drugi del, imenovan notranjost krivulje, pa je omejen. V čast Jordanu, ki je prvi formuliral in (večinoma) dokazal Jordanov izrek, pravimo enostavnim sklenjenim krivuljam Jordanove krivulje. Za Jordanovo krivuljo K naj $\widetilde{K}$ predstavlja unijo K ter njene notranjosti.

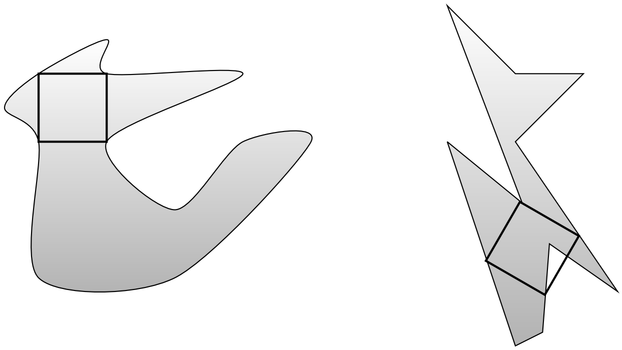
Jordanova krivulja K je poligonalna, če je sestavljena iz končnega števila daljic (slika 1). Ekvivalentno lahko rečemo, da je v tem primeru K slika kosoma linearne injektivne preslikave nekega n-kotnika v ravnino.

Naj bo K Jordanova krivulja in $A \subset \mathbb{R}^2$ m-kotnik v ravnini. A je *pričrtan* krivulji K, če vsa oglišča A ležijo na K. Če je $\widetilde{K}$ konveksna množica, tedaj pričrtan A leži v $\widetilde{K}$. V tem primeru bi lahko rekli, da je A včrtan v K. V primeru, ko $\widetilde{K}$ ni konveksna množica, lahko del pričrtanega A leži izven $\widetilde{K}$.

Ali lahko vsaki Jordanovi krivulji v ravnini pričrtamo kvadrat? (Kot »kvadrat« pri tem seveda ne mislimo točke, ki je sicer matematično duhovit



Slika 1. Primer gladke Jordanove krivulje (na levi) ter poligonalne Jordanove krivulje.



Slika 2. Primer pričrtanih kvadratov v gladko Jordanovo krivuljo (na levi) ter v poligonalno Jordanovo krivuljo.

primer kvadrata z ničelno stranico.) To je še vedno odprto vprašanje, ki ga je leta 1911 prvi formuliral Toeplitz [7]. Kljub enostavni formulaciji se je problem kmalu izkazal za precej težkega. Prvi dokaz posebnega primera je objavil Emch [2]. Do danes je bilo objavljenih mnogo člankov na to temo, od katerih pa še noben ni odgovoril na originalno vprašanje. Članki so večinoma vsebovali pritrdilen odgovor na Toeplitzovo vprašanje pod posebnimi pogoji, ki so s časom postajali vse bolj splošni. V času pisanja tega članka sta bila zadnja prispevka na to temo ([1] in [4]) objavljena v razmaku enega tedna okoli novega leta 2018. Za podrobno zgodovinsko ozadje bralcu priporočamo pregledni članek [3].

V tem prispevku bomo predstavili nekaj načinov, kako lahko ustrezno lepi Jordanovi krivulji pričrtamo trikotnik, pravokotnik ali kvadrat.

PRAVOKOTNIKI NA KRIVULJI

ŽIGA VIRK

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04 51M20

Pri podani enostavni sklenjeni krivulji v ravnini predstavimo nekaj konstrukcij večkotnikov, katerih oglišča ležijo na krivulji. Vprašanje obstoja kvadrata, katerega oglišča ležijo na taki krivulji, je odprto že več kot stoletje.

RECTANGLES ON A CURVE

We present some constructions of polygons, whose vertices lie on a given simple closed curve in the plane. The question whether such a square can always be found for a given curve has been open for more than a century.

Definicije in zgodovinsko ozadje

Krivulja K v ravnini $\mathbb{R}^2$ je zvezna slika intervala. Krivulja je sklenjena, če je slika zaprtega enotskega intervala, pri čemer se prva in zadnja točka ujemata, tj. $K = f([0,1])$, pri čemer je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zvezna in $f(0) = f(1)$. Sklenjena krivulja je enostavna, če enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$. Enostavno sklenjeno krivuljo lahko ekvivalentno definiramo kot sliko injektivne zvezne preslikave iz krožnice v ravnino. Znameniti Jordanov izrek pravi, da enostavna sklenjena krivulja K ravnino razdeli na dva dela, izmed katerih je en del neomejen, drugi del, imenovan notranjost krivulje, pa je omejen. V čast Jordanu, ki je prvi formuliral in (večinoma) dokazal Jordanov izrek, pravimo enostavnim sklenjenim krivuljam Jordanove krivulje. Za Jordanovo krivuljo K naj $\widetilde{K}$ predstavlja unijo K ter njene notranjosti.

Jordanova krivulja K je poligonalna, če je sestavljena iz končnega števila daljic (slika 1). Ekvivalentno lahko rečemo, da je v tem primeru K slika kosoma linearne injektivne preslikave nekega n-kotnika v ravnino.

Naj bo K Jordanova krivulja in $A \subset \mathbb{R}^2$ m-kotnik v ravnini. A je *pričrtan* krivulji K, če vsa oglišča A ležijo na K. Če je $\widetilde{K}$ konveksna množica, tedaj pričrtan A leži v $\widetilde{K}$. V tem primeru bi lahko rekli, da je A včrtan v K. V primeru, ko $\widetilde{K}$ ni konveksna množica, lahko del pričrtanega A leži izven $\widetilde{K}$.

Ali lahko vsaki Jordanovi krivulji v ravnini pričrtamo kvadrat? (Kot »kvadrat« pri tem seveda ne mislimo točke, ki je sicer matematično duhovit

- je K gladka Jordanova krivulja in želimo pričrtati enakokraki trikotnik s poljubnim kotom.

Za vsakega izmed teh primerov poiščite ustrezen dokaz.

Trikotnikov torej ni težko pričrtati. Po drugi strani pa večkotnikov včasih ne moremo pričrtati. Bralec se lahko brez težav prepriča, da nobenega pravilnega n-kotnika za $n > 4$ ne moremo pričrtati dolgemu ozkemu pravokotniku. Prav tako za $n \geq 7$ pravilnega n-kotnika ne moremo pričrtati nobenemu trikotniku, saj oglišča takega večkotnika ne ležijo na treh premicah.

Pričrtani kvadrati

Oglejmo si najprej nekaj primerov pričrtanih kvadratov:

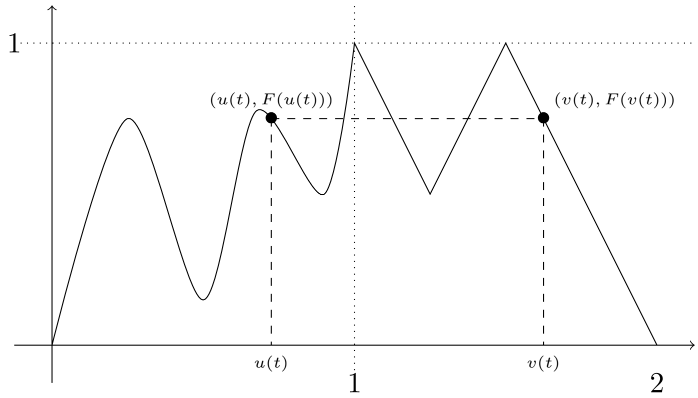
Primer 2. Naj bo K kvadrat. Tedaj je vsaka točka K oglišče pričrtanega kvadrata.

Primer 3. Naj bo K enakokrak trikotnik z enim kotom večjim od $\pi/2$. Če je kvadrat C pričrtan K, potem ima par oglišč na isti stranici trikotnika K. Ta stranica ne more biti krak, saj v tem primeru nobeno izmed preostalih oglišč zaradi pogoja o kotu ne more biti na drugem kraku. Zato mora biti omenjena stranica osnovnica, iz česar ni težko opaziti, da ima K natanko en pričrtan kvadrat.

V nadaljevanju si bomo pri pričrtavanju kvadratov pomagali z naslednjim izrekom o plezanju po gorah. Več o izreku v primeru kosoma linearnih funkcij najdemo v [6, Theorem 5.5].

Izrek 4 (Mountain Climbing Theorem). *Naj bo $F\colon [0,2] \to [0,1]$ zvezna funkcija, za katero velja $F(0) = F(2) = 0$ in $F(1) = 1$. Poleg tega predpostavimo, da je F na vsakem odprtem intervalu nekonstantna. Tedaj obstajata zvezni funkciji $u\colon [0,1] \to [0,1]$ in $v\colon [0,1] \to [1,2]$, za kateri velja $u(0) = 0, u(1) = 1 = v(1), v(0) = 2$ ter $F \circ u = F \circ v$.*

Dokaz. Podali bomo idejo dokaza v primeru, ko je F kosoma linearna funkcija. Definirajmo funkcijo $G\colon [0,1] \times [1,2] \to [-1,1]$ s predpisom $G(x,y) = F(x) - F(y)$. Množica $A = G^{-1}(0)$ je kosoma linearna (tj. sestavljena iz daljic, točk in trikotnikov) podmnožica v kvadratu $[0,1] \times [1,2]$. Množica A predstavlja vse pare koordinat (x,y), za katere velja $F(x) = F(y)$. Ker



Slika 4. Primer usklajenega plezanja na goro iz izreka 4. Vrh, kjer se plezalca srečata, je pri $(1, 1)$. Plezalca (piki) sta vseskozi na isti višini.

je F na vsakem odprtem intervalu nekonstantna, se da pokazati, da je A kombinatoričen graf, tj., A je sestavljena iz daljic in točk. Poleg tega velja, da iz vsakega vozlišča (točke) v A izhaja sodo mnogo povezav (daljic), razen iz vozlišč $(0, 2)$ ter $(1, 1)$, iz katerih izhaja natanko ena povezava. Ker ima vsaka povezana komponenta poljubnega grafa sodo število vozlišč, iz katerih izhaja liho mnogo povezav, se $(0, 2)$ ter $(1, 1)$ nahajata v isti komponenti A. Koordinatni projekciji poti med $(0, 2)$ ter $(1, 1)$ v A sta funkciji u in v. ∎

Izrek 4 je dobil ime po interpretaciji v povezavi s plezanjem v gore (slika 4). Naj bo gora podana kot graf funkcije F, definirane na intervalu $[0, 2]$. Vrh gore bo v točki $(1, 1)$. Levo pobočje podaja funkcija $F|_{[0,1]}$, desno funkcija $F|_{[1,2]}$.

Plezalca začneta plezati na goro po grafu F, vsak iz svojega izhodišča na višini 0: levi plezalec začne v $(0, 0)$, desni pa v $(2, 0)$. Izrek 4 tedaj pove, da lahko plezalca izbereta taki poti u in v, da bosta med celotno potjo na vrh njuni višini enaki. Pri tem parametrizaciji u in v v splošnem nista monotoni, kar pomeni, da tako usklajena pot plezalcev včasih vključuje začasno vračanje po poti nazaj.

Trditev 5. *Naj bo* $F\colon [0, 2] \to [0, 1]$ *zvezna funkcija, katere ničli sta natanko* 0 *in* 2 *ter za katero velja* $F(1) = 1$*. Jordanovo krivuljo* K *definiramo kot unijo grafa funkcije* F *in daljice med točkama* $(0, 0)$ *ter* $(2, 0)$*. Tedaj obstaja kvadrat, pričrtan* K*.*

Dokaz. Z uporabo izreka 4 izberimo pripadajoči funkciji u in v. Opazimo, da za vsak $t \in [0, 1]$ točke $u(t), v(t), F(v(t)), F(u(t))$ tvorijo pričrtan pravokotnik krivulji K (slika 4). Razlika med višino ter dolžino pravokotnika je zvezna funkcija $R(t) = F(v(t)) - (v(t) - u(t))$. Opazimo, da je $R(0) = -2, R(1) = 1$, kar pomeni, da obstaja $s \in (0,1)$, za katerega velja $R(s) = 0$. Torej točke $u(s), v(s), F(v(s)), F(u(s))$ tvorijo pričrtan kvadrat.

■

Izziv. Z manjšo prilagoditvijo dokaza in izreka 4 posplošite trditev 5 na naslednje načine:

- V predpostavki uporabite poljubno zvezno funkcijo $F : [a,b] \to [0,c]$, katere edini ničli sta a in b, pri čemer velja $a < b$ ter $c > 0$;
- V predpostavki uporabite poljubno Jordanovo krivuljo, ki je simetrična glede na premico p;
- Pri predpostavkah trditve 5 za poljuben $k > 0$ pričrtajte pravokotnik, katerega razmerje med višino in dolžino je k.

Pričrtani pravokotniki

V tem delu si bomo ogledali konstrukcijo pričrtanih pravokotnikov splošni Jordanovi krivulji. Ta način je prvi predstavil Vaughan, v pisni obliki pa se pojavi v [5].

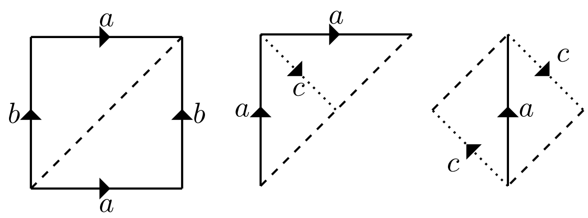
Izrek 6. *Naj bo K Jordanova krivulja. Tedaj obstaja pravokotnik, pričrtan K.*

Bistven korak v dokazu bo predstavljala naslednja trditev, ki opisuje prostor neurejenih parov točk na K. Prostor urejenih parov točk je $S^1 \times S^1$, kar je torus, saj je K homeomorfen krožnici S^1.

Trditev 7. *Naj bo P prostor vseh neurejenih parov točk na Jordanovi krivulji K. Tedaj je P homeomorfen Moebiusovemu traku.*

Dokaz. Oglejmo si prostor vseh neurejenih parov točk na K. Krivulja K je slika preslikave $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, pri čemer enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$.

Prvi način: Preslikava $F\colon [0,1] \times [0,1] \to P$, definirana kot $F(s,t) = \{f(s), f(t)\}$, je zvezna surjektivna preslikava, definirana na $[0,1]^2$. Njeno definicijsko območje je skicirano na levi strani slike 5. Na tem definicijskem območju bomo identificirali pare točk, ki se slikajo v isti neurejen par v P. Ker je $f(0) = f(1)$, to pomeni, da identificiramo:



Slika 5. Prostor neurejenih parov točk na krivulji je Moebiusov trak. Začnemo s prostorom urejenih parov, ki je torus (levi del). Neodvisnost od vrstnega reda točk pomeni, da identificiramo vsak par točk, ki je zrcalen glede na črtkasto diagonalo. Pri tem se identificirata stranici a in b. Na sliki vsako točko pod črtkasto diagonalo prenesemo na pripadajočo simetralno točko nad diagonalo. Posledično dobimo reprezentacijo na sredini. S prerezom vzdolž pikčaste poti c in preureditvijo dveh trikotnikov (lepljenjem vzdolž a) dobimo reprezentacijo na desni, ki predstavlja Moebiusov trak.

- $(s, 0) \sim (s, 1)$ za vsak $t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija stranic a na sliki 5.
- $(0, t) \sim (1, t)$ za vsak $t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija stranic b na sliki 5.

S to identifikacijo iz $[0, 1]^2$ dobimo torus. Ker pa slikamo v neurejene pare, moramo identificirati še $(s, t) \sim (t, s)$ za vsak $s, t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija parov točk na levem kvadratu slike 5, ki so zrcalne glede na črtkasto diagonalo. Prostor na sredini slike 5, ki ga dobimo kot rezultat tega lepljenja, je homeomorfen P. Slika 5 demonstrira, da je rezultat Moebiusov trak.

Drugi način: Preslikava $G\colon [0, 1/2] \times [0, 1/2] \to P$, definirana kot $G(s, t) = \{f(s - t \pmod 1), f(s + t)\}$ je zvezna preslikava, definirana na $[0, 1/2]^2$, pri čemer $s - t \pmod 1 = (s - t) - \lfloor s - t \rfloor$ predstavlja decimalni del števila, npr. $0{,}2 \pmod 1 = 0{,}2$, $-0{,}2 \pmod 1 = 0{,}8$ ter $1 \pmod 1 = 0$. Z direktnim izračunom lahko preverimo, da je G surjektivna in da je injektivna na $[0, 1/2) \times [0, 1/2]$. Opazimo še, da velja $G(0, t) = G(1/2, 1/2 - t)$. Prostor P torej dobimo z identifikacijo $(0, t) \sim (1/2, 1/2 - t)$ na kvadratu $[0, 1/2]^2$, kar predstavlja standardno konstrukcijo Moebiusovega traku. ■

Dokaz izreka 6. Po trditvi 7 je P, prostor vseh neurejenih parov točk na Jordanovi krivulji K, homeomorfen Moebiusovemu traku. V dokazu trditve 7 opazimo, da krožnica, ki je rob tako dobljenega Moebiusovega traku P, predstavlja vse pare točk oblike $(x, x) \in K \times K$. V prvem načinu dokaza trditve 7 krožnica sovpada z diagonalo v levem diagramu slike 5, v drugem pa s podprostorom $[0, 1/2] \times \{0, 1/2\}$ definicijskega območja preslikave G.

To robno krožnico identificiramo s krivuljo K, ter vzdolž nje na P prilepimo $\widetilde{K}$, ki je topološki disk. Zlepek X je povsem legitimen geometrijski objekt, ki pa se ga ne da vložiti v $\mathbb{R}^3$. Geometrijsko je namreč nazorno, da vzdolž robne komponente Moebiusovega traku v $\mathbb{R}^3$ ne moremo nalepiti diska. Formalen dokaz tega dejstva je tu opuščen.

Definirajmo sedaj zvezno preslikavo $F\colon X \to \mathbb{R}^3$:

- za $(x, y) \in \widetilde{K}$ definirajmo $F(x, y) = (x, y, 0)$;
- za točko na P, ki pripada paru točk $\{u, v\}$ na krivulji K, definiramo $F(\{u, v\}) = (\frac{u+v}{2}, ||u-v||)$, pri čemer je $||u-v||$ evklidska razdalja med u in v.

Preslikava F je zvezna na vsakem izmed kosov P in $\widetilde{K}$. Na preseku $P \cap \widetilde{K}$ se zapisa ujemata, ker je (z manjšo zlorabo zapisa) $F(\{u, u\}) = (u, 0) = F(u)$. Torej je F zvezna.

Preslikava F ne more biti injektivna, saj X ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^3$. Zaradi tega sklepamo, da obstajata točki $p, q \in X$, za kateri velja $F(p) = F(q)$. Ker je F injektivna na disku $\widetilde{K}$ v ravnini $z = 0$, tretja koordinata slike vseh točk iz $X \setminus \widetilde{K}$ pa je pozitivna, mora veljati $p, q \notin \widetilde{K}$. Zato po definiciji F za $p = \{p_1, p_2\}, q = \{q_1, q_2\}$ velja $(\frac{p_1+p_2}{2}, ||p_1 - p_2||) = (\frac{q_1+q_2}{2}, ||q_1 - q_2||)$. Para točk p in q imata torej isto središčno točko, razdalji med točkama pa sta enaki v obeh parih. Para zato predstavljata diagonalna para točk pravokotnika. Torej p_1, q_1, p_2, q_2 določajo pričrtani pravokotnik. ■

Opomba 8. Prostor X v dokazu izreka 6 je projektivna ravnina. Formalen dokaz dejstva, da se je ne da vložiti v $\mathbb{R}^3$, uporablja orodja algebrajske topologije.

LITERATURA

[1] A. Akopyan in S. Avvakumov, *Any cyclic quadrilateral can be inscribed in any closed convex smooth curve*, arXiv:1712.10205.

[2] A. Emch, *Some properties of closed convex curves in a plane*, Amer. J. Math **35** (1913), 407–412.

[3] B. Matschke, *A survey on the square peg problem*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), 346–352.

[4] B. Matschke, *Quadrilaterals inscribed in convex curves*, arXiv:1801.01945.

[5] M. D. Meyerson, *Balancing acts*, Topology Proc. 6: 59–75, 1981.

[6] I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010, dostopno na `www.math.ucla.edu/~pak/book.htm`, ogled 7. 11. 2018.

[7] O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn, **4** (1911), 197.

PLAVANJE V MIKROSKOPSKEM SVETU

MOJCA VILFAN

Institut »Jožef Stefan«
Ljubljana, Slovenija

PACS: 47.63.mf, 47.63.Gd

Plavanje v tekočinah na mikroskopski skali se znatno razlikuje od plavanja makroskopskih teles. Na mikroskali viskoznost prevlada nad vztrajnostjo in za plavanje morajo mikroorganizmi izvajati nerecipročne gibe. V prispevku bom predstavila nekaj primerov gibanja iz narave in opisala plavalne mehanizme umetnih plavalcev, ki jih ustvarjamo v laboratorijih.

SWIMMING IN THE MICROSCOPIC WORLD

Swimming on microscale is significantly different from swimming of macroscopic objects. In this regime, the so-called low Reynolds number regime, viscosity prevails over inertia and in order to swim, microorganisms have to move nonreciprocally. Here I will present some cases of nonreciprocal motion found in nature and describe swimming mechanisms of some artificial microswimmers.

Sila upora

Iz izkušenj vemo, da pri plavanju ali kolesarjenju na nas deluje sila upora. Opažamo, da je pri zamahu roke v vodi sila upora občutno večja od sile, ki deluje na roko ob zamahu v zraku. Vemo, da moramo na kolesu pri večji hitrosti znatno močneje poganjati, če želimo ohranjati stalno hitrost. In boleče izkušnje so nas naučile, da je pri skoku v vodo sila vode, ki deluje na nas, bistveno večja, če skočimo »na ploh«, kot pa če se z iztegnjenim telesom potopimo v globino.

Na podlagi izkušenj sklepamo, da sila, s katero voda ali zrak delujeta na premikajoče se telo, ni odvisna zgolj od snovi, po kateri se telo giblje, temveč tudi od hitrosti in oblike ter velikosti telesa. Fizikalno gledano je pojav te sile povezan z odrivanjem tekočine pred premikajočim se telesom in zato pogojen z vztrajnostjo (inercijo) okoliške tekočine. Za opisano silo velja kvadratni zakon upora in jo zapišemo kot

$$F_\mathrm{k} = \frac{1}{2} C_u \varrho S v^2. \tag{1}$$

Pri tem smo vpeljali sorazmernostni faktor C_u, ki zajame podatke o obliki telesa, z ϱ smo označili gostoto tekočine, po kateri se telo premika (npr. voda ali zrak), S je prečni presek telesa glede na smer premikanja, v pa označuje hitrost premikanja telesa glede na okoliško tekočino. Vrednosti koeficienta C_u so močno odvisne od oblike telesa in dosegajo vrednosti okoli 0,04 za telesa kapljičaste oblike, okoli 0,2 za najbolj aerodinamične avtomobile, malo manj od 0,5 za kroglo in okoli 1 za kolesarje ter smučarje [10].

Zamislimo si še en primer iz vsakdanjega življenja. Vzemimo žličko in najprej pomešajmo kozarec vode in nato še lonček medu. Čeprav je gostota medu le za okoli 50 % večja od gostote vode, pa je sila, s katero moramo mešati med, bistveno večja. Ali to pomeni, da naš opis sile upora ne velja? Previdno lahko trdimo, da naš opis sile upora ni popoln.

Ključni parameter, ki ga moramo upoštevati pri dopolnitvi zapisa sile upora, je viskoznost tekočine. Ko se telo premika skozi mirujočo viskozno tekočino, pride do pojava strižne hitrosti: hitrost tekočine daleč od telesa je enaka nič, tekočina tik ob telesu pa ima hitrost, ki je enaka hitrosti telesa, saj jo telo vleče s seboj. Razlika v hitrosti povzroči strižno silo. Celotna sila na telo je tako kombinacija prispevkov zaradi viskoznosti (strižne sile) in tlaka (normalne sile). Razmeroma zapleten račun pokaže, da je skupna sila, ki deluje na premikajočo se kroglo v viskozni snovi, enaka

$$F_1 = 6\pi R\eta v. \tag{2}$$

Parameter η je viskoznost tekočine, R polmer kroglice oziroma neka značilna razsežnost za druge oblike teles, v pa ponovno relativna hitrost telesa glede na tekočino. Zaradi linearne odvisnosti od hitrosti pravimo gornji enačbi tudi linearni zakon upora.

Reynoldsovo število

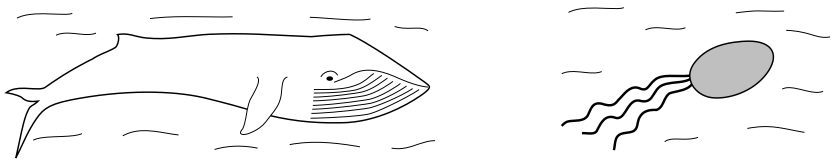
Zapisali smo dva izraza za silo upora, ki deluje na premikajoče se telo v tekočini. Kako pa vemo, kdaj je treba upoštevati linearni zakon (ki se pojavi predvsem zaradi viskoznosti tekočine) in kdaj kvadratni zakon (do katerega pride zaradi inercije tekočine)? Linearni zakon prevlada v tekočinah z veliko viskoznostjo ali v primeru zelo majhnih in zelo počasnih plavalcev. Kvadratni zakon pa je treba upoštevati v tekočinah z zelo majhno viskoznostjo in pri premikanju velikih teles z velikimi hitrostmi glede na tekočino. Za bolj natančen opis vpeljemo merilo, ki pove, kateri prispevek je dominanten.

Imenujemo ga Reynoldsovo število[1] in je enako

$$Re = \frac{\varrho R v}{\eta} \propto \frac{F_k}{F_l}. \tag{3}$$

Vidimo, da je Reynoldsovo število do predfaktorja natančno enako razmerju sil kvadratnega in linearnega upora. Glede na izvor sil pravimo, da Reynoldsovo število predstavlja razmerje med vztrajnostnimi in viskoznimi silami, njegova velikost pa predstavlja mero za prevlado enega pojava nad drugim. Vztrajnost prevlada, če je Reynoldsovo število veliko, v zelo grobem ocenjeno nad 100, in v takem primeru lahko uporabimo kvadratni zakon upora. Za $Re \lesssim 1$ prevlada viskoznost in za opis sile upora se lahko poslužimo linearnega zakona. Asimetrija v kriterijih se pojavi zaradi predfaktorjev, ki znašajo $\sim C_u/(2 \cdot 6\pi) \sim 0{,}03$.

Za boljšo predstavo si oglejmo nekaj primerov Reynoldsovih števil. Kolesar ali padalec dosegata Reynoldsova števila okoli 10^6, podobno vrednost dobimo tudi za plavalca v vodi. Te vrednosti so globoko v režimu velikih Reynoldsovih števil in posledično v režimu inercije.



Slika 1. Reynoldsovo število za plavajočega kita je $\sim 10^8$, za bakterijo v vodi pa le $\sim 10^{-5}$.

Po drugi strani je Reynoldsovo število za spore gliv s polmerom okoli 1 µm in hitrostjo padanja okoli 1 mm/s le okoli 10^{-4}. Še manjše vrednosti Reynoldsovega števila dosegajo bakterije, na primer *Escherichia coli*, ki so primerljive velikosti kot spore, vendar se premikajo po vodi s hitrostjo nekaj deset mikrometrov na sekundo. Za njih je $Re \sim 10^{-5}$, kar pomeni, da viskoznost povsem prevlada nad vztrajnostjo. Ko na primer bakterija *E. coli* preneha z aktivnim plavanjem, se zaradi viskoznih sil v manj kot mikrosekundi povsem ustavi, njena »zavorna pot« pa je le okoli 0,01 nm [7]. Če se torej želi v nekem trenutku premikati, mora tisti trenutek aktivno plavati. Kako se je telo premikalo pred tem, je pri nizkih Reynoldsovih številih povsem nepomembno.

[1] Po irsko-britanskem fiziku Osbornu Reynoldsu, 1842–1912.

Obrat časa

Poskusimo premikanje pri nizkih Reynoldsovih številih opisati še matematično. Na splošno za opis tekočin uporabimo Navier-Stokesovo enačbo. To je precej zapletena enačba, ki pa jo bomo poenostavili in ob upoštevanju nizkega Reynoldsovega števila prišli do presenetljivega zaključka.

Navier-Stokesova enačba za nestisljivo tekočino je:

$$\varrho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)=\eta\nabla^2\vec{v}-\nabla p+\vec{f}, \tag{4}$$

pri čemer je $\vec{v}$ vektorsko polje hitrosti, p je tlačno polje, $\vec{f}$ pa opisuje gostoto zunanjih sil na tekočino. Členi na desni strani tako opisujejo skupno gostoto sil, ki vplivajo na gibanje tekočine: prvi člen predstavlja viskozne (strižne) sile, drugi člen tlačne sile, tretji pa morebitne zunanje sile. Vidimo, da je enačba zelo podobna drugemu Newtonovemu zakonu na enoto volumna, pri čemer imamo na desni strani gostoto sil, na levi pa nastopa gostota snovi, pomnožena z odvodom hitrosti po času (pospeškom). Pri zapisu totalnega odvoda hitrosti po času smo upoštevali tudi premikanje tekočine in tako dobili dva člena, ki nastopata na levi strani znotraj oklepaja. Drugi člen naredi Navier-Stokesovo enačbo nelinearno in zato na splošno izredno zapleteno za reševanje.

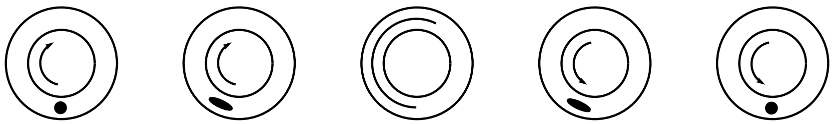
Vrnimo se v režim nizkih Reynoldsovih števil, v katerem, spomnimo se, viskoznost prevlada nad vztrajnostjo. V takem režimu lahko člene na levi strani enačbe (4), ki predstavljajo vztrajnostni prispevek, zanemarimo. Ostanejo le členi na desni in ob odsotnosti zunanjih sil poenostavljeno enačbo – pravimo ji tudi Stokesova enačba – zapišemo kot

$$0=\eta\nabla^2\vec{v}-\nabla p. \tag{5}$$

Enačba na splošno še vedno ni preprosto rešljiva, lahko pa iz nje na primer analitično izpeljemo izraz za linearni zakon upora kroglice (2). Tu se osredotočimo na drugo pomembno lastnost Stokesove enačbe. Z neupoštevanjem členov na levi strani Navier-Stokesove enačbe smo namreč odpravili vsakršno časovno odvisnost, saj v Stokesovi enačbi časovna spremenljivka t ne nastopa več.

Ta ugotovitev ima zelo pomembne fizikalne posledice. Pomeni, da pri nizkih Reynoldsovih številih časovna spremenljivka ne igra nobene vloge. Če na tekočino delujemo z neko silo, se premakne v določeno smer, ko pa smer sile obrnemo, se tekočina vrne v izhodiščni položaj. Pri tem ni pomembno, ali tekočino premikamo hitro ali počasi. To je v skladu s tem, da Stokesova enačba, ki opisuje premikanje tekočine, ni odvisna od časa. Ker lahko s spremembo smeri sile povsem obrnemo prvotno premikanje tekočine, pogosto govorimo kar o obratu časa pri nizkih Reynoldsovih številih.

Morda najlepši prikaz tega pojava je naslednji poskus. Med dva koncentrična prozorna valja natočimo zelo viskozno tekočino. Nato v tanko plast tekočine, ki se nahaja med stenama valjev, kanemo kapljico barvila (slika 2). Notranji valj previdno zavrtimo v eno smer in kapljica barvila se razmaže. Po nekaj obratih smer vrtenja zamenjamo in opazimo, da se razmazana kapljica ponovno zbere. Malenkostna odstopanja od prvotne oblike so posledica difuzije barvila. Poskus jasno kaže, da se sistem z recipročnim gibanjem (takim, ki gre najprej v eno smer, potem pa po isti poti nazaj), vrne v začetni položaj.



Slika 2. Prikaz obrata časa pri nizkih Reynoldsovih številih. Če smer vrtenja obrnemo, se tekočina »odmeša« in vrne v začetno stanje.

Purcellov izrek

Ugotovitev, da pripelje recipročno gibanje pri nizkih Reynoldsovih številih sistem nazaj v prvotni položaj, ima zanimiv pomen. Pomeni namreč, da za plavanje (premikanje naprej) recipročni ponavljajoči se gibi niso dovolj. Ne glede na to, kakšne gibe dela plavalec, dokler so gibi recipročni, plavalec v povprečju ostane na istem mestu. Te ugotovitve je sistematično povzel nobelovec E. M. Purcell, ki je v svojem danes že legendarnem predavanju opisal pomen nerecipročnosti za premikanje v režimu nizkih Reynoldsovih števil [7]. Postavil je izrek – danes ga imenujemo Purcellov izrek – ki pravi, da je za plavanje v režimu nizkih Reynoldsovih števil treba izvajati nerecipročne gibe.

Preden preidemo na primere nerecipročnega gibanja, si oglejmo primer povsem recipročnega gibanja. Gre za gibanje školjke pokrovače. Te školjke so sestavljene iz dvodelne trdne lupine, med katerima je sklep, ki omogoča odpiranje in zapiranje delov lupine. Ker se lahko lupina le odpira ali zapira, je njen zamah vedno recipročen. Po Purcellovem izreku taka školjka v zelo viskozni tekočini ne more plavati. Prav tako ne bi mogla plavati, če bi jo pomanjšali na mikrometrsko skalo, saj bi tudi na ta način prešla v režim nizkih Reynoldsovih števil. Vendar školjke živijo v vodi in Reynoldsovo število za njihovo plavanje navadno dosega vrednosti okoli nekaj 1000.

Mikroplavalci iz narave

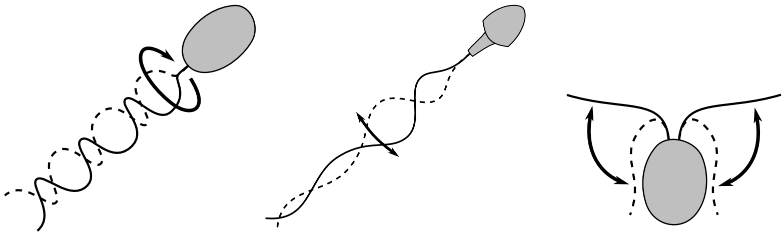
V naravi najdemo veliko primerov plavalcev, ki plavajo v režimu nizkih Reynoldsovih števil. Skupna značilnost tega izredno pestrega in številnega sveta mikroorganizmov je, da se morajo gibati nerecipročno, če se želijo premakniti z mesta. Oglejmo si nekaj najpogostejših oblik nerecipročnega gibanja.

Prokariontski bički

Preprosti enoceličarji za premikanje uporabljajo bičke. To so zelo tanki (okoli 15 nm) in razmeroma dolgi (okoli 10 µm) votli izrastki iz celice, ki so vrtljivo vpeti v celično membrano. Z rotacijskim molekularnim motorjem organizmi biček sučejo in vrtenje bička spominja na vrtenje vijaka (slika 3, levo). Če ima organizem več bičkov (npr. salmonela), bički med plavanjem oblikujejo snop in se skupaj vrtijo v obliki vijačnice. Do nerecipročnosti pri gibanju pride zaradi vijačnosti vrtečega se bička. Vrtenje bička v eno smer namreč poteka po drugi poti kot vrtenje bička v nasprotno smer – podobno kot vrtenje vijaka v eno in drugo smer enkrat pomeni privijanje, drugič pa odvijanje. Hitrosti, ki jih dosegajo mikroorganizmi z vrtenjem bičkov, dosegajo vrednosti okoli 100 µm/s, kar je lahko tudi nekaj deset telesnih dolžin na sekundo. Za primerjavo, ljudje plavamo s hitrostmi do ene telesne dolžine na sekundo.

Evkariontski bički

Čeprav nosijo enako ime, so bički evkariontov povsem drugačni od bičkov prokariontov, tako po strukturi kot tudi po načinu gibanja in mehanizmu premikanja. So daljši in debelejši, dolgi tipično okoli 100 µm, njihov premer pa je 250 nm. Za razliko od prokariontskih bičkov so sestavljeni iz posameznih dolgih struktur (mikrotubulov) in v celoti ležijo znotraj celične membrane [4]. Evkariontski bički se ne sučejo, ampak upogibajo. To dosežejo tako, da vlakna, med katerimi so molekularni motorji, drsijo drugo



Slika 3. Levo: bakterija suče spiralno zavit biček in tako zagotavlja nerecipročnost periodičnega gibanja. Sredina: evkariontski bički (npr. pri spermijih) se upogibajo. Desno: zelena alga plava z dvema bičkoma.

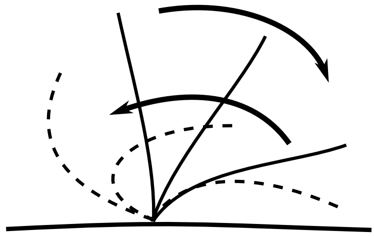
mimo drugega. Biček se izmenično upogiba v eno in drugo stran in ker pot, po kateri se biček giblje znotraj enega zamaha, ni recipročna, pride do asimetrije v gibanju (slika 3, sredina).

Primeri evkariontske celice z bičkom so spermiji, ki plavajo s hitrostmi okoli 50 µm/s. Zanimiva je tudi zelena alga *Chlamydomonas reinhardtii*, ki ima dva bička. Ta dva bička se ne združita v snop, ampak se simetrično gibljeta, pri čemer njuno gibanje spominja na zamah pri prsnem plavanju (slika 3, desno).

Evkariontske migetalke

Migetalke so po svoji strukturi enake evkariontskim bičkom, le da so tipično krajše, njihovo število pa je zelo veliko, na celici jih je več sto ali celo več tisoč. Najdemo jih tako pri enoceličarjih (npr. na parameciju) kot tudi pri človeku (npr. v sapniku in v jajcevodih). Enoceličarji uporabljajo migetalke za premikanje, v mnogoceličarjih, kjer so celice vpete v večja tkiva, pa migetalke ob površini ustvarjajo tekočinski tok.

Tudi migetalke se upogibajo z relativnim drsenjem mikrotubulov, vendar je njihovo gibanje precej bolj zapleteno. V grobem pravimo, da je sestavljeno iz dveh delov: zamaha in povratka. V času zamaha je migetalka razmeroma toga in se giblje v ravnini, ki je pravokotna na površino celice, ob povratku pa se zmehča, upogne in se ob površini vrne v začetno stanje (slika 4). Na ta način doseže potrebno asimetrijo gibanja. Ker je migetalk na površini celice zelo veliko, se morajo vse premikati v pretežno isto smer. Bilo bi namreč zelo neučinkovito, če bi vsaka črpala tekočino v svojo smer, pa še zatikale bi se druga v drugo.



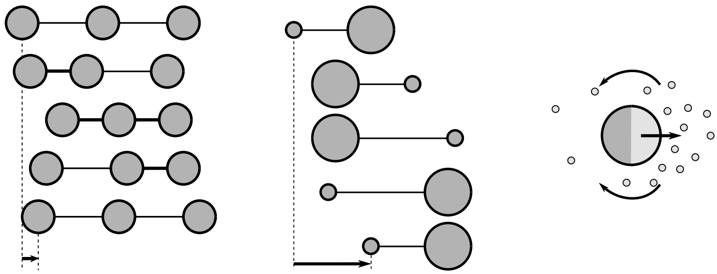
Slika 4. Gibanje migetalk opišemo z dvema deloma: zamah (polna črta) in povratek (črtkana črta).

Primeri iz laboratorija

Ob proučevanju različnih mehanizmov plavanja mikroorganizmov so raziskovalci prišli na zamisel, da bi sami ustvarili umetne mikroplavalce. Premikali bi se podobno kot naravni, vendar bi bilo njihovo plavanje nadzorovano, delovanje pa funkcionalizirano. Možnosti potencialne uporabe je zelo veliko, na primer v medicini za nosilce zdravil na točno določeno mesto v telesu ali pri varovanju okolja, saj bi lahko avtonomno in ciljano čistili vodo ali zemljo, ter v senzoriki, saj bi lahko na določenih mestih zaznavali prisotnost drugih snovi ali mikroorganizmov. Po drugi strani lahko iz poskusov z nadzorovanimi umetnimi plavalci sklepamo na delovanje in hidrodinamiko živih mikroorganizmov [2].

Skupna lastnost vseh umetnih mikroplavalcev je pretvarjanje energije, ki jo nekako dovajamo v sistem iz okolice, v usmerjeno premikanje. Načinov, kako mikroplavalcu dovajamo energijo, je veliko. Lahko vzpostavimo gibanje z magnetnim poljem, električnim poljem, lahko to naredimo optično ali akustično, lahko se premikajo s pomočjo kemičnih reakcij. Poleg tega obstaja še veliko teoretičnih predlogov za plavalce, ki se osredotočajo na sam mehanizem plavanja in se ne sprašujejo, kako tako gibanje realizirati.

Povečano zanimanje za umetne mikroplavalce se je začelo pred skoraj 15 leti z objavo teoretičnega modela plavalca, sestavljenega iz niza treh kroglic [6]. Model je zelo preprost: tri kroglice, ki so s sosednjo kroglico povezane z vezjo spreminjajoče se dolžine (slika 5, levo). Za premikanje se najprej skrči denimo leva vez, nato se skrči desna, sledi podaljšanje leve in cikel se zaključi s podaljšanjem desne. Gibanje plavalca je periodično, a zaradi asimetrije vodi do premika v desno. Kadar kroglice ne ležijo na isti premici, ampak je med vezema neki kot, plavalec kroži. Podobno preprost je model, ki ima sicer samo dve kroglici in eno vez (slika 5, sredina), vendar vpelje potrebno asimetrijo z izmeničnim spreminjanjem velikosti kroglic in dolžine vezi [1]. To je sicer teoretično zelo lep primer, vendar izredno težko uresničljiv.



Slika 5. Različni teoretični modeli za mikroplavalce, za vse je značilna asimetrija. To je lahko asimetrija zaradi načina gibanja (levo), velikosti kroglic (sredina) ali kemične aktivnosti (desno).

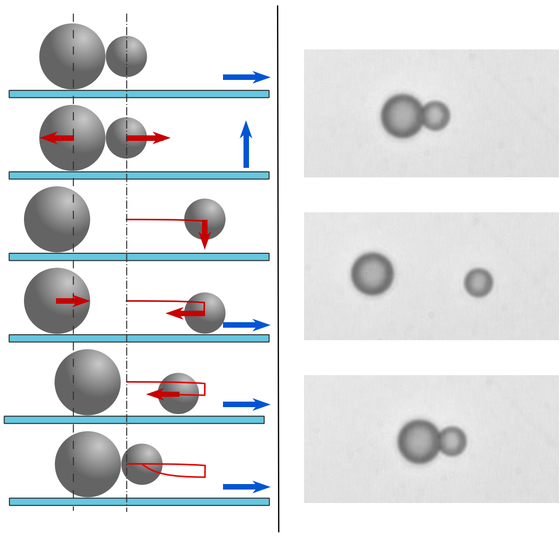
Praktično bolj uresničljivi so tako imenovani kemični plavalci, ki so zadnji teoretični model, ki ga bomo predstavili. Tudi tu je ideja razmeroma preprosta: plavalec je asimetričen, tako da le na eni strani poteka kemična reakcija. Zaradi osmoze pride do prenosa snovi v področja z manjšo koncentracijo in posledično do premika kroglice naprej (slika 5, desno).

Prvotni in še danes najbolj široko obravnavni umetni mikroplavalci so prav kemični plavalci. To so lahko podolgovati delci, na eni strani iz zlata in na drugi iz platine, lahko pa tudi navadne polistirenske kroglice, ki so na eni strani oblečene v platino. V vodni raztopini vodikovega peroksida poteka kemična reakcija, vodikov peroksid v prisotnosti platine razpade na vodik in kisik, in razlika v koncentraciji kemijskih produktov vodi do tako imenovane difuzoforeze.

Zanimivi so tudi plavalci, ki jih poganjamo z zunanjim magnetnim poljem. V začetku so bili taki plavalci pravzaprav hibridni: na rdeče krvničke so pripeli verigo magnetnih kroglic, ki so jih z magnetnim poljem upogibali in poustvarili gibanje bička [3]. Kasneje so izdelali tudi nanostrukturirane vijačne strukture, podobne prokariontskim bičkom, jih z zunanjim magnetnim poljem sukali in tako dosegli premikanje mikroplavalcev. Omenimo še preprostejše plavalce, sestavljene iz samo majhnega števila kroglic, ki se v izmeničnem polju prekopicujejo po površini in na ta način premikajo [5].

Ljubljanski mikroplavalci

Raziskovalci z Instituta »Jožef Stefan« in Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani smo že vrsto let aktivni na področju raziskav plavanja pri nizkih Reynoldsovih številih. Ustvarili smo magnetno krmiljene umetne migetalke [9], nedavno pa tudi umetne plavalce [8]. Ti mikroplavalci so krmiljeni z zunanjim magnetnim poljem, za doseganje asimetrije pa potrebujejo bližino površine. Mikroplavalci so sestavljeni iz dveh različno velikih superparamagnetnih kroglic. To pomeni, da je v odsotnosti zunanjega magnetnega polja magnetizacija v kroglicah enaka nič in med kroglicama ne deluje magnetna sila. Ko vklopimo zunanje polje, se v kroglicah pojavi magnetizacija, ki je po velikosti sorazmerna magnetnemu polju in vzporedna z njim. S spreminjanjem smeri polja lahko med dvema kroglicama dosežemo privlačno ali pa odbojno dipolno magnetno silo.



Slika 6. Levo: mehanizem umetnih plavalcev, ustvarjenih v našem laboratoriju. S puščicami ob desnem robu je označena smer magnetnega polja, puščice na kroglicah pa označujejo smer premikanja kroglice ob danem trenutku. Desno: fotografija plavalca pod mikroskopom. Polmer večje kroglice je 2,3 µm.

Opišimo podrobneje mehanizem premikanja (slika 6). Začnimo s kroglicama, ki se dotikata. Z odbojno silo potisnemo kroglici narazen, nato pa s privlačno silo znova skupaj. Tako gibanje je na prvi pogled povsem recipročno. Vendar se moramo zavedati, da na kroglici deluje viskozni upor, ki v bližini površine močno naraste. Oddaljenost velike kroglice od površine se med ciklom ne spreminja, manjša kroglica pa je na začetku cikla bolj oddaljena od površine kot na koncu, saj ji vmes dopustimo, da se posede. Med oddaljevanjem kroglic je tako sila na manjšo kroglico znatno manjša od sile upora na kroglico med približevanjem, kar vodi do asimetrije in do premika plavalca.

Hitrost plavanja je seveda močno odvisna od dolžine posameznega cikla. Pri zelo dolgem ciklu je hitrost plavanja razumljivo majhna, saj posamezen korak predolgo traja. Pri zelo veliki frekvenci korakov pa hitrost znova pade, saj majhna kroglica nima časa potoniti do dna in je zato razlika med uporom v eno in drugo smer praktično zanemarljiva. Med obema režimoma najdemo optimalno plavalno hitrost.

Zaključek

Svet umetnih mikro- in tudi nanoplavalcev dobiva vedno nove člane, tako teoretične modele kot tudi eksperimentalne izvedbe. Za zdaj je njihova uporabnost še omejena zaradi razmeroma zapletenih tehničnih zahtev, so pa že zelo razširjeni v osnovnih raziskavah. Z njimi proučujemo hidrodinamske pojave, medsebojne vplive plavalcev, zbiranje plavalcev v gruče, ločevanje delcev na podlagi njihovih plavalnih sposobnosti in podobno. Nedvomno bomo o mikroplavalcih še brali.

LITERATURA

[1] J. E. Avron, O. Kenneth in D. H. Oaknin, *Pushmepullyou: an efficient microswimmer*, New J. of Phys. **7** (2005), 234.

[2] C. Bechinger, R. di Leonardo, H. Löwen, C. Reichhardt, G. Volpe in G. Volpe, *Active particles in complex and crowded environments*, Rev. Mod. Phys. **88** (2016), 045006.

[3] R. Dreyfus, J. Baudry, M. L. Roper, M. Fermigier, H. A. Stone in J. Bibette, *Microscopic artificial swimmers*, Nature **437** (2005), 862.

[4] H. Lodish et al., *Molecular Cell Biology*, 4th Edition, W. H. Freeman, New York, 2000.

[5] H. Morimoto, T. Ukai, Y. Nagaoka, N. Grobert in T. Maekawa, *Tumbling motion of magnetic particles on a magnetic substrate induced by a rotational magnetic field*, Phys. Rev. E **78** (2008), 021403.

[6] A. Najafi in R. Golestanian, *Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres*, Phys. Rev. E **69** (2004), 062901.

[7] E. M. Purcell, *Life at low Reynolds number*, Am. J. Phys. **45** (1977), 3–11.

[8] M. Vilfan, N. Osterman in A. Vilfan, *Magnetically driven omnidirectional artificial microswimmers*, Soft Matter **14** (2018), 3415.

[9] M. Vilfan, A. Potočnik, B. Kavčič, N. Osterman, I. Poberaj, A. Vilfan in D. Babič, *Self-assembled artificial cilia*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **107** (2010), 1884.

[10] *Drag coefficient*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient`, ogled 7. 11. 2018.

Plemljeva recenzija predelav Močnikovih učbenikov

Dopisi ministrstva za verske zadeve in šolstvo

Ministrstvo za uk in bogočastje Dunaj, 22. julija 1910
Z. 31. 047
Močnik – Zahradniček, Arithmetik.

Njegovemu blagorodju, gospodu rednemu profesorju
na c. kr. univerzi
Dr. Jožefu Plemlju

v
ČERNOVCIH.

V prilogi posredujemo Vašemu blagorodju primerek knjige: Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die V.–VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. Bearbeitet von Dr. Karl Zahradniček, 31. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage. Wien 1910, F. Tempsky, cena 3K 50 g, vezana 4 K, skupaj s primerkom prejšnje izdaje za primerjavo in z učnim načrtom za Realne gimnazije, z željo, da v ustreznem roku na podlagi poslanega izdelate strokovno mnenje o primernosti knjige za pouk na gimnazijah in realnih gimnazijah z nemškim učnim jezikom.

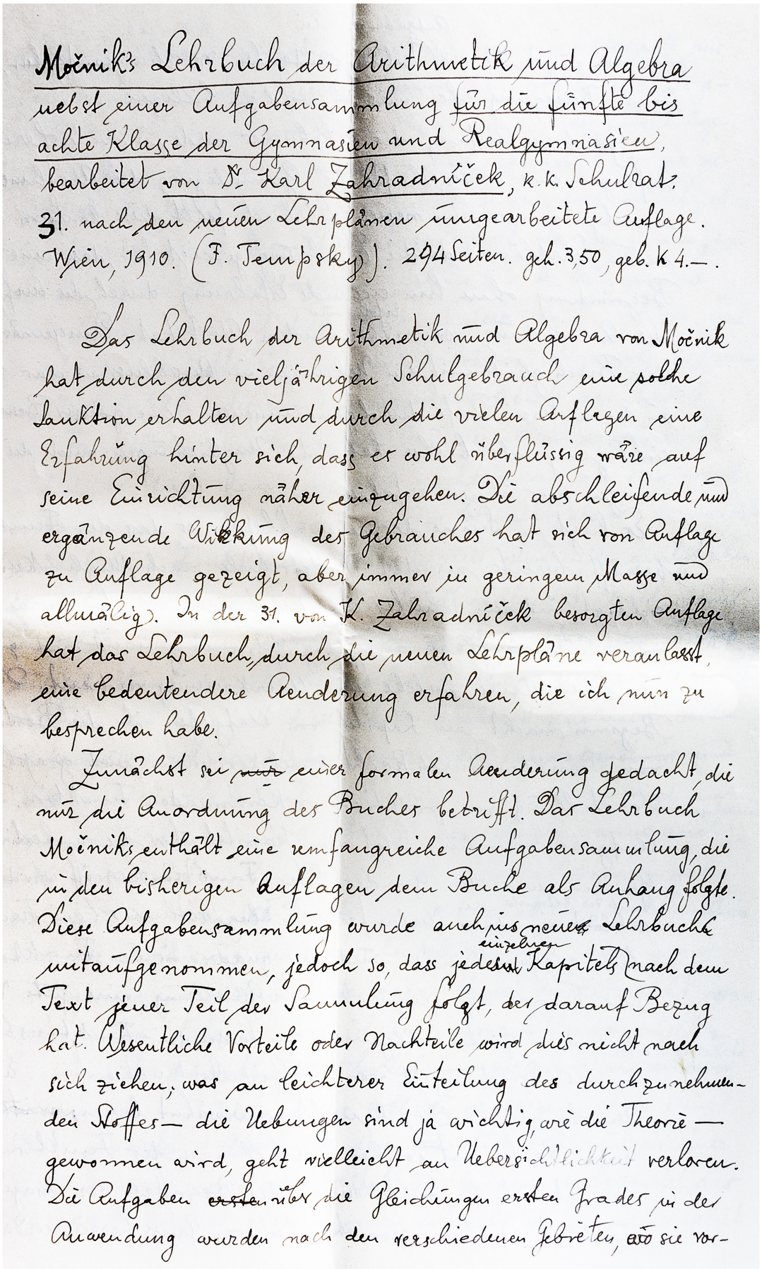
Za ministra za uk in bogočastje: nečitljiv podpis

Obenem so mu poslali skoraj identičen dopis 31. 049, v katerem so prosili za recenzijo učbenika:

Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die V.–VII. Klasse der Realschulen. Bearbeitet von Dr. Karl Zahradniček, 30. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage. Wien 1910, F. Tempsky.

Prevajalčev komentar

17. septembra 1910 je Plemlju isto Ministrstvo poslalo ročno napisano pismo. Vsebuje podatke o obeh prej omenjenih knjigah in dopisih. Marko Razpet mi je prebral težko čitljivi del: v njem so ponovno želeli oceno. Upoštevati moramo, da je poleti Plemelj verjetno bil na Bledu in ga morda pošiljka v juliju sploh ni dosegla.



Močnik's Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die fünfte bis achte Klasse der Gymnasien und Realgymnasien, bearbeitet von Dr. Karl Zahradníček, k. k. Schulrat. 31. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage. Wien, 1910. (F. Tempsky). 294 Seiten. geh. 3,50, geb. K 4.—.

Das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von Močnik hat durch den vieljährigen Schulgebrauch eine solche Sanktion erhalten und durch die vielen Auflagen eine Erfahrung hinter sich, dass es wohl überflüssig wäre, auf seine Einrichtung näher einzugehen. Die abschleifende und ergänzende Wirkung des Gebrauches hat sich von Auflage zu Auflage gezeigt, aber immer in geringem Masse und allmälig. In der 31. von K. Zahradníček besorgten Auflage hat das Lehrbuch, durch die neuen Lehrpläne veranlasst, eine bedeutendere Aenderung erfahren, die ich nun zu besprechen habe.

Zunächst sei ~~nur~~ einer formalen Aenderung gedacht, die nur die Anordnung des Buches betrifft. Das Lehrbuch Močniks enthält eine umfangreiche Aufgabensammlung, die in den bisherigen Auflagen dem Buche als Anhang folgte. Diese Aufgabensammlung wurde auch ins neue Lehrbuch mitaufgenommen, jedoch so, dass jedem einzelnen Kapitel nach dem Text jener Teil der Sammlung folgt, der darauf Bezug hat. Wesentliche Vorteile oder Nachteile wird dies nicht nach sich ziehen; was an leichterer Einteilung des durchzunehmenden Stoffes — die Uebungen sind ja wichtig wie die Theorie — gewonnen wird, geht vielleicht an Uebersichtlichkeit verloren. Die Aufgaben ~~ersten~~ über die Gleichungen ersten Grades in der Anwendung wurden nach den verschiedenen Gebieten, ~~wo~~ sie vor-

Slika 1. Prva stran Plemljevega rokopisa.

Za obe knjigi je Plemelj v lepi pisavi in v nemščini napisal poročili (slika 1), ki žal ne nosita datumov. V rokopisih je več črtanj in vrinkov, tako da sklepam, da je sam ali kdo drug vse še enkrat prepisal ali pretipkal in poslal na Dunaj. Sledita prevoda celotnih poročil v slovenščino.

Recenziji

Močnikov učbenik aritmetike in algebre z zbirko nalog **za peti do osmi razred gimnazij in realnih gimnazij**, predelal **Dr. Karl Zahradníček**, c. kr. šolski svetnik. 31. po novih učnih načrtih predelana izdaja. Dunaj 1910. (F. Tempsky), 294 str., speta 3,50, vezana K 4.–.

Močnikov učbenik aritmetike in algebre je z dolgoletno uporabo v šolah doživel tako priznanje in ima z mnogimi izdajami za sabo toliko izkustev, da bi bilo res odveč podrobneje razpravljati o njegovi ureditvi. Od izdaje do izdaje je prišlo do brušenja in širjenja, a zmeraj v malem obsegu in postopoma. V 31. izdaji, ki jo dolgujemo K. Zahradníčku, je kot posledica novih učnih načrtov prišlo do pomembnih sprememb, ki jih moram zdaj komentirati.

Najprej se zadržimo pri formalni spremembi, ki zadeva ureditev knjige. Močnikov učbenik vsebuje obsežno zbirko nalog, ki je v dozdajšnih izdajah sledila knjigi kot dodatek. Ta zbirka nalog je bila privzeta tudi v novi učbenik, vendar tako, da v vsakem posameznem poglavju po besedilu sledi ustrezni del nalog. Bistvenih prednosti ali slabosti to ne bo povzročilo; kar dobimo z lažjo razdelitvijo snovi – vaje so seveda pomembne, tako kot teorija – izgubimo morda pri preglednosti. Uporabne naloge iz enačb prve stopnje so razdeljene na različna področja, npr. naloge o delitvah, o mešanju, obrestih, gibanju itd. To lahko brez težav sprejmemo.

Takoj na začetku učbenika je bila v dosedanjih izdajah obravnavana znanstvena podlaga aritmetike. V novem učbeniku to manjka, skladno z novimi učnimi načrti, ker so izkušnje pokazale, da ima taka utemeljitev brez zadostnega izkustva z uporabo in nalogami malo uspeha in trajne vrednosti. Tako knjiga začne takoj z vajami iz snovi, ki je bila na programu že na nižji stopnji. Večji poudarek kot zdaj imajo neenačbe in vse, kar izvira iz njih.

V smislu novih učnih načrtov je, da pojem funkcije po možnosti obravnavamo že v srednji šoli in da ga šolarji usvojijo. To je bilo v novi izdaji močno upoštevano, in sicer na način, ki zasluži priznanje. Začetek je poglavje z nalogami o določitvi točk s pravokotnimi koordinatami in z grafično upodobitvijo funkcij, ki nastopajo v praksi. Ta zbirka nalog sledi poglavju o nedoločeni enačbi prve stopnje. Pojem funkcije je razložen dalje s primeri poteka logaritmične funkcije pri logaritmih in kvadratne funkcije pri teoriji kvadratnih enačb, kar je dobra vaja za poznejši splošni pojem funkcije, potreben pri izpeljevanju odvoda.

Ne bi rad, da ostane brez omembe naslednje dejstvo. V vrsti s takimi prikazi poteka funkcij najdemo tudi vpeljavo pojma imaginarnih števil in njihove geometrične reprezentacije, ki izvira od Gaussa. Z dvakratnim množenjem z »rotacijskim faktorjem« naj bi iz enega poltraka nastal nasprotno usmerjen poltrak, od koder se ta »rotacijski faktor« izkaže kot imaginarna enota. Tak nastanek imaginarnega je tako izumetničen, da ga nikdar ne smemo dati na vrh kot definicijo, saj zmeraj lahko šele a posteriori določene multiplikativne lastnosti imaginarnih količin dobijo geometrijski pomen in nikoli ne bi človek na ta pojem zadel na tak način. Geometrična interpretacija imaginarnih količin je vendar uspešna šele na področju Teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke, ki je daleč od nivoja srednje šole; na tej stopnji ne more povzročati drugega kot zmedo, saj poskuša doseči nekaj povsem drugega, kot je dajanje geometričnega pomena funkcijske odvisnosti, na primer v analitični geometriji, pristop pa je zelo podoben. Po mojem mnenju srednješolcu za definicijo povsem zadošča ohranjanje računskih zakonov, od geometričnega pomena pa bi se na tej stopnji distanciral.

Geometrični potek logaritemske linije je predstavljen na dveh slikah v 9. razdelku, od koder nazorno pridemo tudi do upravičitve interpolacijskih postopkov. Za dejstvo, da je upodobitev kvadratne funkcije in rešitev kvadratnih enačb v pouku za[1] gotovo daleč ležečim področjem logaritmov, pa ne morem najti upravičenosti; zgodovinski razvoj je potekal v obratnem vrstnem redu in zato bi moral tudi pedagoški proces potekati v drugačnem vrstnem redu.

Če prvih 10 razdelkov staro snov prinaša v nekoliko drugačni, modernejši predstavitvi, pa pomenijo 11., 12. in 13. poglavje resničen prirastek, novo področje. Gre za vpeljavo limit in od tod odvodov in integrala. S temi stvarmi naj bi poskusili na srednji šoli. Po sistematični obravnavi pojma funkcije, kot je videti uresničena v knjigi, srednješolcu ne bo težko usvojiti pojma odvoda; tako se odpre področje, ki velikemu deležu šolarjev resnično ponuja nekaj zanimivega in razgled na matematične probleme izredno razširi. Z na novo usvojenim omogočimo šolarju pregled nad potekom krivulj, največjimi in najmanjšimi vrednostmi funkcij itd.; stvarmi, ki so v knjigi našle zelo enostavno in lahko razumljivo predstavitev. Dvanajsto poglavje vsebuje integral, definiran z določitvijo ploščine z infinitezimalnimi trakovi. Pokazano je, da je odvajanje nasprotna operacija, s čimer je dana možnost izračuna integrala v mnogih primerih. Poglavju so dodane ustrezne naloge.

[1] Op. prevajalca: V osnutku piše pravzaprav »pred«, a gre tu gotovo za spodrsljaj.

V učnih predpisih poglavje o integralu ni vključeno; po vpeljavi odvoda pa se je tako bližnjim vprašanjem komaj mogoče izogniti, še toliko manj, ker so že do zdaj v fiziki in geometriji jemali integracijo, čeprav v skriti in izumetničeni obliki. Trinajsti razdelek je namenjen binomskemu stavku. S postopkom razvoja po nedoločenih koeficientih je izpeljan ta stavek za pozitivne eksponente z odvajanjem. Iz binomskega stavka je na običajen način izpeljana vrsta za število e, s tem pa dobimo tudi možnost za odvajanje logaritma. V tem poglavju najdemo tudi vrsto za logaritem, dobljeno z integracijo; s tem pa se zdi, da je zapolnjena vrzel v računanju logaritmov, ki se ji je knjiga prej popolnoma izognila. Tako daleč pa bi pri pouku komajda lahko prišli.

Močnikov učbenik aritmetike in algebre z zbirko nalog **za 5. do 7. razred realnih šol**. Predelal **Dr. Karl Zahradníček**, c. kr. šolski svetnik. 30. po novih učnih načrtih predelana izdaja. Dunaj 1910. (F. Tempsky), 306 str. 8°. Cena speta K 4.– vezana K 4.50.

Natančna primerjava tega učbenika s knjigo za gimnazije in realne gimnazije, ki izvira od istega avtorja: **Močnikova Aritmetika in Algebra** je pokazala, da sta do zadnjih 8 strani oba učbenika dobesedno ista. Za realne šole namenjena knjiga je za 8 zadnjih strani (295–306) obsežnejša od tiste za gimnazije. Teh zadnjih osem strani obravnava probleme rent in življenjskih zavarovanj na podlagi verjetnosti, izhajajočih iz tablic umrljivosti, ker so tem temam v realnih šolah dali večjo pozornost. Knjiga vsebuje tabele umrljivosti po Florencourtu za starost od 0–20 let in tiste, ki sta jih sestavila Zillmer in Riem za leta 17–90. Uporaba tabel je razložena v številnih nalogah.

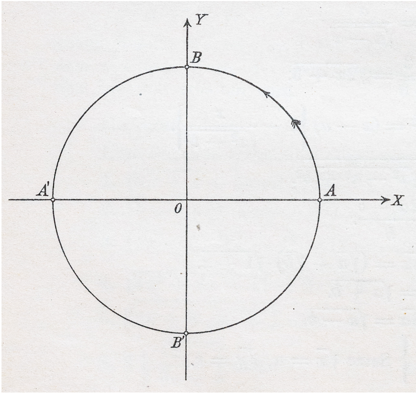
Popolno ujemanje obeh učbenikov in učnih predpisov pomeni, da je posebna obravnava te knjige odveč; vse povedano pri oceni gimnazijskega učbenika velja tudi za to knjigo. Po mojem mnenju bi resnično lahko 8 strani dolgo zbirko nalog vključili v oba učbenika in bi tako imeli za višje razrede srednjih šol skupen učbenik,

Prof. Dr. Jos. Plemelj

Prevajalčev zaključni komentar

Kot lahko sami vidite, je bil Plemelj v nemščini pravi stilist.

V arhivu najdemo tudi Plemljevo pismo ministrstvu, v katerem se opravičuje, da je založil knjige nekih drugih avtorjev, ki so mu jih poslali v oceno, še toliko bolj, ker je njegova ocena negativna. Vendar je tudi v tem primeru



Slika 2. Kompleksna ravnina.

na koncu oceno le oddal. Profesor Ivan Vidav mi je nekoč dejal, da Plemelj ni bil človek z veliko energije. Po tem, kar sem videl, je bil navajen oddati le res izpiljene izdelke. Tako morda laže razumemo tako zamudo.

Za tako Plemljevo vedenje pa je morda še en razlog. V Matematični knjižnici najdemo izdaji omenjenih učbenikov iz leta 1911, torej verjetno po Plemljevi recenziji. Plemljeva kritika v tej izdaji očitno ni bila upoštevana: kvadratna funkcija in enačba sta še zmeraj za eksponentno funkcijo in logaritmom.

Prav tako je ostala vpeljava kompleksnih števil kot točk v ravnini, ki gre v knjigi takole. Narišemo pravokotni koordinatni sistem. Točke na osi x predstavljajo običajna števila: desno od izhodišča pozitivna, levo negativna (slika 2). Odsek OA' dobimo iz odseka OA z vrtenjem za 180° okrog izhodišča O ali z množenjem z -1. Če dvakrat zavrtimo OA okrog O za iztegnjeni kot, dobimo spet nazaj OA – ali: dvakratno množenje z -1 nič ne spremeni. Odsek OB dobimo iz $a = OA$ z vrtenjem za 90 stopinj okrog O ali z množenjem z (neznanim) faktorjem f. Če dvakrat zavrtimo OA okrog O, dobimo $OA' = -a$, torej $af^2 = -a$ in od tod $f^2 = -1$ in $f = \pm\sqrt{-1}$. Označimo $\sqrt{-1} = i$ in i imenujemo imaginarna enota.

Plemelj v recenziji ne omenja, da učbenika vsebujeta tudi obsežno obravnavo kombinatorike. Le bežno omeni verjetnost. Knjigi pa vsebujeta kar precej verjetnostnega računa.

Mimogrede, drugi učbenik vsebuje precej šokantno dejstvo. Iz Florencourtovih tabel umrljivosti sledi, da takrat več kot četrtina novorojenih otrok ni dočakala prve obletnice rojstva.

Peter Legiša

MaRS 2018

Med 5. in 11. avgustom je letos na Mariborskem Pohorju potekal trinajsti tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Člani posadke smo zase in za pred taborom še zelene Marsovce za letošnje zavetišče izbrali Center šolskih in obšolskih dejavnosti Planinka. Ta nam je 890 metrov nad morjem vsaj zvečer nudil oddih od mestne vročine. Zaradi novoustanovljenih projektov za nadarjene RaST in SKOZ je bilo oglaševanje tabora učinkovitejše, srednješolcem pa smo lahko tabor nudili brezplačno. Oboje je privedlo do večjega števila udeležencev, to pa do širjenja posadke. Sestavljali smo jo dr. David Gajser (IMFM in II. gimnazija Maribor) kot odgovorna oseba, vodja tabora Žan Hafner Petrovski (študent UL FMF), drugi člani organizacijske posadke pa so bili Rok Havlas, Nina Štempelj, Jakob Svetina, Jakob Jurij Snoj, Petra Podlogar (vsi študentje UL FMF), Vid Kocijan (študent University of Oxford), Rok Gregorič (doktorski študent University of Texas at Austin), Klara Drofenik (študentka UL FMF in UL FRI) ter David Popovič (študent University of Cambridge). Skupaj s srednješolci nas je bilo kar 41.

Matematične teme, ki smo jih pripravili mentorji (člani posadke), so bile, kot vsa leta doslej, rdeča nit tabora MaRS. Srednješolci so bili razdeljeni v skupine po tri, raziskovalno delo vsake skupine pa je vodil en mentor. V času tabora smo se s projekti ukvarjali nekaj manj kot 20 ur, v tem času so se udeleženci spoznali s snovjo, ki presega učne načrte srednjih šol, z

Skupinska slika

malo truda pa nudi prijeten občutek razširjanja matematičnega obzorja. V večini primerov je potrebnega nekaj časa, da se novi pojmi v naših mislih postavijo na pravo mesto, potem pa snov zares razumemo, še bolj učinkovito pa je, če jo sami ubesedimo in umestimo v članek. Vsaka skupina je zato o svoji temi napisala članek in pripravila predstavitev za starše in druge obiskovalce zaključne prireditve. Da smo lahko članke korektno napisali, smo se na posebni delavnici naučili osnov pisanja matematičnih izrazov v programskem jeziku LaTeX.

Pri enem izmed projektov so se ukvarjali z različnimi tipi neskončnosti. Pokazali so, da poleg števne neskončnosti obstaja še neskončno mnogo drugih neskončnosti. Za občutek, kot primer množice s števno neskončno elementi navedimo naravna števila. Pri nekem drugem projektu pa so razmišljali o številu svojih prijateljev in kako to, da imamo ljudje v povprečju manj prijateljev od svojih prijateljev. Ta fenomen se imenuje paradoks prijateljstva, z znanjem o sredinah in teoriji grafov so ga tudi dokazali. Več o projektih najdete na spletnem naslovu `mars.dmfa.si/projekti/`.

Osrednjo dvodnevno delavnico z naslovom »Kaj nam matematika lahko pove o veselju do dela, študija, raziskovanja in kako lahko to doživimo?« so v treh delih pripravili dr. Drago Bokal (UM FNM), dr. Janja Jerebic (UM FOV) in sin Gregor Bokal. Ob prepletu matematike, psihologije in računalništva nam je dr. Drago Bokal predstavil matematično modeliranje, verjetnostno metodo Monte Carlo in njene uporabe. Skupaj s sinom sta nam predstavila svojo igro Čebelarski turnir. Naslednji dan nam je dr. Janja Jerebic predavala še o teoriji grafov in se pri tem navezala na predstavljeno igro.

Tri večere so nam popestrili gostujoči predavatelji. Prvi je nastopil dr. Marjan Jerman, ki je pripravil predavanje o matematiki starih civilizacij. Izvedeli smo, kakšne številske sisteme so uporabljali stari Egipčani in Babilonci, kako so reševali enačbe in kaj so egipčanski ulomki. Sledilo je predavanje Alejandre Ramos Rivera, ki nas je naučila osnov Ramseyjeve teorije in tega, da je popoln nered nemogoč. Pokazala nam je primere iz teorije grafov, kombinatorike in teorije števil. Zadnje večerno predavanje, ki ga je pripravil dr. Jure Kališnik, nam je utrlo pot v svet različnih geometrij. Razlagal nam je o sferični geometriji in povedal, kako pojme, ki so nam v evklidski geometriji naravni, definiramo tudi v splošnejših prostorih.

Da nam kljub vsakodnevni jutranji telovadbi med vesoljsko odpravo ne bi propadlo telo, smo v sredo dopoldne odšli na pohod po Pohorju. Postanek smo naredili pri zgornji postaji Pohorske vzpenjače, od koder smo imeli v sončnem vremenu lep razgled na Maribor. Za petkovo popoldne pa je bila pripravljena tradicionalna Velika MaRSovska avantura. Poleg dijakov, ki so nastopali v enakih skupinah kot pri projektih, se je avanture udeležilo tudi nekaj skupin povabljenih bivših Marsovcev. Z navodili oboroženi so se odpravili na pot in na kontrolnih točkah srečevali mentorje z različnimi matematičnimi in praktičnimi nalogami.

Naš urnik je bil sicer naporen, a hkrati dovolj pester in misli spodbujajoč, da je bilo vzdušje na taboru odlično. V prostem času smo se družili ob različnih družabnih igrah, košarki in nogometu ali pa zgolj poležavali v okolici doma. Zadnji večer sta po razglasitvi rezultatov avanture sledila še piknik ter druženje dolgo v noč.

V imenu celotne ekipe se zahvaljujem vsem, ki so srečanje omogočili: DMFA Slovenije, projekta RaST in SKOZ, ki ju sofinancirata Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada in Republika Slovenija, Mestna občina Ljubljana, UL FMF, UM FNM, UP FAMNIT in Čokoladnica Carniola.

Žan Hafner Petrovski

Glasbenik se v zreli starosti prelevi v matematika

Američan Robert Peter Schneider (rojen 1971) je v mladih letih pustil univerzo in si ustvaril uspešno kariero kot pop glasbenik in glasbeni producent. Med tem delom se je okrog leta 2010 vrnil k študiju na Univerzi Kentucky in leta 2012 ob usmeritvi v matematiko diplomiral. Že pred tem je eksperimentiral z novimi, originalnimi glasbenimi lestvicami in novimi načini ustvarjanja elektronske glasbe. Star več kot štirideset let se je po diplomi oglasil na Univerzi Emory, kjer je za njegove ambicije pokazal razumevanje le nekaj let starejši znani matematik (in triatlonec) Ken Ono. Morda tudi zato, ker je Ken Ono sam najprej zasledoval športno kariero in se je na univerzo vpisal z zamudo. (V Indiji profesorja Ona po [4] otroci radi zamenjuejo z Jackiejem Chanom, mojstrom borilnih veščin in znano zvezdo »karate« filmov.) Schneider je opustil glasbene nastope in – skoraj neverjetno – maja 2018 z Onom kot mentorjem obranil disertacijo s področja teorije števil. (Kot mentor študentom, ki so se po več letih vrnili dokončat študij matematike, vem, kako težko jim je bilo opraviti manjkajoče obveznosti.) Schneider ima zdaj spodobno bibliografijo in je že nekaj mesecev po doktoratu dobil mesto predavatelja na sosednji univerzi.

Intervju z njim lahko poslušate ali si naložite na priljubljenem ameriškem podkastu *Undiscovered* [1]. Pravzaprav so si posnetek Američani izposodili od avstralske radijske serije *Sum of All Parts* [2].

Intervju govori tudi o Schneiderjevem občudovanju indijskega genija Srinivasa Ajangarja Ramanudžana (1887–1920). Schneider je o njem sam ali pa v sodelovanju napisal več člankov. Njegov mentor Ono je sodeloval pri filmu *Mož, ki je poznal neskončnost* o Ramanudžanu. Med drugim zato, ker je na njegovo odločitev za študij po [4] odločilno vplivalo pismo Ramanudžanove žene njegovemu očetu, japonsko-ameriškemu matematiku. Vdova se je očetu zahvalila za počastitev spomina na Ramanudžana. Pismo zelo stare gospe je sicer zadržanega očeta ganilo do solz.

Posebej zanimiv je daljši Schneiderjev članek [3] o založeni Ramanudžanovi beležnici, ki bi leta 1969 kmalu končala na ognju med drugo zapuščino profesorja, ki naj bi ta material obelodanil, pa očitno ni vedel, kaj bi z njim. Šele sedem let kasneje jo je po spletu naključij dobil v roke ameriški matematik George Andrews, ki je bil na krajšem obisku in je bil menda takrat skoraj edini, ki je bil sposoben razumeti njeno pomembnost. Rezultati iz beležnice (pravzaprav sešitih listov papirja), ki jih je bolni Ramanudžan napisal zadnje leto svojega življenja, so bili še zmeraj tako originalni, da so postali katalizator novih, pomembnih odkritij. Schneider v članku govori s tremi matematiki, vpletenimi v zgodbo. Ti povejo, da je bil majhen delež Ramanudžanovih rezultatov tudi napačen, a njegov vpogled je bil neverjeten in daleč pred časom.

LITERATURA

[1] Undiscovered Podcast: Guest Episode: The Infinite God `www.wnycstudios.org/story/guest-episode-infinite-god`, ogled 3. 12. 2018.

[2] Australian Broadcasting Corporation, Sum Of All Parts, `www.abc.net.au/radionational/programs/sum-of-all-parts/`, ogled 3. 12. 2018.

[3] R. Schneider, Uncovering Ramanujan's »lost« notebook: an oral history, *Ramanujan Journal*, 2012, 22 str., `www.mathcs.emory.edu/~rpschne/ram_hist.pdf`, ogled 3. 12. 2018.

[4] R. Schneider in B. Phelan, *Encounter with the infinite, The Believer*, 2015, `believermag.com/encounter-with-the-infinite/`, ogled 3. 12. 2018.

Peter Legiša

Petindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Kot že nekaj let zapored je v Blagoevgradu v Bolgariji tudi letos od 22. do 28. julija potekalo 25. tekmovanje študentov matematike. Iz Slovenije sta se ga udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Lenart Treven, Tea Štrekelj, Luka Lodrant in Nejc Černe iz tretjega letnika ter Severin Mejak iz prvega letnika druge stopnje študija. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem pa so zastopali študenti Arbër Avdullahu, Daniil Baldouski in Đorđe Mitrović. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.

V dvodnevnem reševanju desetih nalog se je pomerilo 351 študentov, razvrščenih v 70 ekip iz okrog 42 držav. Običajno univerzitetno ekipo sestavlja od tri do šest študentov, se pa na tekmovanje lahko prijavi vsak študent, tudi če njegova univerza ne sodeluje. Letos je bilo takih študentov kar precej, kar pomeni dodatno delo za vodje ekip. V ekipni razvrstitvi so univerze rangirane po formuli »vsota najboljših treh tekmovalcev plus povprečje vseh«.

Naši ekipi sta bili tudi tokrat zelo uspešni. Drugo nagrado je osvojil Lenart Treven, tretjo so osvojili Tea Štrekelj, Luka Lodrant, Severin Mejak, Arbër Avdullahu in Daniil Baldouski. Pohvalo sta si zaslužila Nejc Černe in Đorđe Mitrović.

Ekipno smo dosegli petinštirideseto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter šestinpetdeseto mesto (ekipa Famnit).

Slika 1. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko na izletu v samostan Rila.

Slika 2. Študenti na začetku prvega tekmovalnega dne.

Študenti imajo po prihodu na mesto tekmovanja en dan počitka, v katerem vodje ekip določijo tekmovalne naloge. Sledita dva tekmovalna dneva, ko je vsak dan na razpolago pet ur za reševanje petih nalog. Popoldne in pozno v noč pa sledi delo za vodje ekip, ki morajo oceniti študentske izdelke. Po končanem drugem reševalnem dnevu je delo študentov opravljeno, tako da običajno sledi en dan za oglede lokalnih znamenitosti, naslednji dan pa je na vrsti podelitev nagrad. Vmes vodje ekip preverijo, ali so njihovi študenti dobili res ustrezno število točk glede na to, koliko so rešili. Tako nekateri študenti dobijo kakšno dodatno točko, včasih pa kdo kakšno točko tudi izgubi. Vsota vseh sprememb števila točk študentov ene ekipe se šteje kot uspeh vodje ekipe. Prejšnja leta so uspešni vodje ekip lahko zbrali tudi 50 in več točk, letos pa je zmagovalec te kategorije dobil le 26 točk. Razlog najverjetneje tiči v tem, da so popravljalci nalog svojo nalogo letos res kvalitetno opravili. Splet naključij pa je tokrat v tem točkovanju avtorja zapisa prinesel na odlično tretje mesto.

Študenti imajo od konca drugega tekmovalnega dne do podelitve nagrad precej časa, ki ga delno porabijo tudi za druženje. Od športnih aktivnosti naj omenim, da je hrvaška reprezentanca v finalu nogometnega prvenstva proti združeni ekipi preostalega sveta močno izgubila. V družabnih igrah so bili tradicionalno močni Nemci, tekma v vaterpolu pa je zaradi premalo prijavljenih žal odpadla. Opazovanje popolnega luninega mrka je bilo le delno uspešno, saj je luna večino časa mrknila za gostimi oblaki, kronanje z bikovo glavo (v obliki lubenice) pa je bilo sicer izvedeno, a manj obiskano kot v preteklih letih.

Slika 3. Zapolnjen avditorij med podelitvijo nagrad.

Slika 4. Del ekipe Fakultete za matematiko in fiziko po podelitvi nagrad.

Še en zanimiv podatek je treba omeniti. Na pobudo nekaterih vodij ekip je predsednik tekmovanja na zaključni prireditvi tekmovalce vprašal, kdo od njih ne študira matematike. Namreč, bila je postavljena hipoteza, da vedno več dobrih matematikov izbere študij kakega drugega področja. O razlogih za to seveda lahko poteka razprava. Odziv je bil presenetljiv: več kot tretjina udeležencev je dvignila roko. Seveda bi bilo zanimivo videti, kako so se ti tekmovalci odrezali. Na prvi pogled nič slabše, tako da je verjetno to res trend. Kar pomeni, da se bodo morale matematične fakultete še bolj potruditi za svoje (bodoče) študente.

Oglejmo si še štiri naloge s tekmovanja ter nekaj njihovih rešitev. Začeli bomo z malce težjo nalogo, nato pa rešili še dve razmeroma lahki.

Pri zmerno težki nalogi omenimo nekaj ozadja. Iz analize se spomnimo Lagrangeevega izreka: za dovolj lepo funkcijo na intervalu $[a,b]$ obstaja točka c, da velja $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. Vprašamo se lahko, za katere funkcije je točka c določena kot neka funkcija krajišč a in b. Komu je morda poznan primer, ko je c aritmetična sredina, torej $c=\frac{a+b}{2}$, omenjena naloga pa je spraševala po funkcijah, kjer je c geometrična sredina. Tako dobimo nalogo, ki je mešanica diferencialne in funkcijske enačbe:

Naloga 1. Poiščite vse funkcije f, za katere velja

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\sqrt{ab}\right)$$

za vse $a,b>0$.

Rešitev. Verjetno hitro opazimo, da linearne funkcije ustrezajo pogoju. Morda malo presenetljivo pa to niso vse. Do še več ustreznih funkcij pridemo z odvajanjem izraza iz naloge. Če smo malo bolj spretni, za a in b izberemo novi spremenljivki, kot recimo $a=e^{x+h}, b=e^{x-h}$ ali pa $b=c^2a^{-1}$, lahko pa kar zgornji izraz odvajamo po a (ker je leva stran izraza odvedljiva, je tudi desna, tak argument uporabimo tudi za obstoj višjih odvodov). Dobimo

$$-f'(a)=-f'\left(\sqrt{ab}\right)+(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\,.$$

Če v dobljeni izraz vstavimo $a=b$, dobimo $-f'(a)=-f'(a)$ (torej nič novega). A dobljeni izraz lahko še enkrat odvajamo (po a):

$$\begin{aligned}-f''(a)=-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}+&\\ (b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}-(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}\,,&\end{aligned}$$

oziroma

$$f''(a)=f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}+(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}\,.$$

Spet vstavimo $a=b$, da dobimo $f''(a)=f''(a)$, oziroma še vedno nič novega. A ne obupamo in zgornji (že kar malo neprijazen) izraz odvajamo še enkrat.

$$\begin{aligned}f'''(a)=f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{2a}-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a^3}}+f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}-&\\ (b-a)f''''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b\sqrt{b}}{8a\sqrt{a}}+(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a^2}-&\end{aligned}$$

$$f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}+(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{8a^2}-(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{3\sqrt{b}}{8\sqrt{a^5}}\,.$$

Sedaj že znamo, vstavimo $a=b$ in dobimo

$$f'''(a)=\frac{1}{2}f'''(a)-\frac{1}{2a}f''(a)+\frac{1}{4}f'''(a)-\frac{1}{4a}f''(a)$$

oziroma

$$\frac{1}{4}f'''(a)=\frac{-3}{4a}f''(a)\,,$$

kar pa je nekaj novega, namreč diferencialna enačba. Zapišemo jo v bolj pregledni obliki

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)}=\frac{-3}{x}\,,$$

od koder z enim integriranjem dobimo $f''(x)=Dx^{-3}$. Po še dveh integriranjih dobimo, da mora biti funkcija f oblike $f(x)=\frac{A}{x}+Bx+C$. Hitro lahko preverimo, da vse take funkcije ustrezajo pogoju iz naloge. Poleg linearnega dela, ki smo ga lahko uganili, nastopa torej še funkcija $\frac{1}{x}$.

Seveda smo navajeni, da ima kakšna naloga več rešitev. Tole je rešitev brez odvajanja: namesto a in b vstavimo pare $(2x,2/x)$, $(2/x,x/2)$ in $(2x,x/2)$:

$$\begin{aligned} f(2x)-f(2/x)&=(2x-2/x)f'(2)\,,\\ f(2/x)-f(x/2)&=(2/x-x/2)f'(1)\,,\\ f(2x)-f(x/2)&=3/2xf'(x)\,. \end{aligned}$$

Ko prvi dve enačbi seštejemo, dobimo na levi strani isto kot v tretji, torej velja

$$(2x-2/x)f'(2)+(2/x-x/2)f'(1)=3/2xf'(x)\,,$$

kar pomeni, da za ustrezni konstanti A, B velja

$$f'(x)=-\frac{A}{x^2}+B\,,$$

od koder z enim integralom dobimo

$$f(x)=\frac{A}{x}+Bx+C\,.$$

Obstaja seveda še več možnosti, ena (med študenti dokaj pogosta) je bila, da uganemo triparametrično družino rešitev in dokažemo, da ne obstaja nobena druga. To recimo naredimo tako, da funkciji f, ki ustreza pogoju, prištejemo tako linearno kombinacijo baznih funkcij, da dobimo funkcijo $g(x)$, za katero velja

$$g(x) = f(x) + \frac{A}{x} + Bx + C\,, g(1) = g(2) = g(3) = 0\,.$$

od tod lahko pokažemo (z uporabo pogoja iz naloge), da mora biti g konstantno enaka 0.

Opomba. Bralec, ki ga še vedno zanima, katere funkcije dobimo, če za srednjo točko vzamemo aritmetično sredino krajišč, bo z zgoraj opisanimi metodami lahko našel rešitev. Kaj pa za harmonično sredino?

Dovolj diferencialnih in funkcijskih enačb, poglejmo si še nekaj res lahke algebre.

Naloga 2. Naj bo k naravno število. Koliko najmanj mora biti n, da bo v $\mathbb{R}^n$ obstajalo k vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, za katere bo veljalo, da sta v_i in v_j ortogonalna, če je $|i-j| > 1$?

Rešitev. Izberimo najprej n tako, da velja $2n+1 \leq k$. Zaradi pogoja v nalogi bi moralo biti $n+1$ vektorjev $v_1, v_3, \ldots, v_{2n+1}$ paroma ortogonalnih, to pa v $\mathbb{R}^n$ ni mogoče. Torej mora biti $2n \geq k$, oziroma $n \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Sedaj je naša naloga, da za $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ najdemo vektorje, ki ustrezajo pogoju iz naloge. To so recimo podvojeni bazni vektorji, torej e_1, e_1, e_2, $e_2, \ldots$, e_n, e_n, in ker jih je $2\lceil \frac{k}{2} \rceil \geq k$, vidimo, da obstaja k vektorjev, ki ustrezajo pogoju.

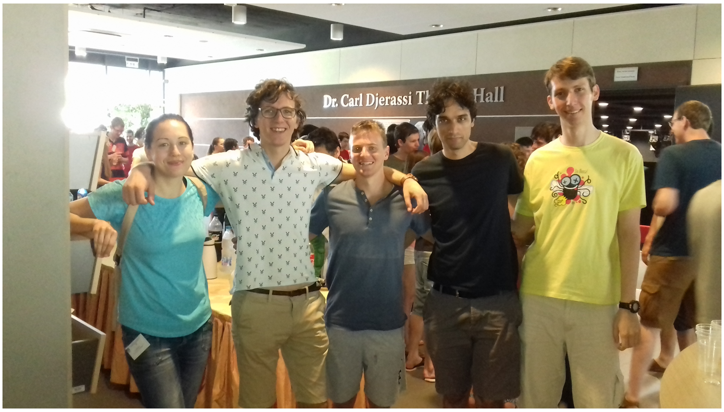
Opomba. Naloga se kar zakomplicira, če v pogoj zapišemo, da morata biti vektorja v_i in v_j ortogonalna natanko takrat, ko je $|i-j| > 1$. Vabljeni k reševanju!

Poglejmo še lahko analitično nalogo:

Naloga 3. Za zaporedji pozitivnih števil $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dokažite ekvivalenco naslednjih dveh trditev:

1. Obstaja zaporedje pozitivnih števil $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, za katero konvergirata vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$.
2. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ konvergira.

Namig. Ker je naloga res lahka, le dva majhna namiga, za vsako smer dokaza eden. Tako bi bilo zanimivo pogledati zaporedje $c_n = \sqrt{a_n b_n}$. In pa,



Slika 5. Ekipa FMF pred slavnostno otvoritvijo.

velja $\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{c_n}\frac{c_n}{b_n}}$. Spomnimo pa se tudi razmerja med aritmetično in geometrično sredino, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Za konec pa še najtežja naloga letošnjega tekmovanja. Rešil (za vseh deset točk) jo je le en tekmovalec. Če vam bo delala preglavice in vam nikakor ne bo uspelo dobiti rezultata $-\pi \log 2$, dva namiga. Prvi je ta, da lahko uporabite simetrijo in seštevate le po pozitivnih (oziroma nenegativnih) a, b. Drugi namig pa je ta, da dvojno vsoto $\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2}$ sešteje Mathematica.

Naloga 4. Za $R > 1$ definiramo množico $D_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2; 0 < a^2+b^2 < R\}$. Izračunajte

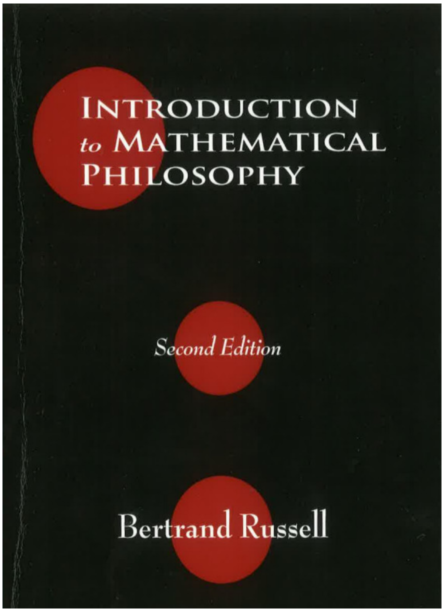
$$\lim_{R\to\infty} \sum_{(a,b)\in D_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2} \,.$$

Kogar zanima uradna rešitev te naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na internetni strani tekmovanja `www.imc-math.org.uk`. Tam si lahko ogleda tudi zgodovino tega tekmovanja, vse naloge, ki so bile zastavljene v zadnjih 25 letih, ter tudi vse rezultate. Podatki o udeležbi, ki se tičejo ekipe FMF, so naslednji: v 25 tekmovanjih smo sodelovali 24-krat, skupaj smo zbrali 103 nastope, v katerih smo dosegli 7 prvih, 39 drugih in 37 tretjih nagrad, 19 pohval in eno potrdilo.

Gregor Šega

NOVE KNJIGE

Bertrand Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, Second Edition, 2014, Merchant Books, 208 strani.



Že Aristotel je učil, da pri vsakem dokazovanju potrebujemo določen nabor aksiomov (trditev, ki jih ne dokazujemo, ampak privzamemo kot resnične), saj bi se, če bi hoteli dokazati prav vse, dokazovanje nikoli ne končalo, ampak bi se nadaljevalo v neskončnost. Ta njegova misel je pomembno vplivala tako na filozofijo (tako je npr. filozof Spinoza svojo Etiko napisal v obliki aksiomatskega sistema) kot tudi na logiko in matematiko.

Čeprav je Evklidova aksiomatska obravnava geometrije predstavljala model za vse nadaljnje matematične teorije, ki praviloma vsaj v svoji zreli fazi stremijo k zgledni aksiomatski predstavitvi, se je potreba po boljšem razumevanju in učvrstitvi samih temeljev matematike, ki je deloma nastopila že ob odkritju neevklidskih geometrij, v polni meri izkristalizirala šele po odkritju paradoksov v teoriji množic (in to ne samo v t. i. naivni Cantorjevi teoriji, ampak celo v Fregejevem aksiomatskem sistemu).[1]

Eden od tistih, ki so se problema eliminacije paradoksov v teoriji množic lotili najtemeljiteje, je bil znani britanski filozof, logik, matematik, pisec, družbeni kritik in Nobelov nagrajenec Bertrand Russell (1872–1970), ki je skupaj z Alfredom Northom Whiteheadom napisal obsežno delo *Principia*

[1]Pojem *osnov matematike* (angl. foundations of mathematics) je v začetku 20. stoletja pomenil nekaj drugega kot danes. Po prvotni optimistični zamisli Hilberta in njegovih somišljenikov naj bi se namreč dalo celotno matematiko zgraditi na peščici neprotislovnih aksiomov, iz katerih naj bi po zakonih logike sledila bodisi resničnost bodisi neresničnost vsake matematične trditve. Da tega cilja ni mogoče uresničiti, je pokazalo šele delo avstrijskega logika Kurta Gödla. Odtlej od aksiomatskih sistemov v matematiki ne pričakujemo več »popolnosti« (v smislu dokazljivosti ali ovrgljivosti vsake trditve, izrazljive s pojmi danega aksiomatskega sistema), ampak samo še konsistentnost (neprotislovnost).

Mathematica (1903), v kateri zagovarja osnovno tezo *logicizma*, po kateri naj bi se dalo vso matematiko izpeljati iz logike. Verjetno ni treba posebej poudarjati, da je knjiga, ki po nekaj sto straneh zapletenih formul (med drugim) dokaže, da je $1 + 1 = 2$, vse prej kot lahko branje. Russell je vsekakor hotel biti razumljiv tudi širši javnosti.

Čeprav je od prve izdaje knjižice *Introduction to Mathematical Philosophy* (maja 1919) minilo že skoraj sto let, je Russellova poljudna, širšemu občinstvu namenjena knjižica o osnovah matematike (digitalizirana in natisnjena kot faksimile druge izdaje iz aprila 1920) še vedno vredna branja, tako zaradi vsebine same kot tudi po svoji miselni globini, jezikovni izbrušenosti in strukturni organizaciji besedila (čeprav po sedanjih standardih strogosti v matematiki ni povsem zadovoljiva, kar priznava tudi avtor sam, ki celo opozarja na posamezna vprašanja, ki v tistem času še niso bila zadovoljivo razrešena). Po eni strani osvetljuje, razlaga in analizira nekatere najosnovnejše matematične koncepte (kot so npr. število, indukcija, relacije, urejenost, limita, zveznost, ipd.), po drugi strani pa je dragocen zgodovinski dokument časa, v katerem je bila napisana. Prav v začetku XX. stoletja je bilo namreč vprašanje osnov matematike, tudi zaradi paradoksov, odkritih npr. v teoriji množic, zelo aktualno. Enega od njih, t. i. Russellov paradoks[2], je odkril prav avtor te knjižice, ki velja (poleg Fregeja in Wittgensteina) tudi za enega od utemeljiteljev analitične filozofije. Po drugi strani pa je bilo to obdobje vzpona matematične logike, iz katere so nekateri matematiki in filozofi želeli izpeljati vso klasično matematiko (potem ko je bilo dognano, da je vso klasično matematiko mogoče izpeljati iz teorije naravnih števil, katere aksiomatizacijo je okrog leta 1900 podal italijanski matematik in historični lingvist Giuseppe Peano (1858–1932).

Russell je v delu *Uvod v filozofijo matematike* (ki ga je napisal med šestmesečnim prestajanjem zaporne kazni zaradi svojih mirovniških nazorov) zasledoval cilj, predstaviti nekatere osnovne matematične pojme v kar se da netehničnem, tudi laikom razumljivem jeziku, hkrati pa na podobno razumljiv in enostaven način predstaviti tudi nekaj osnovnih konceptov in rezultatov matematične logike. Knjižica je bila po eni strani namenjena filozofom (ki naj bi se končno naučili, kaj pojmi, kot so npr. *zveznost*, *relacije* in *neskončnost*, pomenijo matematikom, ki jih pri svojem delu nenehno

[2]Russell naj bi ga odkril ob prebiranju Cantorjevega »diagonalizacijskega argumenta« in ga uporabil za dokaz nekonsistentnosti Fregejevega aksiomatskega sistema.

uporabljajo), po drugi strani pa matematikom (ki dotlej niso imeli posebnega posluha za matematično logiko ter za filozofski vidik oziroma logične osnove matematike.)[3]

Da bi dobili neko okvirno prvo predstavo o načinu Russellovega razmišljanja in pisanja, na kratko povzemimo vsebino prvih dveh poglavij, v katerih poskuša odgovoriti na tipično filozofsko vprašanje: *Kaj je število?* oziroma si postavi za cilj definirati število z nekimi še bolj temeljnimi (logičnimi) koncepti. V tem osredotočanju na pojem števila oziroma na sam izvor matematične misli (ne pozabimo, da je npr. starogrški matematik in filozof Pitagora naravna števila imel ne samo za osnovo matematike, ampak celo vsega reda v vesolju oziroma kozmosu), ki se morda zdi sodobnemu ustvarjalnemu matematiku (angl. working mathematician), ki ga zanimajo predvsem daljne posledice aksiomov (dokazovanje težkih izrekov, izpeljava zapletenih formul, izumljanje naprednih računskih metod, ipd.) precej brezplodno vprašanje, Russell najde izvor izčiščevanja misli in odkrivanja novih obzorij. Matematikova orodja posrečeno primerja s teleskopom, filozofova oziroma logikova z mikroskopom: *Kot potrebujemo dve vrsti instrumentov, teleskop in mikroskop, za povečanje naših moči videnja, tako potrebujemo dve vrsti instrumentov za povečanje naših logičnih moči, ene, da nas peljejo naprej k višji matematiki, druge, da nas peljejo k logičnim temeljem stvari, ki jih v matematiki radi jemljemo za samoumevne.*

Za izhodišče svoje raziskave izbere zaporedje števil $0, 1, 2, 3, \ldots$ Pravi, da je to zaporedje mogoče izbrati za izhodišče filozofskega analiziranja osnovnih pojmov matematike in njihovega izpeljevanja iz še preprostejših prvin šele na razmeroma visoki stopnji civilizacije. Tako na primer stari Grki in Rimljani niso poznali števila 0. Odkritje, da je tudi 1 število, prav tako ni bilo lahko. Na neki zgodnejši stopnji civilizacije bi bilo treba razmišljanje o osnovah matematike začeti s čim še preprostejšim. Vsekakor pa je zaporedje $0, 1, 2, 3, \ldots$ zelo pomembno, in sicer iz naslednjih dveh razlogov: 1) vso tradicionalno matematiko, vključno z analitično geometrijo, je mogoče prevesti na trditve o naravnih številih, 2) teorijo naravnih števil je mogoče aksiomatizirati s petimi Peanovimi aksiomi in tremi Peanovimi osnovnimi pojmi: »0«, »število« in »naslednik« (to je bila, kot pravi Russell, skrajna

[3]Matematikom tudi danes ni lahko pojasniti, zakaj je proučevanje osnov matematike pomembno. Morda se je odnos matematikov v zvezi z osnovami matematike vendarle začel spreminjati tudi po zaslugi novejših uspehov s področja avtomatskega dokazovanja izrekov s pomočjo računalnikov, ki temelji prav na aksiomatizaciji posameznih teorij.

izpolnitev programa »aritmetizacije« matematike). Za razliko od formalistov (npr. Hilberta), ki jih sama narava entitet, ki zadoščajo Peanovim aksiomom, ni zanimala (tem aksiomom zadoščajo vse »progresije«, torej vsa neskončna zaporedja brez ponovljenih členov, torej tudi npr. 101, 102, 103, 104, ... ali pa 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...), Russell poudarja, da ne smemo pozabiti, da so naravna števila namenjena ne le dokazovanju izrekov o njih, ampak tudi tako preprosti operaciji, kot je štetje. To misel sijajno izrazi takole: *Hočemo imeti deset prstov in dve očesi in en nos. Sistem, v katerem* »1« *pomeni* 100, *in* »2« *pomeni* 101, *in tako dalje, je morda čisto v redu za čisto matematiko, vendar ne bi ustrezal našemu vsakodnevnemu življenju.*

Nato nadaljuje z natančno jezikovno in miselno analizo pojma števila ter nazadnje predstavi definicijo števila s pomočjo preprostejših konceptov logike, kar je podvig, ki ga je prvi izpeljal nemški filozof, logik in matematik Gottlob Frege (1848–1925), katerega delo je bilo sodobnikom razmeroma neznano, kasnejšim generacijam logikov in filozofov pa sta ga predstavila šele Russell in Peano. Nazadnje definira število kot *razred množic, ki imajo vse enako število elementov.* To pa ni krožna definicija, čeprav se na prvi pogled tako zdi, saj pojem *enako število elementov* definira brez uporabe pojma števila, z uporabo (današnjim) matematikom dobro znanega načela bijektivne korespondence.[4]

Na podoben način obravnava še druge matematične pojme in jih reducira na logične pojme na način, ki je današnjemu študentu matematike precej domač, pred 100 leti pa je bilo takšno razmišljanje precej novo in napredno.

Med številnimi zanimivostmi v knjigi je treba omeniti npr. vsaj še Russellovo argumentiranje, da je ustaljeno prepričanje matematikov, da v zaporedju številskih množic $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, vsaka naslednja množica vsebuje prejšnjo, (vsaj s filozofskega stališča) zgrešeno: če pustimo ob strani dejstvo, da se da vsako od množic naravno vložiti v naslednjo, pri čemer se običajni računski zakoni ohranjajo, gre namreč v vseh teh primerih za, konceptualno gledano, povsem različne entitete! Tako je npr. število, po Russellu, razred (ekvipolentnih) množic, medtem ko je ulomek a/b, kot ga interpretira oziroma definira on, v bistvu relacija, torej nekaj čisto drugega kot naravno število.

[4] Danes uveljavljena vpeljava naravnih števil s pojmi teorije množic ne sledi Russellovi poti, ki pa je, čeprav jo doživljamo kot zastarelo, vsekakor zanimiva vsaj zgodovinsko. Vsekakor si je Russell prizadeval, da bi njegova definicija kar se da ustrezala naši intuitivni predstavi o tem, kaj so naravna števila.

Če se morda zdijo omenjena vprašanja nepotrebno dlakocepstvo, ki ga matematikom ni treba poznati, pa je vendarle treba pripomniti, da v knjižici Russell obravnava nekatere teme, ki so, ne le za logike in filozofe, ampak tudi za matematike, še vedno aktualne, npr. teorijo dedukcije. In čeprav je matematična logika od časov Russella močno napredovala, se je vselej dobro vračati k izvorom in izvornim delom, saj nam dostikrat tudi tavanja pionirjev posameznih raziskovalnih področij pomagajo bolje razumeti sodobno raziskovalno delo na istem področju. Zato bi priporočil vsakemu matematiku, da v življenju prebere vsaj eno delo o filozofiji matematike, in če ne ve, za katero bi se odločil, ne bo zgrešil, če poseže po Russellovem *Uvodu v filozofijo matematike.* Kot drugo, prav tako izvrstno, alternativo pa predlagam Russellov *Esej o osnovah geometrije* (1897), v katerem kot pravi Kantovec razpreda o tem, katera geometrija mora biti umu vrojena, da se tako izvrstno prilega naši izkušnji prostora. Obe knjižici lahko matematiku močno razširita obzorja, in to je vedno dobro. Branje takšnega filozofskega teksta, četudi o osnovah matematike, nas namreč dobesedno vrže iz naše cone udobja: na nobeno vprašanje ni nikoli dokončno odgovorjeno, zastavljajo pa se nova in nova. Za matematika, ki si želi jasnih in natančnih pojmov in rezultatov, je branje takšnega dela lahko zelo naporna izkušnja.

Med lastnostmi, ki jih pri Russellu kot mislecu, poleg njegove razgledanosti in sposobnosti, da se ni podrejal mnenju večine, še posebej cenim, je njegova nedogmatičnost oziroma pripravljenost priznati, da se morda v svojih razmišljanjih tudi moti. Njegov moto je bil: *Nikoli ne bi umrl zaradi svojih prepričanj, kajti morda se motim.* V predgovoru k drugi izdaji (iz leta 1937) knjige *Principles of mathematics* (prva izdaja 1903) je celo prostodušno zapisal, da ima to njegovo delo le še zgodovinsko vrednost in da so se nekatere trditve v njem izkazale za zmotne.[5] Prav tako nikoli ni imel težav s priznanjem, da je njegov najboljši učenec Ludwig Wittgenstein (1889–1951) mnogo bolj genialen od njega. Ali takšno širino prinese študij filozofije (Sokrat je bil najmodrejši, ker je vedel vsaj to, da nič ne ve), ali pa je nekaterim umom vrojena, je vprašanje, o katerem lahko vsak bralec razmisli sam.

Jurij Kovič

[5]Res je Russellovo delo v marsičem že zastarelo in preseženo. Tako npr. aksiomatika teorije množic v sistemu ZFC (tako imenovana po avtorjih Zermelu in Fraenkelu, vključujoč aksiom izbire) ne potrebuje njegove »teorije tipov« oziroma hierarhije razredov.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2018
Letnik 65, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Umetni plavalec potuje po krožnem mikrofluidičnem kanalčku. Poganja ga zunanje magnetno polje, plavalec pa sam najde pot skozi kanal. Premer posamezne kroglice je 2,7 mikrometra, za en krog pa plavalec potrebuje nekaj minut (glej članek na straneh 89–99). Foto: Natan Osterman