**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

62. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Ljubljana, 13. 4. 2024

Skupina I

1. Med ragbi tekmo želi podajalec, ki ima žogo, vreči žogo napadalcu. Ko napadalec priteče mimo podajalca, se podajalec pripravi na met, napadalec pa teče ves čas naravnost. Podajalec vrže žogo s hitrostjo 25 m/s, napadalec teče s stalno hitrostjo 8,0 m/s. Zračni upor zanemari.

   Pod kolikšnim kotom glede na vodoravnico in koliko časa za tem, ko je bil napadalec pri podajalcu, mora podajalec vreči žogo, da jo bo napadalec ujel 36 m od podajalca?

2. Lokomotiva z maso 80 ton in z močjo motorja 2,12 MW ima priključenih 20 tovornih vagonov. Skupna masa vagonov je 1100 ton. Koeficient lepenja med kolesi lokomotive in tiri ter med kolesi vagonov in tiri je 0,15. Vlak vozi po vodoravni progi tako, da kolesa niti med vožnjo niti med zaviranjem nikoli ne spodrsavajo. Zračni upor zanemari.

   a) Kolikšen je največji možni pospešek vlaka, ko začne speljevati?

   b) Kolikšen je največji možni pospešek vlaka, ko vozi s hitrostjo 100 km/h?

   c) Ko vlak zavira, uporabi zavore na lokomotivi in na vseh vagonih. Na kolikšni najmanjši razdalji se zaustavi vlak, če vozi s hitrostjo 100 km/h?

3. Homogeno kocko z maso 2,0 kg in s stranico 10 cm obesimo na silomer, ki ima na zraku umerjeno skalo tako, da se vzmet v silomeru raztegne za dodatni 1,0 cm, ko na vzmet obesimo dodatno utež z maso 200 g. Kocka je obešena tako, da je njena spodnja ploskev ves čas vodoravna, silomer držimo za zgornje krajišče, da je ves čas v navpični legi. V visoki valjasti posodi s površino dna 200 cm^2 je do višine 10 cm natočena voda, na vodi je plast olja, ki sega do višine 20 cm nad dnom posode (glej sliko). Gostota olja je 0,80 kg/dm^3. Najprej je roka, v kateri držimo silomer, na višini 60 cm nad dnom posode. Takrat je spodnja ploskev kocke tik nad gladino olja. Nato začnemo roko, v kateri držimo zgornje krajišče silomera, počasi spuščati navpično navzdol. S spuščanjem prenehamo, ko kocka obmiruje na dnu posode.

   a) Kolikšna je višina gladine olja, ko kocka obmiruje na dnu posode?

   b) Na kolikšni višini je roka v trenutku, ko se kocka v celoti potopi v olje?

   c) Skiciraj graf višine roke v odvisnosti od višine spodnje ploskve kocke med spuščanjem kocke. Na grafu označi značilne točke in za te točke napiši vrednosti količin na obeh oseh.



Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. V nalogi obravnavamo fračo z omejenim dosegom, ki jo sestavljajo: večja kroglica z maso 160 g, manjša kroglica z maso 40 g in premerom 2,0 cm, lopar z luknjo s premerom, manjšim od 2,0 cm, in elastika s prožnostnim koeficientom 2,0 N/cm. Elastiko, ki ima nenapeta dolžino 20 cm, napeljemo skozi luknjo v loparju in na vsako krajišče pritrdimo eno od kroglic. Fračo uporabljamo tako, da trdno držimo lopar, potegnemo večjo kroglico v vodoravni smeri (na sliki A na levo) in jo spustimo, da odleti proti loparju (slika B). Večja kroglica prožno trči v manjšo, preden zadene lopar, in manjša kroglica odleti naprej. Takoj po končanem trku z manjšo kroglico večja kroglica zadene lopar in se zagozdi v luknjo loparja, kjer obmiruje (slika C). Trk med kroglicama na slikah ni narisan, zgodi se med situacijama na slikah B in C. Slika D kaže trenutek, ko manjša kroglica doseže skrajno lego na desni strani loparja. Gibanje kroglic v navpični smeri zaradi vpliva teže zanemari.



Vsakič, ko fračo napnemo, večjo kroglico v vodoravni smeri potegnemo tako daleč od loparja, da je elastika dolga 50 cm. Nato večjo kroglico spustimo.

a) Kolikšna je dolžina elastike, ko je manjša kroglica najdlje od loparja?

b) S kolikšnim sunkom sile deluje lopar na večjo kroglico med ustavljanjem, torej od trenutka, ko se večja kroglica dotakne loparja, do trenutka, ko večja kroglica obmiruje zagozdena v luknji loparja?

c) S fračo ciljamo pločevinko, ki je na razdalji 30 cm od loparja. S kolikšno hitrostjo manjša kroglica zadane pločevinko?

©2024 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli

Skupina II

1. Kondenzator je sestavljen iz dveh lahkih vzporednih kovinskih plošč s ploščino 2,0 dm^2, ki sta pritrjeni vsaka z ene strani tanke plasti penaste gume z debelino 2,0 mm (na sliki sivo). Penasta guma ima enake električne lastnosti kot prazen prostor in Youngov prožnostni modul $E = 20\ \mathrm{N/m}^2$.

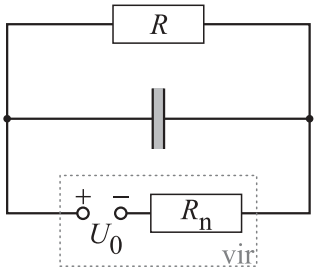
   Fizikalni poduk: Kadar je trdna snov (mehansko) napeta ali stisnjena, je relativni raztezek ali skrček $\Delta L/L$, kjer je ΔL velikost raztezka oziroma skrčka in L dolžina nedeformiranega kosa snovi, sorazmeren z (mehansko) napetostjo F/S: $\frac{\Delta L}{L} \propto \frac{F}{S}$. Sorazmernostni faktor imenujemo Youngov prožnostni modul in ga običajno označujemo s črko E:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S},$$

   kjer je F sila, ki je pravokotna na prečni presek kosa snovi S. Pozitivna napetost F/S kos snovi podaljša ($\Delta L > 0$), negativna napetost pomeni, da kos snovi stiskamo in se zato skrči ($\Delta L < 0$).

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko ni priključen na vir napetosti?

   Kondenzator vežemo vzporedno z upornikom $R = 100\,\Omega$ in vezje priključimo na vir napetosti z notranjim uporom $R_\mathrm{n} = 10\,\Omega$, kot kaže slika.



   b) Pri električni napetosti med ploščama do 50 V se razdalja med ploščama kondenzatorja zanemarljivo malo spremeni, zato je kapaciteta v dobrem približku enaka kapaciteti, ko med ploščama ni električne napetosti. Kolikšen naboj se nabere na eni plošči kondenzatorja, ko je vir napetosti nastavljen na napetost 22 V?

   c) Izračunaj, na približno kolikšno napetost bi morali nastaviti vir napetosti, da bi se kapaciteta kondenzatorja glede na tisto, ko med ploščama ni električne napetosti, spremenila za 1,0 %. Je pri tej električni napetosti kapaciteta večja ali manjša od kapacitete kondenzatorja, ko med ploščama ni električne napetosti?

2. Kos bakra z maso 15 g raztegnemo v žico z okroglim presekom. Žico nato izoliramo s tankim premazom z lakom in jo uporabimo za navitje tuljave. Navitju nudi oporo dolg plastični tulec s premerom 4,0 cm. Gostota bakra je 8,9 $\mathrm{kg/dm}^3$, specifični upor bakra je $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$.

   Kolikšna naj bo dolžina bakrene žice, da bo v nastali tuljavi magnetno polje z gostoto 10 mT, ko bomo krajišči žice priključili na vir z napetostjo 12 V? Za izdelavo tuljave uporabimo enega od spodnjih načinov.

   a) Navijamo v eni sami plasti, dokler žice ne porabimo, pri čemer žico navijamo tesno, kolikor to dopušča debelina žice.

   b) Navijamo tako gosto in v toliko plasteh, da celotno žico porabimo v navitju z dolžino 15 cm vzdolž tulca in je dolžina žice veliko daljša od dolžine navitja.

Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

3. Moderne tirnice za hitre vlake uporabljajo tehnologijo neprekinjeno zavarjenega tira. Namesto večjega števila krajših kosov tirnic, med katerimi so špranje, se namesti neprekinjena tirnica, ki je pod napetostjo čvrsto pritrjena na podlago. Tirnica je iz jekla s temperaturnim koeficientom dolžinskega raztezka $1{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ in z Youngovim prožnostnim modulom, ki se s temperaturo T spreminja linearno: $E(T) = E_0 - k(T - T_0)$, kjer je $E_0 = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Pa, $k = 1{,}0 \cdot 10^8$ Pa/K in $T_0 = 22\,^\circ\mathrm{C}$.

   Fizikalni poduk: Napetost F/S pomeni, da tirnico s prečnim presekom S razteza sila F. Primer iz vsakdanjega življenja je napeta struna na kitari. Relativni raztezek $\Delta L/L$, kjer je ΔL velikost raztezka in L dolžina nedeformirane strune ali tirnice, z napetostjo povezuje enačba

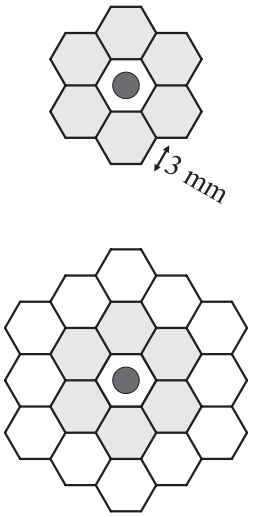
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S},$$

   kjer je F sila, ki je pravokotna na prečni presek S, in E Youngov prožnostni modul.

   a) S kolikšno napetostjo mora biti napeta tirnica ob pritrditvi pri temperaturi T_0, da bo v njej napetost do temperature $65\,^\circ\mathrm{C}$?

   b) Največja dovoljena napetost v tirnici je 25 MPa. Do kolikšne najnižje temperature se sme ohladiti tirnica iz vprašanja a)?

4. V nalogi modeliramo prevajanje toplote v preprostem modelu satovja, ki ga v tlorisu kažeta sliki: Na zgornji sliki ima čebela (temno siv krogec na sredini slike) okoli sebe enojni ovoj praznih celic (obarvano svetlo sivo za lažjo predstavo), medtem ko ima na spodnji sliki čebela okoli sebe dvojni ovoj praznih celic (za boljšo predstavo so celice notranjega ovoja obarvane svetlo sivo). Vsaka navpična stena med dvema celicama je pravokotnik s širino 3,0 mm in z višino 10 mm, debelina stene je 0,20 mm. Čeprav znaten del toplotne izolacije predstavlja zrak v posamezni celici, ki je med čebelo in zunanjostjo, v nalogi predpostavi, da ima vsak celica neko ravnovesno temperaturo in se toplota prevaja samo skozi stene celic, ki jim zato, da upoštevamo tudi vpliv zraka v celicah, v modelu pripišemo manjšo toplotno prevodnost, kot jo ima vosek, iz katerega so stene — toplotna prevodnost sten je v modelu $0,0030$ W/Km. Plast voska, ki pod in nad celicami zapira satje, je veliko debelejša od sten med celicami, zato v modelu predpostavi, da se skozi dno in strop toplota ne prevaja, prevaja se samo skozi navpične stene celic. Posamezna čebela oddaja toplotni tok 4,0 mW, zunanja temperatura je $5{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.



   a) Kolikšna je temperatura celice s čebelo v modelu z enojnim ovojem celic (zgornji tloris)?

   b) Kolikšna je temperatura celice s čebelo v modelu z dvojnim ovojem celic (spodnji tloris)?

©2024 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli

Skupina III

1. V medzvezdnem prostoru s temperaturo 3,0 K se nahaja oblak vodikovega plina H_2 s številsko gostoto vodikovih molekul $4 \cdot 10^9$ m^{-3}. En kilomol molekul vodika ima maso 2,0 kg.

   a) Kolikšna je povprečna kinetična energija molekul pri tej temperaturi? Kolikšna je hitrost molekul vodika s to kinetično energijo?

   b) Predpostavi oblak v obliki krogle, v katerem imajo vse molekule enako hitrost, ki ustreza povprečni kinetični energiji pri temperaturi 3,0 K. Izračunaj, približno kolikšen je najmanjši polmer oblaka, da se oblak začne sesedati v zvezdo.

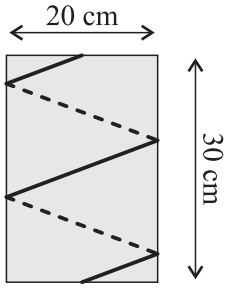
2. Kos bakra z maso 15 g raztegnemo v žico z okroglim presekom. Žico nato izoliramo s tankim premazom z lakom in jo uporabimo za navitje tuljave. Navitju nudi oporo dolg plastični tulec s premerom 4,0 cm. Gostota bakra je 8,9 kg/dm^3, specifični upor bakra je $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega$m.

   Kolikšna naj bo dolžina bakrene žice, da bo v nastali tuljavi magnetno polje z gostoto 10 mT, ko bomo krajišči žice priključili na vir z napetostjo 12 V? Za izdelavo tuljave uporabimo enega od spodnjih načinov.

   a) Navijamo v eni sami plasti, dokler žice ne porabimo, pri čemer žico navijamo tesno, kolikor to dopušča debelina žice.

   b) Navijamo tako gosto in v toliko plasteh, da celotno žico porabimo v navitju z dolžino 15 cm vzdolž tulca in je dolžina žice veliko daljša od dolžine navitja.

3. Homogen valj z maso 240 g, z višino 30 cm in s premerom osnovne ploskve 20 cm ima po plašču speljano lahko v vijačnico oblikovano ozko cev, ki od vrha do dna valj ovije natančno dvakrat, kot kaže slika v pogledu od strani (vidni del žleba je narisan s polno črto, nevidni pa s črtkano). Valj je prosto vrtljiv okoli navpične simetrijske osi. Na začetku valj miruje. V zgornjo odprtino cevi postavimo majhno kapsulo z maso 60 g in jo spustimo, da brez trenja drsi po cevi navzdol.



   a) S kolikšno kotno hitrostjo se vrti valj, ko kapsula doseže spodnjo odprtino cevi?

   b) S kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom glede na vodoravno ravnino kapsula zapusti cev?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

4. Na senzorju fotoaparata nastane najostrejša slika predmeta, ki ga fotografiramo, ko je senzor za objektivom postavljen natančno na mesto, kjer nastane slika predmeta. Takrat je slika točkastega objekta na senzorju točka. Če je senzor malo bliže ali malo dlje od objektiva, je slika točkastega objekta na senzorju majhen krogec. Senzor je sestavljen iz majhnih elementov, iz tako imenovanih slikovnih pik*. Če je premer krogca, v katerega se preslika točkast objekt, manjši od premera slikovne pike na senzorju, je slika ostra, kolikor omogoča ločljivost senzorja – tako sliko definiramo kot ostro sliko.

   Fotografirati želimo letalo, ki leti pred Lunino ploskvico. Letalo je od fotoaparata oddaljeno 10 km, Luna pa $3{,}8 \cdot 10^8$ m. Fotoaparat ima objektiv z goriščno razdaljo 40 cm in senzor z okroglimi slikovnimi pikami s premerom $4{,}0\,\mu$m. Zaslonka fotoaparata je okrogla in popolnoma odprta, tako da količino svetlobe, ki vpada na senzor, v celoti določa premer objektiva.

   a) Kolikšen je največji premer objektiva, da lahko hkrati izostrimo sliko Lune in letala? Uklon na objektivu zanemari.

   b) Kolikšna je največja goriščna razdalja uporabljenega objektiva, da bo slika ostra, če upoštevamo tudi uklon svetlobe?

   Fizikalni poduk: Točkast objekt, ki bi se, če upoštevamo samo geometrijsko optiko, na idealno postavljenem senzorju preslikal v točko, se zaradi uklona preslika v krožec s premerom $1{,}22 f \frac{\lambda}{D}$, kjer je f goriščna razdalja objektiva, D premer objektiva in $\lambda = 500$ nm značilna valovna dolžina svetlobe, v kateri fotografiramo.

   * Slikovna pika se v strokovni literaturi pogosto imenuje *slikovna točka* in pogovorno *piksel*, kar izhaja iz angleške besede *pixel*.

©2024 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo fizike v srednji šoli

1. $D = 36$ m, $v_0 = 25$ m/s, $v_1 = 8{,}0$ m/s.

   Postavimo izhodišče časa v trenutek, ko podajalec vrže žogo. Imamo enakomerno pospešeno gibanje v navpični smeri in enakomerno gibanje v vodoravni smeri:

   $$x = tv_0 \cos\alpha, \qquad y = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{1}$$

   Iz pogoja, da je ob koncu podaje žoga na začetni višini, izrazimo čas letenja žoge

   $$t_{\text{let}} = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha\,, \tag{2}$$

   kar lahko vstavimo v enačbo za gibanje v vodoravni smeri, da dobimo znano enačbo za domet:

   $$D = t_{\text{let}} v_0 \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,. \tag{3}$$

   [4 t.]

   Iz te enačbe in podanega dometa lahko določimo kot, pod katerim mora podajalec vreči žogo. Dobimo dve rešitvi:

   $$\alpha = \{17{,}2^\circ,\ 72{,}8^\circ\} \tag{4}$$

   [2 t.]

   Pripadajoča časa leta za vsak kot sta

   $$t_{\text{let}} = \{1{,}51\,\text{s}, 4{,}87\,\text{s}\}\,. \tag{5}$$

   Iz enakomernega gibanja napadalca in časa leta izračunamo, kje je bil napadalec ob začetku meta. Dobimo dve legi glede na podajalca

   $$x_1 = D - v_1 t_{\text{let}} = \{23{,}9\,\text{m}, -3{,}0\,\text{m}\}\,. \tag{6}$$

   [3 t.]

   Negativna rešitev pomeni, da bi bil napadalec za podajalcem, ko je ta vrgel žogo, kar ne ustreza besedilu naloge.

   Ugotovitev, da je od obeh kotov samo manjši skladen z besedilom naloge.

   [1 t.]

   Pravilni kot je torej $\alpha = 17{,}2^\circ \approx 17^\circ$.

   Podajalec vrže žogo $x_1/v_1 = 2{,}99\,\text{s} \approx 3$ s po tem, ko je napadalec ob njem.

©Tekmovalna komisija pri DMFA

2. $P = 2{,}12$ MW, $m_0 = 80$ t, $m_1 = 1100$ t, $k = 0{,}15$, $v_0 = 100$ km/h.

a)
Pri znani moči je maksimalna sila, ki pospešuje vlak odvisna od hitrosti, $F_m = P/v$. Ko vlak miruje, gre ta sila proti neskončno in vsekakor preseže največjo možno silo lepenja, zato je pospešek omejen s pogojem, da kolesa ne zdrsnejo. Vlak pospešuje sila lepenja med kolesi lokomotive in tiri

$$F_1 = km_0 g = 117{,}6\,\mathrm{kN}. \tag{1}$$

Ta sila pospešuje celoten vlak z maso $m = m_0 + m_1$, zato je pospešek v tem primeru

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = g\frac{km_0}{m_0 + m_1} = 0{,}0997\,\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}10\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2}$$

[4 t.]

b)
Ko vlak vozi s hitrostjo $100\,\mathrm{km/h} = 27{,}8$ m/s, je sila, ki pospešuje vlak in jo omejuje moč motorja, $F_2 = P/v_0 = 76{,}32$ kN manjša od maksimalne sile lepenja, zato ta sila določa pospešek

$$a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{P}{v_0(m_0 + m_1)} = 0{,}0647\,\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}065\,\mathrm{m/s^2}. \tag{3}$$

[3 t.]

c)
Ko vlak zavira z zavorami na vseh vagonih, prispeva k sili podlage celotna masa vlaka, zato je pojemek vlaka

$$a_3 = \frac{kmg}{m} = kg = 1{,}47\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4}$$

Vlak se ustavi po času $t_3 = v_0/a_3 = 18{,}9$ s na razdalji

$$s = t_3\frac{v_0}{2} = \frac{v_0^2}{2a_3} = 262{,}45\,\mathrm{m} = 262\,\mathrm{m} \approx 260\,\mathrm{m}. \tag{5}$$

[3 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

3. $m = 2{,}0$ kg, $a = 10$ cm, $S = 200$ cm^2, $\rho_0 = 0{,}8$ kg/dm^3, $\rho_1 = 1{,}0$ kg/dm^3, $\frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{1{,}0\,\mathrm{cm}}{200\,\mathrm{g}}$, $z_0 = 60$ cm, $y_0 = 2a = 20$ cm.

Najprej izračunamo koeficient vzmeti iz podatka $\frac{dx}{dm}$, za koliko se raztegne vzmet ob dodatni obremenitvi

$$k = \frac{\Delta m g}{\Delta x} = 196\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

Da bo opis dogajanja enostavnejši, naj povsod v nalogi višino roke nad dnom posode označuje spremenljivka z, višino spodnje ploskve kocka nad dnom posode pa spremenljivka y. Iz podatkov razberemo še, da sta na začetku debelini plasti olja in vode vsaka enaka dolžini robu kocke a.

Na začetku, ko je kocka tik nad gladino olja, velja $z = z_0 = 60$ cm, $y = y_0 = 20$ cm, raztezek vzmeti v silomeru je takrat $x_0 = mg/k = 10$ cm. Pri raztezku vzmeti x_0 je razlika med višino roke in višino spodnje ploskve kocke $z - y = z_0 - y_0 = 40$ cm. Razdalja $z - y$ se spreminja izključno zaradi spreminjanja raztezka vzmeti x; ko se x zmanjša za dx se enako zmanjša razdalja $z - y$; $d(z - y) = dx$. Gladina olja je na višini $h_0 = y_0 = 20$ cm.

[2 t.]

a)

Ko je kocka v celoti pod gladino olja, se gladina olja dvigne za $\Delta h = a^3/S = 5$ cm. Ko se kocka od tega trenutka naprej spušča najprej skozi olje in nato skozi vodo, se višina gladine olja ne spreminja več. Ko je kocka na dnu posode, je višina gladine olja

$$h = h_0 + \Delta h = y_0 + \frac{a^3}{S} = 25\,\mathrm{cm}.$$

[1 t.]

b)

Iz a) vidimo, da je višina spodnje ploskve kocke, ko se v celoti potopi v olje in je zato tik pod gladino, eneka

$$y_b = y_0 - a + \Delta h = 15\,\mathrm{cm}.$$

Ker je sedaj celotna kocka v olju, deluje nanjo poleg teže in sile vzmeti tudi vzgon olja $F_0 = \rho_0 a^3 g$. Raztezek vzmeti je zato

$$x_b = \frac{mg - F_0}{k} = 6\,\mathrm{cm}.$$

Višina roke je v tem trenutku

$$z_b = z_0 - (y_0 - y_b) - (x_0 - x_b) = 60\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} - 4\,\mathrm{cm} = 51\,\mathrm{cm}.$$

[3 t.]

c)

Da lahko skiciramo graf višine roke z od višine spodnje ploskve kocke y, moramo ugotoviti, katere so značilne točke (y, z) med spuščanjem kocke in kakšna je funkcija $z(y)$ med temi točkami.

Odgovor na zadnje vprašanje je med spuščanjem kocke skozi plasti zrak-olje-voda preprost vsakič, ko je dogajanje kvalitativno enako. Takrat se z spreminja linearno z y. Značilna kvalitativno enaka dogajanja so:

i) Kocka je delno potopljena v olju, del kocke je v zraku. To se dogaja med točkama $\mathsf{A} = (y_0, z_0)$ in $\mathsf{B} = (y_b, z_b)$.

ii) Kocka je v celoti potopljena v olju in se spušča do gladine vode, ko je $y_c = a = 10$ cm. To se dogaja med točkama $\mathsf{B} = (y_b, z_b)$ in $\mathsf{C} = (y_c, z_c)$.

©Tekmovalna komisija pri DMFA

iii) Kocka je delno potopljena v vodi in delno v olju. To se dogaja med točkama $\mathsf{C} = (y_c, z_c)$ in $\mathsf{D} = (y_d, z_d)$, kjer na podlagi rezultata na vprašanje a) vidimo, da se gladina vode, ko se kocka popolnoma potopi v vodo na višini $a + \Delta h = 15$ cm, torej je spodnja ploskev kocke takrat na višini $y_d = a + \Delta h - a = \Delta h = 5$ cm.

iv) Kocka je v celoti potopljena v vodi in se spušča do dna, ko je $y_e = 0$ cm. To se dogaja med točkama $\mathsf{D} = (y_d, z_d)$ in $\mathsf{E} = (y_e, z_e)$.

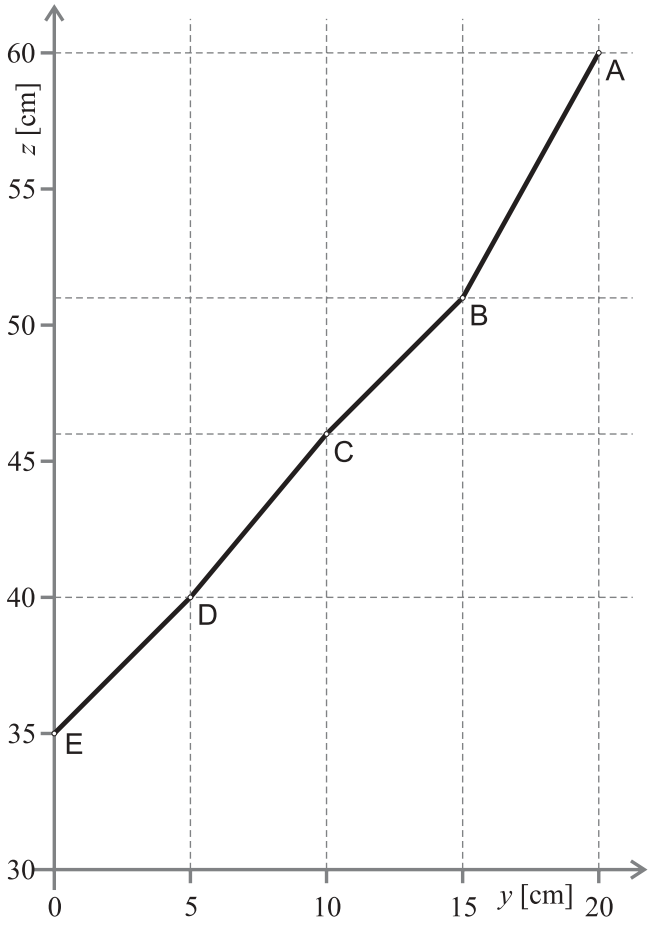
Iz zapisanega vidimo, da točki $\mathsf{A} = (20\,\text{cm}, 60\,\text{cm})$ in $\mathsf{B} = (15\,\text{cm}, 51\,\text{cm})$ že poznamo. Za ostale tri točke iz geometrije poznamo vse tri y vrednosti $y_c = 10$ cm, $y_d = 5$ cm in $y_e = 0$ cm. Pripadajoče z vrednosti izračunamo iz ravnovesja sil oziroma s pomočjo izračunanega raztezka vzmeti v značilnih točkah.

V točki C je kocka v celoti v olju kot v točki B, zato se med spuščanjem kocke v olju z spremeni enako kot y (raztezek vzmeti je ves čas enak x_b). Dobimo $z_c = z_0 - (y_0 - y_c) - (x_0 - x_b) = 46$ cm oziroma $\mathsf{C} = (10\,\text{cm}, 46\,\text{cm})$.

V točki D je kocka v celoti v vodi, zato je raztezek vzmeti enak

$$x_d = \frac{mg - F_1}{k} = 5\,\text{cm}\,,$$

kjer je F_1 vzgon vode $F_1 = \rho_1 a^3 g$. Dobimo $z_d = z_0 - (y_0 - y_d) - (x_0 - x_d) = 40$ cm oziroma $\mathsf{D} = (5\,\text{cm}, 40\,\text{cm})$. Končno se med spuščanjem kocke do dna posode, ko je ves čas v celoti v vodi, z in y spreminjata enako (raztezek vzmeti je ves čas enak x_d). Dobimo $z_e = z_0 - y_0 - (x_0 - x_d) = 35$ cm oziroma $\mathsf{E} = (0\,\text{cm}, 35\,\text{cm})$.



[4 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

4. $M = 160$ g, $m = 40$ g, $r = 1{,}0$ cm, $l_0 = 20$ cm, $k = 2{,}0$ N/m, $l_1 = 50$ cm, $x = 30$ cm.

a)
V legi na sliki A je vsa mehanska enegija shranjena v elastiki. Tik pred trkom v manjšo kroglico ima večja hitrost v_0, ker se vsa prožnostna energija elastike pretvori v kinetično energijo večje kroglicezato

$$\frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = 10{,}61\,\mathrm{m/s} = 10{,}6\,\mathrm{m/s} \approx 11\,\mathrm{m/s}\,. \tag{1}$$

Prožni trk med kroglicama obravnavamo tako, da enačimo skupno gibalno količino pred in po trku ter skupno kinetično energijo pred in po trku

$$Mv_0 = Mu' + mu \quad \text{in} \qquad Mv_0^2 = Mu'^2 + mu^2\,, \tag{2}$$

kar nam da znana rezultata

$$u = v_0\,\frac{2M}{M+m} = 1{,}6v_0 = 16{,}97\,\mathrm{m/s} \approx 17\,\mathrm{m/s} \tag{3}$$

in

$$u' = v_0\,\frac{M-m}{M+m} = 0{,}6v_0 = 6{,}36\,\mathrm{m/s} \approx 6{,}4\,\mathrm{m/s}\,. \tag{4}$$

V skrajni legi na sliki D se vsa kinetična energija, ki jo je prejela manjša kroglica med trkom pretvori v prožnostno energijo elastike

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2\,, \tag{5}$$

kjer smo z l_2 označili dolžino elastike. V enačbo (5) vstavimo rezultat (3) in upoštevamo še enačbo (1), da dobimo

$$k(l_2 - l_0)^2 = mu^2 = mv_0^2\,\frac{4M^2}{(M+m)^2} = Mv_0^2\,\frac{4mM}{(M+m)^2} = k(l_1 - l_0)^2\,\frac{4mM}{(M+m)^2} \tag{6}$$

in od tu

$$(l_2 - l_0)^2 = (l_1 - l_0)^2\,\frac{4mM}{(M+m)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad l_2 = l_0 + 2(l_1 - l_0)\frac{\sqrt{mM}}{M+m} = 44\,\mathrm{cm}. \tag{7}$$

[5 t.]

b)
Po trku ima večja kroglica hitrost u' in gibalno količino Mu'. Med ustavljanjem sunek sile loparja ravno ustavi večjo kroglico, torej je sunek sile loparja $\int F\,dt$ po velikosti enak gibalni količini večje kroglice po trku z manjšo

$$\int F\,dt = Mu' = Mv_0\,\frac{M-m}{M+m} = (l_1 - l_0)\sqrt{kM}\,\frac{M-m}{M+m} = 1{,}02\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}0\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} = 1{,}0\,\mathrm{Ns}.$$

[2 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

c)
Ker je pločevinka od loparja oddaljena $x = 30$ cm, premer manjše kroglice pa je $2r = 2{,}0$ cm, je dolžina elastike, ko manjša kroglica zanene pločevinko

$$l_3 = x - 2r = 28\,\mathrm{cm}.$$

Mala kroglica ima takrat hitrost w in zato kinetično energijo, ki je enaka razliki prožnostnih energij elastike pri dolžinah l_2 in l_3

$$\frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l_3 - l_0)^2 + \frac{1}{2}mw^2$$

oziroma

$$w^2 = \frac{k}{m}\left((l_2 - l_0)^2 - (l_3 - l_0)^2\right) \qquad \Longrightarrow \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}\left((l_2 - l_0)^2 - (l_3 - l_0)^2\right)} = 16\,\mathrm{m/s}\,.$$

[3 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

1. $S = 2{,}0\ \mathrm{dm}^2$, $x = 2{,}0\ \mathrm{mm}$, $\eta = \Delta x/x = 0{,}010 = 1{,}0\ \%$, $E_Y = 20\ \mathrm{N/m}^2$, $R = 100\,\Omega$, $R_n = 10\,\Omega$, $U_0 = 22\ \mathrm{V}$.

a)
Kapaciteta kondenzatorja je

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x} = 8{\cdot}9 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} = 89\,\mathrm{pF}. \tag{1}$$

[1 t.]

b)
Ker sta v vezju dva upornika je napetost na kondenzatorju manjša od napetosti vira

$$U_b = U_0 \frac{R}{R + R_n} = 20\,\mathrm{V}. \tag{2}$$

Naboj na eni plošči kondenzatorja je

$$e = CU_b = 1{,}78 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As} = 1{,}78\,\mathrm{nAs}. \tag{3}$$

[3 t.]

c)
Če je napetost dovolj velika, privlačna sila med ploščama stisne penasto gumo. Razmik med ploščama se zmanjša. Ker je $C \propto x^{-1}$, zmanjšanju debeline za $\Delta x/x = 1\ \%$ ustreza zvečanju kapacitete za 1 %. Ker gre za majhno spremembo, lahko predpostavimo, da se sila med ploščama zaradi spremembe debeline spremeni za enak velikostni red $\sim 1\ \%$. Ker v nalogi sprašujemo po približni vrednosti napetost, pri kateri se razmik zmanjša za 1 %, lahko pri računanju sile med ploščama uporabimo kar razdaljo x, kolikor sta plošči narazen, ko kondenzator ni nabit oziroma med ploščama ni električne napetosti. Sila med ploščama kondenzatorja je enaka

$$F = e\,\frac{E_c}{2} = CU_c\,\frac{U_c}{2x}\,, \tag{4}$$

kjer je U_c napetost med ploščama kondenzatorja in E_c jakost električnega polja v kondenzatorju. Električno polje v kondenzatorju je posledica naboja na obeh ploščah, zato je polje, v katerem so naboji na eni plošči, le posledica nabojev na drugi plošči. Zato je električno polje v enečbi za silo ene plošče na drugo enako polovici električnega polja v kondenzatorju.

Silo med ploščama kondenzatorja uravnoveša sila F_Y stisnjene penaste gume na plošči

$$F_Y = SE_Y\frac{\Delta x}{x} = SE_Y\eta\,, \tag{5}$$

kjer smo označili Youngov prožnostni modul penaste gume z E_Y, da se ga loči od električnega polja E_c v kondenzatorju. Ker penasta guma miruje, morata biti sili F in F_Y po velikosti enaki

$$SE_Y\eta = \frac{\varepsilon_0 S}{x}\,\frac{U^2}{2x}\,, \tag{6}$$

kjer smo z U označili napetost na kondenzatorju. Dobimo

$$U = x\sqrt{\frac{2\eta E_Y}{\varepsilon_0}} = 424\,\mathrm{V} \approx 420\,\mathrm{V}. \tag{7}$$

Iskana napetost na viru je

$$U_{\mathrm{vir}} = \frac{R + R_n}{R}\,U = 466{,}4\,\mathrm{V} \approx 470\,\mathrm{V}. \tag{8}$$

[6 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

2. $m = 15$ g, $D = 4{,}0$ cm, $\rho = 8{,}9$ kg/dm^3, $\zeta = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega$m, $B = 10$ mT, $U = 12$ V.

Kos bakra ima znano prostornino $V = \frac{m}{\rho} = 1{,}685 \cdot 10^{-6}$ m^3.

Kos bakra lahko razvlečemo v žice z različnimi dolžinami l. Za presek žic S velja $S = \frac{V}{l} = \pi r^2$, kjer smo z r označili polmer žice z dolžino l. Upor take žice je

$$R = \frac{\zeta l}{S}. \tag{1}$$

Magnetno polje tuljave dolžine L je

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \frac{\mu_0 N U S}{\zeta L l}. \tag{2}$$

[2 t.]

a)

V prvem primeru, ko navijamo na tulec žico tako, da so ovoji tesno en ob drugem, je dolžina žice l povezana s številom ovojev in obsegom tulca $l = N\pi D$, kjer je D premer tulca. Po drugi strani je dolžina tuljave L povezana s polmerom žice r, $L = 2rN$. Iščemo l, zato izrazimo $N = l/(\pi D)$, $L = \frac{2lr}{\pi D}$. Gostota magnetnega polja v taki tuljavi je

$$B = \frac{\mu_0 U \sqrt{V\pi}}{\zeta l^{3/2} 2} = \frac{\mu_0 U}{2\zeta}\sqrt{\frac{m\pi}{\rho}}\, l^{-\frac{3}{2}} \tag{3}$$

in od tu iskana dolžina žice

$$l = \left(\frac{\mu_0 U}{2B\zeta}\sqrt{\frac{m\pi}{\rho}}\right)^{2/3} = 21{,}84\,\text{m} \approx 22\,\text{m}. \tag{4}$$

Naredili smo tuljavo z dolžino $L = 5{,}448\,\text{cm} \approx 5{,}4$ cm in $N = 173{,}8 \approx 174$ ovoji.

[4 t.]

b)

Zdaj je podana dolžina nastale tuljave $L = 15$ cm, število ovojev pa je še vedno odvisno od dolžine žice, $N = l/(\pi D)$.

$$B = \frac{\mu_0 U V}{\zeta L \pi D l} = \frac{\mu_0 U m}{\rho \zeta L \pi D l} \tag{5}$$

in od tu

$$l = \frac{\mu_0 U m}{\pi \rho \zeta L D B} = 7{,}93\,\text{m} \approx 7{,}9\,\text{m}, \tag{6}$$

kar ustreza $N = 63{,}1 \approx 63$ ovojem.

[4 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

3. $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, $E(T) = E_0 - k(T - T_0)$, $E_0 = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Pa, $k = 1{,}0 \cdot 10^{8}$ Pa/K, $T_0 = 22\,^\circ\mathrm{C}$, $T_1 = 65\,^\circ\mathrm{C}$, $\sigma_0 = 25$ MPa.

a)

Označimo napetost s σ. Tirnica je že ob pritrditvi, ko je temperatura enaka T_0, raztegnjena za neko neznano dolžino, torej velja

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma(T_0)}{E(T_0)}. \tag{1}$$

Ko je temperatura enaka T, ostane skupni raztezek enak, vendar je sedaj posledica vsote termičnega raztezka ter učinka napetosti

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma(T)}{E(T)} + \alpha(T - T_0). \tag{2}$$

Pri temperaturi $T_1 = 65\,^\circ\mathrm{C}$ je napetost v tirnici enaka nič

$$\frac{\sigma(T_1)}{E(T_1)} = 0\,, \tag{3}$$

kar nesemo v enačbo (2) in da skupaj z enačbo (1) zvezo

$$\frac{\sigma(T_0)}{E(T_0)} = \alpha(T_1 - T_0) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(T_0) = E_0\alpha(T_1 - T_0) = 1{,}032 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa} = 10{,}3\,\mathrm{MPa} \approx 10\,\mathrm{MPa}. \tag{4}$$

[5 t.]

b)

Ker poznamo vrednost $\sigma(T_0)$, lahko izračunamo temperaturo, pri kateri velja $\sigma(T_2) = 25$ MPa

$$\frac{\sigma(T_0)}{E_0} = \frac{\sigma(T_2)}{E_0 - k(T_2 - T_0)} + \alpha(T_2 - T_0) \tag{5}$$

kar prepišemo v kvadratno enačbo za $\Delta T = T_2 - T_0$

$$-\alpha k(\Delta T)^2 + \left(\alpha E_0 + \frac{\sigma(T_0)k}{E_0}\right)\Delta T + \sigma(T_2) - \sigma(T_0) = 0 \tag{6}$$

z rešitvama $\Delta T' = -58{,}2$ K in $\Delta T'' = 2101$ K. Druga rešitev očitno ni fizikalno smiselna, iz smiselne rešitve dobimo

$$T_2 = T_0 + \Delta T' = -39{,}17\,^\circ\mathrm{C} \approx -39\,^\circ\mathrm{C}. \tag{7}$$

[5 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

4. $a = 3{,}0$ mm, $b = 10$ mm, $d = 0{,}20$ mm $\lambda = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ W/Km, $P_0 = 4{,}0$ mW, $T_0 = 5{,}0\,^\circ$C.

a)

Označimo iskano temperaturo v sredinski celici T_a, temperaturo v šestih sosednjih celicah pa T_1. Toplotni tok P_0, ki ga oddaja čebela, uhaja skozi 6 sten s površino $S = ab = 30$ mm^2 in debelino $d = 0{,}20$ mm v 6 sosednjih celic.

$$P_0 = 6Sj_Q = 6S\,\frac{\lambda(T_a - T_1)}{d} = \frac{6ab\lambda(T_a - T_1)}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad T_a - T_1 = \frac{dP_0}{6ab\lambda} = 1{,}48\,\mathrm{K}. \tag{1}$$

V celicah ovoja ni grelnih teles, zato velja, da je pritekajoči toplotni tok skozi steno med celico ovoja in sredinsko celico enak odtekajočemu toplotnemu toku skozi tri stene, ki posamezno celico ločujejo od zunanjosti. Toplotnega toka med celicami prve okoliške plasti sredinske celice ni, ker so med seboj popolnoma ekvivalentne. Velja $T_a - T_1 = 3(T_1 - T_0)$ oziroma

$$T_1 - T_0 = \frac{T_a - T_1}{3}\,. \tag{2}$$

Od tu hitro ugotovimo

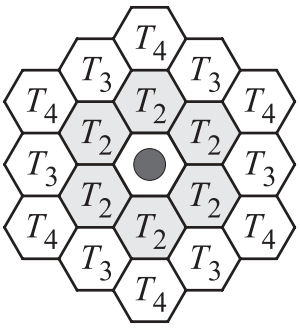
$$T_a - T_0 = (T_a - T_1) + (T_1 - T_0) = \frac{4}{3}(T_a - T_1) = \frac{2}{9}\,\frac{dP_0}{ab\lambda} = 1{,}97\,\mathrm{K} \approx 2{,}0\,\mathrm{K}. \tag{3}$$

Temperatura celice s čebelo, ki ima okoli sebe en ovoj praznih celic, je $T_a = T_0 + (T_a - T_0) = 7{,}0\,^\circ$C.

[4 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

b)
Iskano temperaturo v celici s čebelo označimo T_b. Ko ima osrednja celica s čebelo okoli sebe dva ovoja celic, so celice prvega ovoja med seboj še vedno vse ekvivalentne in ja zato v vseh šestih celicah enaka temperatura T_2. Celice zunanjega ovoja med seboj niso vse ekvivalentne. V nekatere toplota priteka iz dveh celic notranjega ovoja, temperaturo v teh označimo T_3. V nekatere celice zunanjega ovoja toplota priteka samo iz ene celice notranjega ovoja, temperaturo v teh označimo T_4. Na sliki so v celicah napisane temperature, da se bolje vidi, v katerih celicah zunanjega ovoja je temperatura T_3 in v katerih T_4. Očitno mora veljati



$$T_b > T_2 > T_3 > T_4 > T_0\,. \tag{4}$$

Zapišimo toplotno bilanco za posamezne celice. Za celico s temperaturo T_b velja

$$\frac{P_0}{6} = S\,\frac{\lambda(T_b - T_2)}{d} = \frac{ab\lambda(T_b - T_2)}{d}\,. \tag{5}$$

Očitno velja

$$T_b - T_2 = \frac{dP_0}{6ab\lambda} = T_a - T_1. \tag{6}$$

Celica s temperaturo T_3 prejema toploto iz dveh celic s temperaturo T_2, jo oddaja v dve celici s temperaturo T_4 in skozi dve steni še v zunanjost s temperaturo T_0. Velja

$$2(T_2 - T_3) = 2(T_3 - T_4) + 2(T_3 - T_0)\,. \tag{7}$$

Podoben razmislek da za celico, v kateri je temperatura T_4

$$(T_2 - T_4) + 2(T_3 - T_4) = 3(T_4 - T_0)\,. \tag{8}$$

Nazadnje lahko podobno zapišemo še za celico, v kateri je tempertura T_2

$$(T_b - T_2) = 2(T_2 - T_3) + (T_2 - T_4)\,. \tag{9}$$

S precej truda razrešimo ta sistem treh enačb (7), (8), (9) s tremi neznankami $\Delta T_2 = T_2 - T_0$, $\Delta T_3 = T_3 - T_0$, $\Delta T_4 = T_4 - T_0$ in eno znano razliko temperatur $\Delta T_b = T_b - T_2$ iz enačbe (6). Enačbe (7), (8) in (9) prepišemo v

$$\begin{aligned} 1\Delta T_2 - 3\Delta T_3 + 1\Delta T_4 &= 0 && (10)\\ 1\Delta T_2 + 2\Delta T_3 - 6\Delta T_4 &= 0 && (11)\\ 3\Delta T_2 - 2\Delta T_3 - 1\Delta T_4 &= \Delta T_b && (12) \end{aligned}$$

Na koncu dobimo

$$\Delta T_2 = \frac{16}{29}\,\Delta T_b\,, \qquad \Delta T_3 = \frac{7}{29}\,\Delta T_b\,, \qquad \Delta T_4 = \frac{5}{29}\,\Delta T_b\,. \tag{13}$$

Temperatura v celici s čebelo je

$$T_b = T_0 + \Delta T_2 + \Delta T_b = T_0 + \frac{45}{29}\,\Delta T_b = T_0 + \frac{45}{29}\,\frac{dP_0}{6ab\lambda} = T_0 + \frac{15}{58}\,\frac{dP_0}{ab\lambda} = 7{,}3\,^\circ\mathrm{C}. \tag{14}$$

[6 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

1. $T = 3{,}0$ K, $n = 4{,}0 \cdot 10^9$ m^{-3}, $M = 2{,}0$ kg/kmol,

a)

Kinetična teorija plinov da za naš primer

$$W_\mathrm{k} = \frac{3kT}{2} = 6{,}21 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}, \tag{1}$$

kjer je $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 193{,}03\,\mathrm{m/s} = 193\,\mathrm{m/s} \approx 190\,\mathrm{m/s}, \tag{2}$$

kjer je $m = M/N_A = 3{,}33 \cdot 10^{-27}$ kg masa ene molekule vodika H_2 in $N_A = 6{,}0 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}.

[4 t.]

b)

Oceno, kdaj se bo oblak začel sesedati, naredimo na osnovi primerjave potencialne energije molekule na robu oblaka in povprečne kinetične energije iste molekule. Ta razmislek je enak temu, da ima molekula ubežno hitrost.

$$\frac{3kT}{2} \leq \frac{mm_0G}{r}, \tag{3}$$

kjer je $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 gravitacijska konstanta, r iskani mejni polmer oblaka in m_0 masa oblaka

$$m_0 = nmV_0 = n\frac{M}{N_A}\frac{4\pi r^3}{3}. \tag{4}$$

Izraz za m_0 vstavimo v (3) in dobimo

$$\frac{3kT}{2} \leq \frac{4\pi GnM^2r^2}{3N_A^2}. \tag{5}$$

Končni pogoj, da se oblak začne sesedati v zvezdo, je

$$r \geq \frac{3N_A}{2M}\sqrt{\frac{kT}{2\pi nG}} = 2{,}23 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}. \tag{6}$$

[6 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

2. $m = 15$ g, $D = 4{,}0$ cm, $\rho = 8{,}9$ kg/dm^3, $\zeta = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega$m, $B = 10$ mT, $U = 12$ V.

Kos bakra ima znano prostornino $V = \frac{m}{\rho} = 1{,}685 \cdot 10^{-6}$ m^3.

Kos bakra lahko razvlečemo v žice z različnimi dolžinami l. Za presek žic S velja $S = \frac{V}{l} = \pi r^2$, kjer smo z r označili polmer žice z dolžino l. Upor take žice je

$$R = \frac{\zeta l}{S}. \tag{1}$$

Magnetno polje tuljave dolžine L je

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \frac{\mu_0 N U S}{\zeta L l}. \tag{2}$$

[2 t.]

a)

V prvem primeru, ko navijamo na tulec žico tako, da so ovoji tesno en ob drugem, je dolžina žice l povezana s številom ovojev in obsegom tulca $l = N\pi D$, kjer je D premer tulca. Po drugi strani je dolžina tuljave L povezana s polmerom žice r, $L = 2rN$. Iščemo l, zato izrazimo $N = l/(\pi D)$, $L = \frac{2lr}{\pi D}$. Gostota magnetnega polja v taki tuljavi je

$$B = \frac{\mu_0 U \sqrt{V\pi}}{\zeta l^{3/2} 2} = \frac{\mu_0 U}{2\zeta}\sqrt{\frac{m\pi}{\rho}}\, l^{-\frac{3}{2}} \tag{3}$$

in od tu iskana dolžina žice

$$l = \left(\frac{\mu_0 U}{2B\zeta}\sqrt{\frac{m\pi}{\rho}}\right)^{2/3} = 21{,}84\,\text{m} \approx 22\,\text{m}. \tag{4}$$

Naredili smo tuljavo z dolžino $L = 5{,}448\,\text{cm} \approx 5{,}4$ cm in $N = 173{,}8 \approx 174$ ovoji.

[4 t.]

b)

Zdaj je podana dolžina nastale tuljave $L = 15$ cm, število ovojev pa je še vedno odvisno od dolžine žice, $N = l/(\pi D)$.

$$B = \frac{\mu_0 U V}{\zeta L \pi D l} = \frac{\mu_0 U m}{\rho \zeta L \pi D l} \tag{5}$$

in od tu

$$l = \frac{\mu_0 U m}{\pi \rho \zeta L D B} = 7{,}93\,\text{m} \approx 7{,}9\,\text{m}, \tag{6}$$

kar ustreza $N = 63{,}1 \approx 63$ ovojem.

[4 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

3. $M = 240$ g, $m = 60$ g, $h = 30$ cm, $r = 10$ cm, $N = 2$.

a)

Recimo, da se kapsula z maso m med gibanjem po vijačni cevi vrti v smeri urinih kazalcev s kotno hitrostjo ω. Potem se mora zaradi ohranitve vrtilne količine valj z maso M in polmerom R vrteti v nasprotni smeri s kotno hitrostjo Ω. Kotni hitrosti povezuje ohranitev vrtilne količine

$$mR^2\omega = J\Omega\,, \tag{1}$$

kjer je $J = \frac{1}{2}Mr^2$ vztrajnostni moment valja za vrtenje okoli simetrijske osi, medtem ko kapsulo obravnavamo kot točkasto telo z vztrajnostnim momentom mR^2, saj se ves čas spuščanja po cevi giblje na razdalji R od osi vrtenja. Poleg vrtilne količine se ohranja tudi energija. Med spuščanjem po cevi se kapsuli manjša potencialna energija. Ko se spusti za z, je potencialna energija manjša za $\Delta W_p = mgz$. Na račun te potencialne energije imata kapsula in valj kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\,. \tag{2}$$

Hitrost kapsule ima dve komponenti, s hitrostjo v_z se spušča navpično navzdol, istočasno z obodno hitrostjo $v = r\omega$ kroži, saj se giblje po vijačnici. Hitrost v in kotna hitrost ω sta obe izraženi v laboratorijskem ne-vrtečem se sistemu.

Zdaj moramo povezati gibanje kapsule v navpični smeri s trenutno hitrostjo v_z z kroženjem, ki je posledica obeh vrtenj, tako vrtenja valja "nazaj" s kotno hitrostjo Ω kot vrtenja kapsule naprej s kotno hitrostjo ω zaradi drsenja po vijačni cevi. V kratkem času dt se kapsula spusti za $dz = v_z dt$. V istem času se kapsula glede na valj zavrti za kot $d\varphi = (\omega + \Omega)dt$, kar po vijačni cevi drsi naprej, valj pa se vrti nazaj, tako da se kapsuli cev "spodmika". Ker je kapsula v cevi, se, ko se glede na valj zavrti za $d\varphi$, spusti za tak dz, da ostaja v cevi.

Iz podatka, da vijačnica po obodu naredi natančno $N = 2$ obrata dobimo zvezo

$$dz = \frac{d\varphi}{2\pi}\,\frac{h}{N}\,, \tag{3}$$

kjer je h višina valja. Upoštevaje $d\varphi = (\omega + \Omega)dt$ dobimo

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \frac{(\omega + \Omega)h}{2N\pi} = 0{,}6807\,\mathrm{m/s} \approx 0{,}68\,\mathrm{m/s}. \tag{4}$$

Iz enačbe (1) izrazimo razmerje hitrosti

$$\Omega = \omega\frac{mr^2}{J} = \frac{2m}{M}\,\omega = \gamma\omega\,, \tag{5}$$

kjer smo vpeljali brezdimenzijsko konstanto $\gamma = 2m/M = 1/2$. Zdaj vse skupaj nesemo v enačbo za ohranitev energije, ko je kapsula na spodnjem krajišču cevi. Dobimo

$$mgh = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\left(\frac{2m}{M}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_z^2\,. \tag{6}$$

enačbo poenostavimo in dobimo

$$2gh = \omega^2 r^2\left[1 + \frac{2m}{M} + \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2\left(\frac{h}{N2\pi r}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Označimo

$$\beta = \frac{h}{N2\pi r} = 0{,}2387\,. \tag{8}$$

©Tekmovalna komisija pri DMFA

Enačbo (7) obrnemo in kompaktno zapišemo

$$\omega^2 = \frac{2gh}{r^2}\left[1+\gamma+\beta^2(1+\gamma)^2\right]^{-1} \tag{9}$$

in končno

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{r}\left[1+\gamma+\beta^2(1+\gamma)^2\right]^{-1/2} \tag{10}$$

ter

$$\Omega = \gamma\omega = \frac{\gamma\sqrt{2gh}}{r}\left[1+\gamma+\beta^2(1+\gamma)^2\right]^{-1/2} = 9{,}5\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{11}$$

[8 t.]

b)
Kot ϑ, pod katerim kapsula zapusti cev, dobimo iz relacije

$$\tan\vartheta = \frac{v_z}{r\omega} = \frac{h(\omega+\Omega)}{2N\pi r\omega} = \frac{h\omega(1+\gamma)}{2N\pi r\omega} = \beta(1+\gamma) = 0{,}358. \tag{12}$$

Končno dobimo $\vartheta = 19{,}7^\circ \approx 20^\circ$ in hitrost

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^2} = 2{,}019\,\mathrm{m/s} \approx 2{,}0\,\mathrm{m/s}. \tag{13}$$

[2 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

4. $a_1 = 10\ \mathrm{km}$, $a_2 = 3{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{m} \approx \infty$, $f = 40\ \mathrm{cm}$, $2r = 4{,}0\,\mu\mathrm{m}$, $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$.

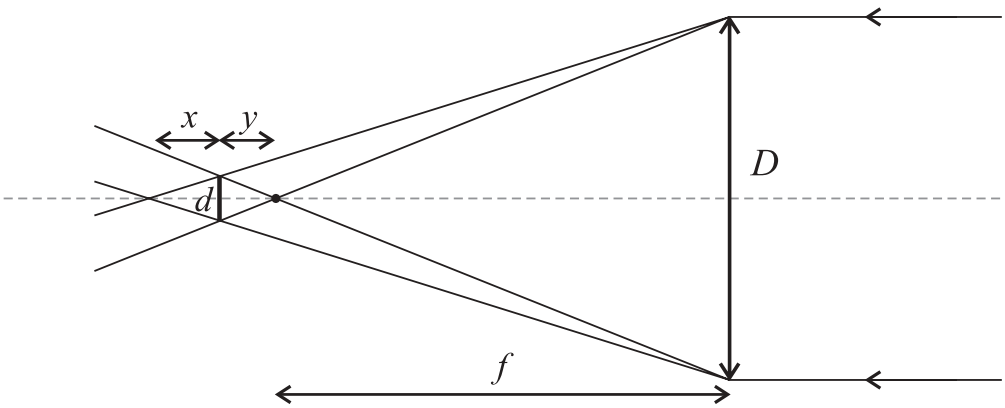
a)

Predmet, ki je na razdalji a pred lečo objektiva, se preslika na razdaljo $b = af/(a-f)$ za lečo. Luna je tako zelo daleč, da privzamemo

$$b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} \approx f\,. \tag{1}$$

Za letalo izračunamo, da ostra slika nastane

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} \approx f\left(1 + \frac{f}{a_1}\right) = f + x + y\,. \tag{2}$$



Na sliki je skicirana situacija, ki jo opazujemo. Slika Lune nastane v gorišču, medtem ko je slika letala za $x + y$ za goriščem objektiva.

$$x + y \approx f\,\frac{f}{a_1}\,. \tag{3}$$

Iz podobnih trikotnikov dobimo

$$\frac{d}{D} = \frac{y}{f} = \frac{x}{f(1 + f/a_1)} \approx \frac{x}{f} \qquad \Longrightarrow \qquad x \approx y\,. \tag{4}$$

V enačbi (4) je d premer krožca, ki nastaneta iz točkastega objekta na Luni in na letalu, če je senzor postavljen na to optimalno mesto. Premer objektiva je na sliki označen z D. Upoštevaje približek $x = y$ dobimo

$$x + y = 2x = \frac{f^2}{a_1} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{f^2}{2a_1}\,. \tag{5}$$

Da bo slika ostra, mora biti d manjši kot premer slikovne pike $2r = 4{,}0\,\mu\mathrm{m}$

$$2r \geq d = \frac{xD}{f} = \frac{Df^2}{2a_1 f} = \frac{Df}{2a_1}\,. \tag{6}$$

Od tu dobimo

$$D \leq 2r\,\frac{2a_1}{f} = \frac{4ra_1}{f} = 20\,\mathrm{cm}. \tag{7}$$

[7 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA

b)
V tem delu še vedno upoštevamo $x = y$, hkrati pa moramo k premeru krogca zaradi napačne pozicije senzorja dodati še razmazanost zaradi uklona. Velja

$$2r \geq d + u = \frac{Df}{2a_1} + \frac{1{,}22f\lambda}{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2r \geq \frac{Df}{2a_1} + \frac{1{,}22f\lambda}{D}\,, \tag{8}$$

kjer je u prispevek k razmazanosti zaradi uklona. Neenačbo (8) preoblikujemo v kvadratno neenačbo za D

$$D^2 - \frac{4a_1 r}{f}\,D + 2{,}44a_1\lambda \leq 0\,. \tag{9}$$

Dovoljene vrednosti D so med ničlama zgornje kvadratne enačbe, ko gledamo mejni primer in "$\leq$" nadomestimo z "$=$". Z izbiro vse večjega f ožamo interval dovoljenih D in pridemo v skrajnem primeru, ko bo f največji možni, do ene same dovoljene vrednosti premera objektiva D. Ta pogoj je ekvivalenten temu, da sta obe ničli kvadratne enačbe enaki, kar pomeni, da mora biti diskriminanta kvadratne enačbe enaka nič

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_1 = x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^2 - 4ac = 0\,. \tag{10}$$

Od tu izračunamo največjo možno goriščno razdaljo objektiva, da bo slika ostra, če upoštevamo tudi uklon

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{4a_1 r}{f_0}\right)^2 - 4 \cdot 2{,}44a_1\lambda = 0 \tag{11}$$

in končno za največji dovoljeni f_0

$$f_0 = 2r\sqrt{\frac{a_1}{2{,}44\lambda}} = 36{,}2\,\mathrm{cm} \approx 36\,\mathrm{cm}. \tag{12}$$

[3 t.]

©Tekmovalna komisija pri DMFA