

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3

A1. Oliver je 100-krat vrgel običajno igralno kocko, zmnožil vsa števila, ki so bila na zgornji ploskvi kocke pri teh 100 metih, in dobil produkt 6^{70} . Najmanj kolikokrat je bilo število 6 na zgornji ploskvi kocke pri teh 100 metih?

- (A) 10 (B) 12 (C) 24 (D) 30 (E) 35

A2. Borut je narisal preglednico velikosti 2×7 (glej sliko). Najmanj koliko polj preglednice mora Borut pobarvati, da bo vsako nepobarvano polje preglednice imelo skupno stranico s pobarvanim poljem?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

A3. Koliko celih števil k ima lastnost, da je število $k + 6$ celoštevilski večkratnik števila $k - 6$?

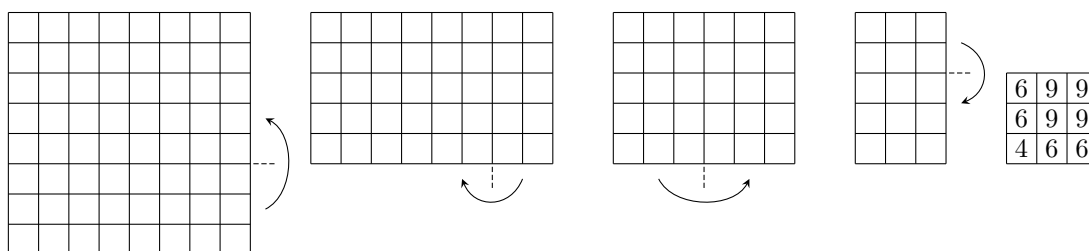
- (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

B1. Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo enačbi

$$\left(\frac{x^2 - 13}{2x + 1}\right)^2 - 8 \cdot \frac{x^2 - 13}{2x + 1} = 48.$$

B2. Določi vse peterice praštevil $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5$, za katere vsako izmed teh praštevil deli vsoto preostalih štirih.

B3. Timotej je imel list karirastega papirja z 8×8 kvadratki. List papirja je nekajkrat prepognil po eni izmed črt na listu, tako da je na koncu dobil kvadraten kos s 3×3 kvadratki. Prepognjen kos papirja je nato položil na mizo in na vsakega izmed njegovih 9 kvadratkov zapisal, koliko slojev papirja je v tem kvadratu. Slika prikazuje en možen primer prepogibanja lista in pripadajoči zapis števil slojev papirja.



(a) Najdi primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A .

(b) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa B .

(c) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa C .

8	8	16
6	6	12
2	2	4

A

12	12	8
12	6	6
8	6	2

B

12	6	6
6	8	8
6	8	4

C

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3

A1. Število je skoraj kvadratno, če je za 1 manjše od kvadrata naravnega števila. Na primer, število 2024 je skoraj kvadratno, ker je $2024 = 45^2 - 1$. Koliko je razlika med najmanjšim skoraj kvadratnim številom, ki je večje od 2024, in največjim skoraj kvadratnim številom, ki je manjše od 2024?

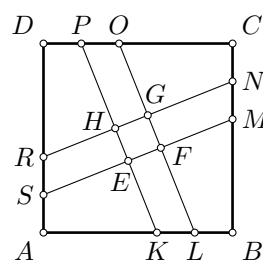
- (A) 90 (B) 180 (C) 225 (D) 360 (E) 405

A2. Kmet Jernej ima ovce in kokoši. Če bi vsaka kokoš imela 4 noge, bi Jernejeve živali imele skupaj 180 nog. Nekega dne je kmet Jernej povedal spodnjih 5 izjav. Pri tem se je 4-krat zlagal in 1-krat povedal resnico. Katera Jernejeva izjava je resnična?

- (A) Imam 25 kokoši. (B) Moje ovce imajo skupaj 80 nog.
(C) Vse moje živali imajo skupaj 130 nog. (D) Imam 15 ovc.
(E) Imam 50 kokoši.

A3. Vsaka od daljic KP , LO , MS in NR razdeli kvadrat $ABCD$ na 2 dela, katerih ploščini sta v razmerju 2 : 3. Daljici KP in LO sta vzporedni ter daljici MS in NR sta vzporedni (glej sliko). Dolžina stranice kvadrata $ABCD$ je enaka 5 cm, hrati pa je $|CN| = |DP| = 1$ cm. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina štirikotnika $EFGH$?

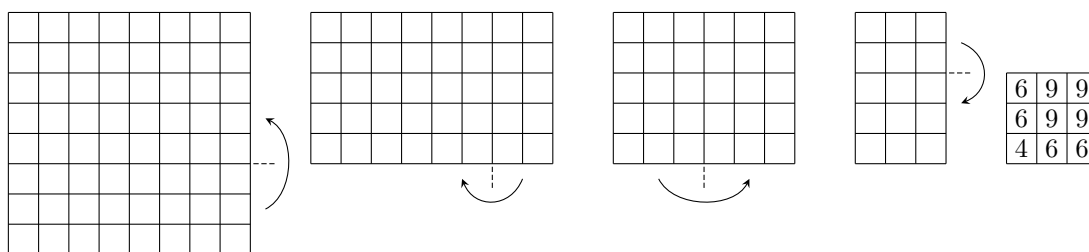
- (A) $\frac{25}{29}$ (B) $\frac{26}{29}$ (C) $\frac{24}{29}$ (D) $\frac{27}{29}$ (E) $\frac{28}{29}$



B1. Dan je trikotnik ABC , za katerega velja $\angle BAC < \angle CBA$. Središče trikotniku ABC včrtane krožnice označimo z I . Trikotniku ABI očrtana krožnica seka premico AC v točkah A in D , premico BC pa v točkah B in E . Dokaži, da je premica AE vzporedna premici BD .

B2. Določi vse peterice praštevil $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5$, za katere vsako izmed teh praštevil deli vsoto preostalih štirih.

B3. Timotej je imel list karirastega papirja z 8×8 kvadratki. List papirja je nekajkrat prepognil po eni izmed črt na listu, tako da je na koncu dobil kvadraten kos s 3×3 kvadratki. Prepognjen kos papirja je nato položil na mizo in na vsakega izmed njegovih 9 kvadratkov zapisal, koliko slojev papirja je v tem kvadratu. Slika prikazuje en možen primer prepogibanja lista in pripadajoči zapis števil slojev papirja.



(a) Najdi primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A .

(b) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa B .

(c) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa C .

8	8	16
6	6	12
2	2	4

A

12	12	8
12	6	6
8	6	2

B

12	6	6
6	8	8
6	8	4

C

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3

A1. Dolžina stranice enakostraničnega trikotnika ABC je 120 cm. Daljice AD , DE in EF razdelijo trikotnik ABC na 4 trikotnike, ki imajo vsi enako ploščino (glej sliko). Koliko centimetrov je dolžina daljice BF ?

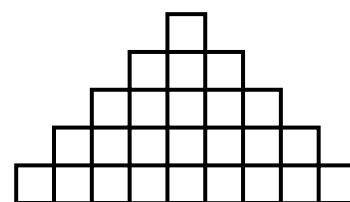
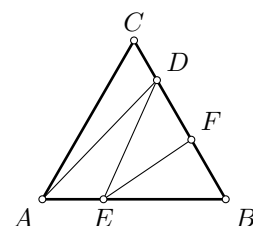
- (A) 42 (B) 45 (C) 46 (D) 48 (E) 50

A2. Aleš je narisal risbo iz enakih kvadratkov velikosti 1×1 (glej sliko). Na risbo želi položiti nekaj ploščic velikosti 2×1 , tako da bo vsaka ploščica v celoti ležala na 2 kvadratkah velikosti 1×1 in se nobeni 2 ploščici ne bosta prekrivali. Največ koliko ploščic lahko Aleš položi na risbo?

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

A3. Na ekipnem tekmovanju v programiranju je 5 prijateljic osvojilo 1. nagrado v višini 4950 evrov. Prijateljice so se odločile, da si bodo nagrado razdelile v enakem razmerju, kot je razmerje njihove starosti v letih. Starosti prijateljic v letih so zaporedna naravna števila, pri čemer nobeni dve prijateljici nista enako stari. Najstarejši prijateljici sta skupaj dobili 2070 evrov. Koliko let je stara najmlajša prijateljica?

- (A) 17 (B) 19 (C) 27 (D) 29 (E) 31



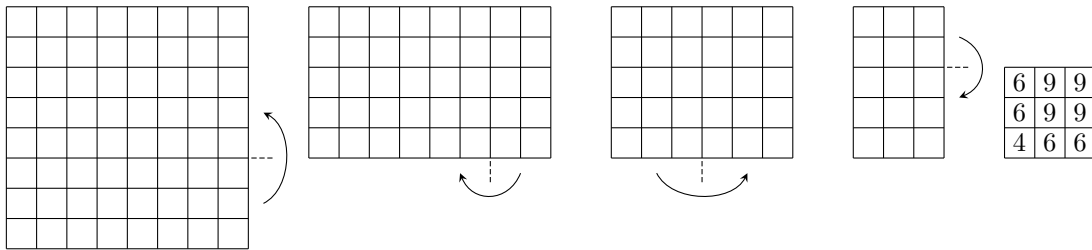
B1. Razmerje notranjih kotov trikotnika ABC je enako $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. Dokaži, da za dolžine stranic tega trikotnika velja enakost

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = 2.$$

Opomba. Uporabljene so običajne oznake za notranje kote in dolžine stranic trikotnika, tj. a je dolžina stranice nasproti kota α , b je dolžina stranice nasproti kota β in c je dolžina stranice nasproti kota γ .

B2. Določi vse peterice praštevil $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5$, za katere vsako izmed teh praštevil deli vsoto preostalih štirih.

B3. Timotej je imel list karirastega papirja z 8×8 kvadratki. List papirja je nekajkrat prepognil po eni izmed črt na listu, tako da je na koncu dobil kvadraten kos s 3×3 kvadratki. Prepognjen kos papirja je nato položil na mizo in na vsakega izmed njegovih 9 kvadratkov zapisal, koliko slojev papirja je v tem kvadratu. Slika prikazuje en možen primer prepogibanja lista in pripadajoči zapis števil slojev papirja.



- (a) Najdi primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A .
 (b) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa B .
 (c) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa C .

8	8	16
6	6	12
2	2	4

A

12	12	8
12	6	6
8	6	2

B

12	6	6
6	8	8
6	8	4

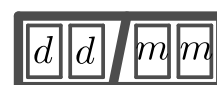
C

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

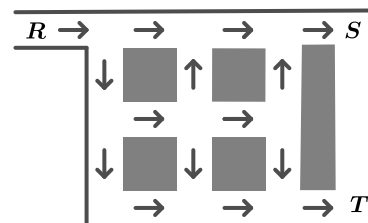
A1	A2	A3

A1. Marta želi imeti na hladilniku vsak dan izpisan datum s pomočjo 4 magnetnih ploščic, tako dan kot tudi mesec vsak z 2 magnetnima ploščicama, saj je na vsaki magnetni ploščici samo 1 številka (glej sliko). Najmanj koliko magnetnih ploščic potrebuje Marta, da bo lahko vsak dan v letu na hladilnik izpisala datum?



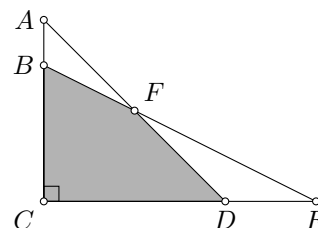
- (A) 20 (B) 23 (C) 25 (D) 29 (E) 31

A2. V centru mesta se po vsaki ulici lahko pelje samo v eni smeri, kot je označeno s puščico (glej sliko). Ana se na vsakem križišču z enako verjetnostjo odloči za eno izmed ulic, po kateri lahko nadaljuje pot v dovoljeni smeri. Če Ana začne pot skozi center mesta v točki R , kolikšna je verjetnost, da zapusti center mesta v točki T ?



- (A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

A3. Trikotnika ACD in BCE sta pravokotna, njuni hipotenuzi AD in BE pa se sekata v točki F (glej sliko). Naj bo $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 8$ cm in $|DE| = 4$ cm. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina štirikotnika $BCDF$?



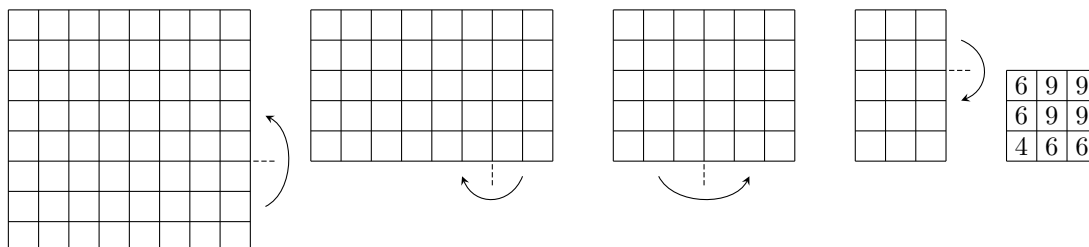
- (A) 24 (B) 28 (C) 32 (D) 36 (E) 48

B1. Poišči vse pare realnih števil x in y , ki zadoščajo sistemu enačb

$$\begin{aligned} 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots &= y + \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6}, \\ \sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \sin^7 x + \dots &= |y| + \frac{3\sqrt{2} - 4}{6}. \end{aligned}$$

B2. Določi vse peterice praštevil $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5$, za katere vsako izmed teh praštevil deli vsoto preostalih štirih.

B3. Timotej je imel list karirastega papirja z 8×8 kvadratki. List papirja je nekajkrat prepognil po eni izmed črt na listu, tako da je na koncu dobil kvadraten kos s 3×3 kvadratki. Prepognjen kos papirja je nato položil na mizo in na vsakega izmed njegovih 9 kvadratkov zapisal, koliko slojev papirja je v tem kvadratu. Slika prikazuje en možen primer prepogibanja lista in pripadajoči zapis števil slojev papirja.



- (a) Najdi primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A .
 (b) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa B .
 (c) Dokaži, da Timotej ni mogel dobiti zapisa C .

8	8	16
6	6	12
2	2	4

A

12	12	8
12	6	6
8	6	2

B

12	6	6
6	8	8
6	8	4

C

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
A	B	E

A1. Opazimo, da je $4 \cdot 3 \cdot 3 = 6^2$, kar je najboljši način, kako dobimo veliko 6-ic v produktu, brez da bi na kocki padlo 6. S 30 trojicami metov 4, 3, 3 in 10 meti 6, kar je skupaj 100 metov, dobi Oliver produkt $6^{2 \cdot 30} \cdot 6^{10} = 6^{70}$. Če bi padla 6 v $k < 10$ metih, potem bi moral Oliver z ostalimi meti doseči 6^{70-k} , za kar bi morala v natanko $70 - k$ metih pasti 3, za preostanek 2^{70-k} pa bi Oliver potreboval vsaj $\frac{70-k}{2}$ metov. Skupaj bi tako potreboval vsaj $k + (70 - k) + \frac{70-k}{2} = 105 - \frac{k}{2} > 100$ metov.

A2. Vsako pobarvano polje ima skupno stranico z največ 3 nepobarvanimi polji, torej z 1 pobarvanim poljem Borut zadosti pogoju za največ 4 polja preglednice - 3 nepobarvana in 1 pobarvano, za katerega naloga ničesar ne zahteva. Ker ima preglednica 14 polj, mora Borut pobarvati vsaj 4 polja. Da to tudi zadošča, prikazuje slika.

A3. Število $k = 6$ očitno ne zadošča pogoju, zato je $k - 6 \neq 0$. Iz pogoja naloge sledi, da je $\frac{k+6}{k-6} = 1 + \frac{12}{k-6}$ celo število, zato mora $k - 6$ deliti 12. Število 12 ima 12 celoštevilskih deliteljev - 6 pozitivnih in 6 negativnih. Pogoju torej zadošča 12 celih števil k .

B1. V enačbo vpeljemo novo spremenljivko $t = \frac{x^2-13}{2x+1}$ in dobimo enačbo $t^2 - 8t = 48$. Enačbo sedaj preuredimo do

$$t^2 - 8t - 48 = 0$$

in nato levo stran razstavimo

$$(t - 12)(t + 4) = 0.$$

Rešitvi te enačbe sta $t = 12$ in $t = -4$. Obravnavajmo vsak primer posebej.

Če je $t = 12$, iz definicije spremenljivke t dobimo $\frac{x^2-13}{2x+1} = 12$. Slednjo enačbo pomnožimo z $2x + 1$, da dobimo $x^2 - 13 = 24x + 12$, in jo nato poenostavimo do

$$x^2 - 24x - 25 = 0.$$

Levo stran zopet razstavimo $(x - 25)(x + 1) = 0$ in razberemo rešitvi $x = 25$ in $x = -1$.

Če pa je $t = -4$, dobimo enačbo $\frac{x^2-13}{2x+1} = -4$. Zopet jo pomnožimo z $2x + 1$, da dobimo $x^2 - 13 = -8x - 4$, in jo preuredimo v

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$

Levo stran razstavimo $(x + 9)(x - 1) = 0$ in preberemo rešitvi $x = -9$ in $x = 1$.

Dobili smo rešitve $x = 25$, $x = -1$, $x = -9$ in $x = 1$, preizkus pa pokaže, da vsa ta števila res zadoščajo dani enačbi.

2. način. Enačbo pomnožimo z $(2x + 1)^2$, da dobimo

$$(x^2 - 13)^2 - 8(x^2 - 13)(2x + 1) = 48(2x + 1)^2.$$

Dvočlenike zmnožimo

$$(x^4 - 26x^2 + 169) - 8(2x^3 + x^2 - 26x - 13) = 48(4x^2 + 4x + 1),$$

odpravimo oklepaje

$$x^4 - 26x^2 + 169 - 16x^3 - 8x^2 + 208x + 104 = 192x^2 + 192x + 48$$

in enačbo poenostavimo do

$$x^4 - 16x^3 - 226x^2 + 16x + 225 = 0.$$

Člene na levi strani združimo v dva oklepaja

$$(x^4 - 226x^2 + 225) - (16x^3 - 16x) = 0$$

in oba oklepaja razstavimo

$$(x^2 - 225)(x^2 - 1) - 16x(x^2 - 1) = 0.$$

Nato izpostavimo skupni faktor

$$(x^2 - 1)(x^2 - 16x - 225) = 0,$$

in oba oklepaja zopet razstavimo

$$(x - 1)(x + 1)(x - 25)(x + 9) = 0.$$

Rešitve te enačbe so torej $x = 25$, $x = -9$, $x = 1$ in $x = -1$, preizkus pa pokaže, da vse te rešitve zadoščajo tudi prvotni enačbi.

3. način. Enačbo pomnožimo z $(2x + 1)^2$, da dobimo

$$(x^2 - 13)^2 - 8(x^2 - 13)(2x + 1) = 48(2x + 1)^2.$$

V enačbo vpeljemo novi spremenljivki $a = x^2 - 13$ in $b = 2x + 1$ in dobimo enačbo

$$a^2 - 8ab = 48b^2$$

oziroma

$$a^2 - 8ab - 48b^2 = 0.$$

Izraz lahko razstavimo, da dobimo

$$(a - 12b)(a + 4b) = 0.$$

Primeri $a - 12b = 0$ in $a + 4b = 0$ obravnavamo posebej. Če je $a - 12b = 0$, iz definicije spremenljivk a in b sledi

$$(x^2 - 13) - 12(2x + 1) = 0,$$

kar lahko preuredimo v

$$x^2 - 24x + 25 = 0.$$

Levo stran razstavimo, da dobimo $(x - 25)(x + 1) = 0$ in razberemo rešitvi $x = 25$ in $x = -1$. Če pa je $a + 4b = 0$, iz definicije spremenljivk a in b sledi

$$(x^2 - 13) + 4(2x + 1) = 0,$$

kar lahko preuredimo v

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$

Levo stran zopet razstavimo, da dobimo $(x + 9)(x - 1) = 0$ in razberemo rešitvi $x = -9$ in $x = 1$. Rešitve te enačbe so torej $x = 25$, $x = -9$, $x = 1$ in $x = -1$, preizkus pa pokaže, da vse te rešitve zadoščajo tudi prvotni enačbi.

1. način.

Vpeljava nove spremenljivke t in rešitev kvadratne enačbe $t^2 - 8t = 48$ 2 točki
 Obravnava problema $\frac{x^2-13}{2x+1} = 12$ 2 točki
 Obravnava problema $\frac{x^2-13}{2x+1} = -4$ 2 točki
 Preizkus rešitev ali argument, da nobena od rešitev ni $x = -\frac{1}{2}$ 1 točka

2. način.

Prevedba enačbe na $x^4 - 16x^3 - 226x^2 + 16x + 225 = 0$ 2 točki
 Zapis izraza kot produkt dveh kvadratnih členov 2 točki
 Zapis izraza kot produkt štirih linearnih členov 2 točki
 Preizkus rešitev ali argument, da nobena od rešitev ni $x = -\frac{1}{2}$ 1 točka

3. način.

Vpeljava novih spremenljivk a in b ter razcep $a^2 - 8ab - 48b^2 = (a - 12b)(a + 4b)$... 2 točki
 Obravnava problema $(x^2 - 13) - 12(2x + 1) = 0$ 2 točki
 Obravnava problema $(x^2 - 13) + 4(2x + 1) = 0$ 2 točki
 Preizkus rešitev ali argument, da nobena od rešitev ni $x = -\frac{1}{2}$ 1 točka

B2. Naj bo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Pogoj naloge pove, da p_n deli $S - p_n$ za vsak $n \leq 5$. To pomeni, da p_n deli tudi S za vsak $n \leq 5$. Torej je S deljiv s produktom vseh različnih praštevil p_n . Ločimo primere, glede na to, koliko različnih praštevil je med p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

- Če je vseh 5 praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 enakih p , potem je pogoj iz naloge očitno izpolnjen, saj p deli $4p$.
- Če sta med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 natanko 2 različni praštevili p in q , kjer je $p < q$, potem pq deli S . Ker so praštevila urejena, imamo naslednje 4 možnosti. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, q, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = p + 4q$. Od tod sledi, da q deli p , kar pa ni mogoče, saj sta praštevili p in q različni. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = 2p + 3q$. Ker sta praštevili p in q različni od tod sledi, da p deli 3 in q deli 2. Torej je $p = 3$ in $q = 2$, kar pa je v protislovju s predpostavko $p < q$. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, q, q)$, tedaj pq deli $S = 3p + 2q$. Podobno kot prej, od tod sledi, da p deli 2 in q deli 3, zato je $p = 2$ in $q = 3$. Tako dobimo rešitev $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$, ki res ustreza pogoju naloge. Če pa je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, q)$, tedaj pq deli $S = 4p + q$. Od tod sklepamo, da p deli q , kar pa ni mogoče, ker sta praštevili p in q različni.
- Če so med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 vsaj 3 različna praštevila, označimo največja 3 izmed njih s p, q in r , kjer je $p < q < r$. Tedaj pqr deli S , zato je $pqr \leq S \leq 5r$. Toda $p \geq 2$ in $q \geq 3$, zato je $pqr \geq 6r$, kar nam da protislovje $6r \leq 5r$. V tem primeru zato ni rešitev.

Vse rešitve naloge so torej $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$, kjer je p poljubno praštevilo, in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$.

2. način. Enako kot v prvi rešitvi sklepamo, da vsaka peterica enakih praštevil ustreza pogoju naloge. Sedaj predpostavimo, da niso vsa praštevila enaka. Iz pogoja o velikostih tako dobimo $p_1 < p_5$ in torej $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 < 4p_5$. Ker pa p_5 deli to vsoto, je ta vsota lahko samo $p_5, 2p_5$ ali $3p_5$. Tako dobimo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq 3p_5$. Tako kot v prvi rešitvi označimo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Vidimo, da je $p_5 < S \leq 4p_5$. Ker pa p_5 deli vsoto ostalih štirih praštevil, to pomeni, da p_5 deli tudi S , zato lahko S zavzame samo vrednosti $2p_5, 3p_5$ in $4p_5$. Ker mora tudi p_1 deliti S , je torej p_1 lahko samo 2 ali 3. Opazimo tudi, da sta v vseh primerih p_1 in p_5 pravzaprav edini praštevili, ki delita S . Tako lahko sklepamo, da je vsako izmed praštevil p_2, p_3 in p_4 enako ali p_1 ali p_5 , saj tudi ta delijo S . Sedaj ločimo primere glede na vrednost p_1 , nato pa še glede na to, koliko praštevil je enakih p_1 in koliko je enakih p_5 .

1. Velja $p_1 = 2$.

- (a) Če je $p_1 = 2 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 2 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 2, kar ni mogoče, saj je $2 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 2 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 4 + 3p_5$. Dobimo, da p_5 deli 4, kar je znova protislovje, saj je p_5 praštevilo in $2 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 2 < p_4 = p_5$, je $S = 6 + 2p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je praštevilo $p_5 > 2$, je edina možnost kar $p_5 = 3$. Preizkus pokaže, da peterica $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ res zadošča pogoju naloge.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2 < p_5$, je $S = 8 + p_5$, torej p_5 deli 8. Ker je p_5 praštevilo, mora tako biti enako 2, kar pa ni mogoče zaradi neenakosti $2 = p_1 < p_5$.

2. Velja $p_1 = 3$.

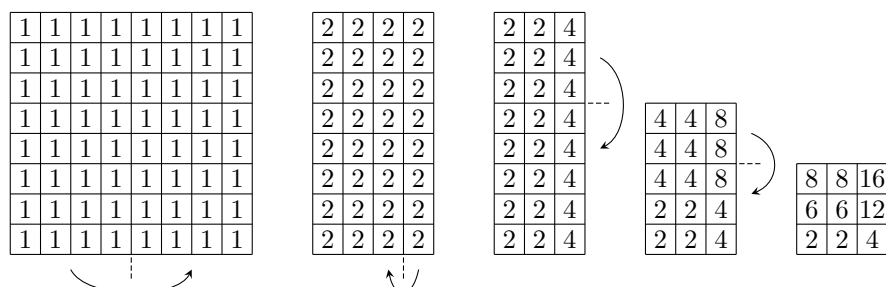
- (a) Če je $p_1 = 3 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 3 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 3, kar je protislovje, saj je $3 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 3 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 6 + 3p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je p_5 praštevilo, sta edini možnosti tako $p_5 = 2$ in $p_5 = 3$. Nobena izmed teh pa ni mogoča, saj velja $3 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 3 < p_4 = p_5$, je $S = 9 + 2p_5$, zato p_5 deli 9. Ker je p_5 praštevilo, je enako 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$, kar ni mogoče.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3 < p_5$, je $S = 12 + p_5$, torej p_5 deli 12. Podobno kot v prejšnjih primerih smo prišli do protislovja, saj je p_5 praštevilo, torej je lahko enako samo 2 ali 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$.

S tem smo ugotovili, da je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ edina rešitev, v kateri niso vsa praštevila v peterici enaka. To pomeni, da so edine rešitve ravno $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$ za poljubno praštevilo p .

Utemeljitev, da vsako izmed praštevil deli S 1 točka
 Dokaz, da v peterici nastopata kvečjemu dve različni praštevili 2 točki
 Zapis rešitve (p, p, p, p, p) za vsako praštevilo p 1 točka
 Pravilna obravnava vsaj enega izmed preostalih primerov glede na to, katera praštevila so med seboj enaka 1 točka
 Pravilna obravnava vseh primerov, ko v peterici nastopata natanko dve različni praštevili .. 1 točka
 Jasno zapisana rešitev $(2, 2, 2, 3, 3)$ 1 točka

B3. Na vsak kvadratega karirastega papirja zapišemo število 1, po vsakem prepogibu papirja pa seštejmo števila v posameznem kvadratu in vsoto zapišemo v ta kvadratega. Tedaj nam zapisana števila na vsakem koraku povejo, koliko slojev papirja je v posameznem kvadratu. Na koncu tako dobimo enak zapis kot Timotej.

(a) Primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A , je prikazan nasliki.

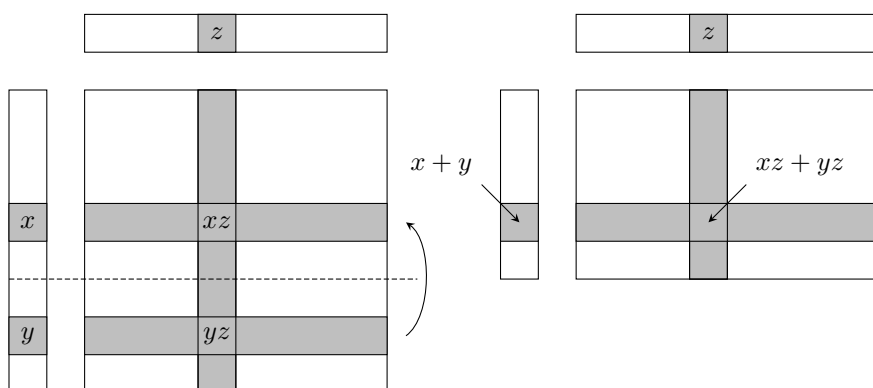


Omeniti velja, da to ni edino možno prepogibanje, pri katerem dobimo zapis A .

(b) Opazimo, da se vsota vseh zapisanih števil pri prepogibu papirja ne spremeni, zato je na vseh korakih enaka. Ker je vsota števil na začetku enaka 64, mora biti tudi vsota števil na koncu enaka 64. Toda pri zapisu B je vsota vseh števil enaka $3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 72$, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

(c) Na začetku je vsota števil v vsaki vrstici oz. stolpcu enaka 8, torej je deljiva z 8. Pri vsakem prepogibu papirja se vsota vrstice oz. stolpca bodisi ohrani ali pa se poveča za vsoto neke druge vrstice oz. stolpca. Torej je tudi po vsakem prepogibu papirja vsota vsake vrstice oz. stolpca deljiva z 8. Toda pri zapisu C je vsota tretje vrstice enaka $6 + 8 + 4 = 18$ in ni deljiva z 8, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

2. način. Točki (b) in (c) lahko dokažemo tudi drugače. Na vrhu in ob levi strani karirastega papirja dodamo karirasta trakova velikosti 1×8 , ki ju prepogibamo hkrati z listom papirja (kot da bi bila prilepljena nanj). V vsak njun kvadratega na začetku zapišemo število 1, nato pa podobno kot na listu papirja po vsakem prepogibu seštejmo števila v posameznem kvadratu. Opazimo, da na vsakem koraku velja naslednja lastnost: število v posameznem kvadratu karirastega lista je enako produktu števila v isti vrstici na levem traku in števila v istem stolpcu na zgornjem traku. Na začetku je to očitno res, saj je $1 = 1 \cdot 1$, ob vsakem prepogibu papirja pa se ta lastnost ohrani, kot je razvidno s slike.



Torej lahko na koncu Timotej dobi le zapise, ki so oblike

Rešitve nalog za 1. letnik

x	y	z
-----	-----	-----

a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

Opazimo, da za 4 kvadratke v zgornjem levem vogalu velja $ax \cdot by = ay \cdot bx$. Od tod sledi, da Timotej ni mogel dobiti niti zapisa B niti zapisa C , saj pri zapisu B velja $12 \cdot 6 \neq 12 \cdot 12$ in pri zapisu C velja $12 \cdot 8 \neq 6 \cdot 6$.

Podano pravilno prepogibanje za zapis A 2 točki
 Poljubna pravilna utemeljitev, da zapisa B ni možno dobiti 2 točki
 Poiskana lastnost, ki se pri prepogibanju ohranja, vendar je zapis C nima 1 točka
 Dokaz, da se ta lastnost pri prepogibanju res ohranja 1 točka
 Dokaz, da zapisa C ne moremo dobiti 1 točka

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
B	D	A

A1. Najmanjše skoraj kvadratno število, ki je večje od 2024, je $46^2 - 1$, največje skoraj kvadratno število, ki je manjše od 2024, pa je $44^2 - 1$. Razlika teh dveh števil je enaka

$$(46^2 - 1) - (44^2 - 1) = 46^2 - 44^2 = (46 + 44)(46 - 44) = 90 \cdot 2 = 180.$$

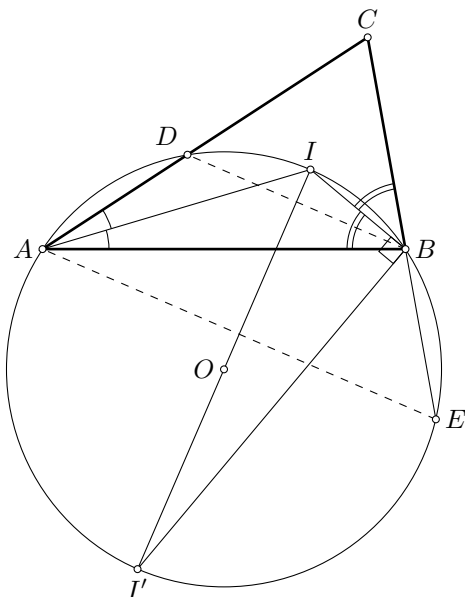
A2. Če bi vsaka kokoš imela 4 noge, bi vse Jernejeve živali imeje 4 noge. Torej ima kmet Jernej skupaj $180 : 4 = 45$ živali. Izjava (E) je zagotovo laž. Izjava (A) je resnična natanko takrat, ko ima kmet Jernej 25 kokoši in 20 ovc. Izjava (B) je resnična natanko tedaj, ko ima Kmet Jernej $80 : 4 = 20$ ovc in 25 kokoši. Izjava (C) pa je resnična natanko tedaj, ko ima kmet Jernej 25 kokoši in 20 ovc, saj je $25 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 130$. Ker je resnična natanko ena izjava, so izjave (A), (B) in (C) neresnične. Resnična izjava je izjava (D).

A3. Iz pogojev naloge sledi $p_{ABMS} = \frac{2}{5}p_{ABCD} = p_{CDRN}$, torej je $p_{MNRS} = \frac{1}{5}p_{ABCD} = 5 \text{ cm}^2$. Od tod sledi $|MN| = |RS| = 1 \text{ cm}$ in $|MB| = 3 \text{ cm}$. Zaradi simetrije je tudi $|DR| = 3 \text{ cm}$ in $|AS| = 1 \text{ cm}$, hkrati pa je $EFGH$ kvadrat. Po Pitagorovam izreku je $|SM| = \sqrt{5^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29}$. Po formuli za ploščino paralelograma zato sledi $|EH| = \frac{p_{MNRS}}{|SM|} = \frac{5}{\sqrt{29}} \text{ cm}$. Ploščina kvadrata $EFGH$ je tako enaka $|EH|^2 = \frac{25}{29} \text{ cm}^2$.

B1. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ . Potem je $\angle BAI = \frac{\alpha}{2}$, $\angle IBA = \frac{\beta}{2}$ in $\angle AIB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Točke A, B, I in D so konciklične. Ker je $\angle BAC < \angle CBA$, točka D leži na istem bregu stranice AB kot točka I , točka E pa leži na drugem bregu. Zato velja $\angle ADB = \angle AIB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ in $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ker točka E leži na drugem bregu premice AB kot točka I , iz koncikličnosti točk A, E, B in I sledi $\angle BEA = 180^\circ - \angle AIB = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Torej je

$$\angle EAC = 180^\circ - \gamma - \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle BDC.$$

To pa pomeni, da je premica AE vzporedna premici BD .



2. način. Označimo z O središče trikotniku ABI očrtane krožnice. Ker je $\angle BAC < \angle CBA$, točka D leži na istem bregu stranice AB kot točka I , točka E pa leži na drugem bregu. Torej je premica AI simetrala kota $\angle BAD$, zato razpolavlja lok BD . To pomeni, da je I središče loka BD , zato je premica BD pravokotna na premico OI . Naj bo I' drugo presečišče premice OI in trikotniku ABI očrtane krožnice. Po Talesovem izreku je $\angle IBI' = 90^\circ$. Torej je $\angle ABI' = 90^\circ - \angle IBA = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Ker je

$$\angle I'BE = 180^\circ - \angle CBI - \angle IBI' = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \angle ABI',$$

je premica BI' simetrala kota $\angle ABE$, zato razpolavlja lok AE . To pomeni, da je I' središče loka AE in zato je premica AE pravokotna na premico OI' oziroma premico OI . Ker sta premici AE in BD obe pravokotni na premico OI , sta med sabo vzporedni.

1. Način:

Izračun kota $\angle AIB$	2 točki
Napisano, da se zaradi neenakosti v navodilu, točka D nahaja na daljici AC , točka E pa ne na daljici BC	1 točka
Izračun enega od kotov $\angle BEA$ ali $\angle ADB$	1 točka
Izračun kota $\angle BDC$	1 točka
Izračun enega od kotov $\angle CBD$ ali $\angle EAB$	1 točka
Zaključek	1 točka

2. Način:

Vpeljava točke I'	1 točka
Utemeljitev, da je II' premer dane krožnice	1 točka
Napisano, da je I' središče pričrtane krožnice trikotnika ABC	1 točka
Napisano, da je BI' simetrala kota $\angle ABE$ ali podobno za AI'	1 točka
Sklep, da je en od trikotnikov AEI' ali DBI' enakokrak (za to točko zadošča sklep za enega od trikotnikov)	1 točka
Dokaz vsaj ene od ortogonalnosti premic DB ali AE na premico II'	1 točka
Zaključek	1 točka

Opomba: Druga alineja prvega točkovnika je za doseg vseh možnih točk obvezna v prvem načinu, ne pa v drugem.

B2. Naj bo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Pogoj naloge pove, da p_n deli $S - p_n$ za vsak $n \leq 5$. To pomeni, da p_n deli tudi S za vsak $n \leq 5$. Torej je S deljiv s produktom vseh različnih praštevil p_n . Ločimo primere, glede na to, koliko različnih praštevil je med p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

- Če je vseh 5 praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 enakih p , potem je pogoj iz naloge očitno izpolnjen, saj p deli $4p$.
- Če sta med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 natanko 2 različni praštevili p in q , kjer je $p < q$, potem pq deli S . Ker so praštevila urejena, imamo naslednje 4 možnosti. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, q, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = p + 4q$. Od tod sledi, da q deli p , kar pa ni mogoče, saj sta praštevili p in q različni. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = 2p + 3q$. Ker sta praštevili p in q različni od tod sledi, da p deli 3 in q deli 2. Torej je $p = 3$ in $q = 2$, kar pa je v protislovju s predpostavko $p < q$. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, q, q)$, tedaj pq deli $S = 3p + 2q$. Podobno kot prej, od tod sledi, da p deli 2 in q deli 3, zato je $p = 2$ in $q = 3$. Tako dobimo rešitev $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$, ki res ustreza pogoju naloge. Če pa je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, q)$, tedaj pq deli $S = 4p + q$. Od tod sklepamo, da p deli q , kar pa ni mogoče, ker sta praštevili p in q različni.

3. Če so med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 vsaj 3 različna praštevila, označimo največja 3 izmed njih s p, q in r , kjer je $p < q < r$. Tedaj pqr deli S , zato je $pqr \leq S \leq 5r$. Toda $p \geq 2$ in $q \geq 3$, zato je $pqr \geq 6r$, kar nam da protislovje $6r \leq 5r$. V tem primeru zato ni rešitev.

Vse rešitve naloge so torej $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$, kjer je p poljubno praštevilo, in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$.

2. način. Enako kot v prvi rešitvi sklepamo, da vsaka peterica enakih praštevil ustreza pogoju naloge. Sedaj predpostavimo, da niso vsa praštevila enaka. Iz pogoja o velikostih tako dobimo $p_1 < p_5$ in torej $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 < 4p_5$. Ker pa p_5 deli to vsoto, je ta vsota lahko samo $p_5, 2p_5$ ali $3p_5$. Tako dobimo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq 3p_5$. Tako kot v prvi rešitvi označimo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Vidimo, da je $p_5 < S \leq 4p_5$. Ker pa p_5 deli vsoto ostalih štirih praštevil, to pomeni, da p_5 deli tudi S , zato lahko S zavzame samo vrednosti $2p_5, 3p_5$ in $4p_5$. Ker mora tudi p_1 deliti S , je torej p_1 lahko samo 2 ali 3. Opazimo tudi, da sta v vseh primerih p_1 in p_5 pravzaprav edini praštevili, ki delita S . Tako lahko sklepamo, da je vsako izmed praštevil p_2, p_3 in p_4 enako ali p_1 ali p_5 , saj tudi ta delijo S . Sedaj ločimo primere glede na vrednost p_1 , nato pa še glede na to, koliko praštevil je enakih p_1 in koliko je enakih p_5 .

1. Velja $p_1 = 2$.

- (a) Če je $p_1 = 2 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 2 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 2, kar ni mogoče, saj je $2 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 2 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 4 + 3p_5$. Dobimo, da p_5 deli 4, kar je znova protislovje, saj je p_5 praštevilo in $2 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 2 < p_4 = p_5$, je $S = 6 + 2p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je praštevilo $p_5 > 2$, je edina možnost kar $p_5 = 3$. Preizkus pokaže, da peterica $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ res zadošča pogoju naloge.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2 < p_5$, je $S = 8 + p_5$, torej p_5 deli 8. Ker je p_5 praštevilo, mora tako biti enako 2, kar pa ni mogoče zaradi neenakosti $2 = p_1 < p_5$.

2. Velja $p_1 = 3$.

- (a) Če je $p_1 = 3 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 3 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 3, kar je protislovje, saj je $3 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 3 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 6 + 3p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je p_5 praštevilo, sta edini možnosti tako $p_5 = 2$ in $p_5 = 3$. Nobena izmed teh pa ni mogoča, saj velja $3 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 3 < p_4 = p_5$, je $S = 9 + 2p_5$, zato p_5 deli 9. Ker je p_5 praštevilo, je enako 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$, kar ni mogoče.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3 < p_5$, je $S = 12 + p_5$, torej p_5 deli 12. Podobno kot v prejšnjih primerih smo prišli do protislovja, saj je p_5 praštevilo, torej je lahko enako samo 2 ali 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$.

S tem smo ugotovili, da je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ edina rešitev, v kateri niso vsa praštevila v peterici enaka. To pomeni, da so edine rešitve ravno $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$ za poljubno praštevilo p .

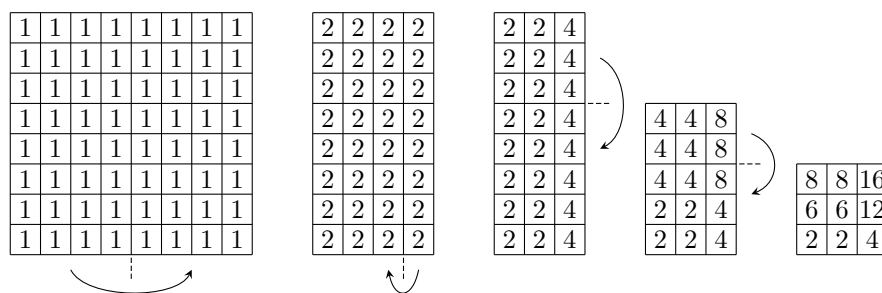
Utemeljitev, da vsako izmed praštevil deli S 1 točka
 Dokaz, da v peterici nastopata kvečjemu dve različni praštevili 2 točki
 Zapis rešitve (p, p, p, p, p) za vsako praštevilo p 1 točka
 Pravilna obravnava vsaj enega izmed preostalih primerov glede na to, katera praštevila so med

seboj enaka 1 točka
Pravilna obravnava vseh primerov, ko v peterici nastopata natanko dve različni praštevili .. 1 točka

Jasno zapisana rešitev $(2, 2, 2, 3, 3)$ 1 točka

B3. Na vsak kvadrater karirastega papirja zapišemo število 1, po vsakem prepogibu papirja pa seštejmo števila v posameznem kvadratu in vsoto zapišemo v ta kvadrater. Tedaj nam zapisana števila na vsakem koraku povejo, koliko slojev papirja je v posameznem kvadratu. Na koncu tako dobimo enak zapis kot Timotej.

(a) Primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A , je prikazan nasliki.

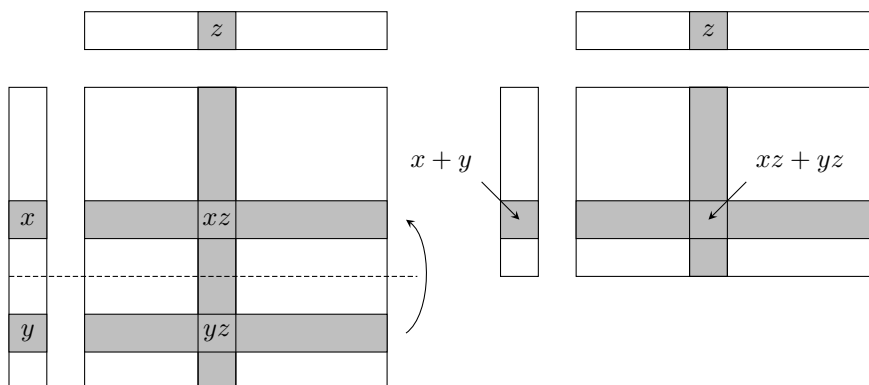


Omeniti velja, da to ni edino možno prepogibanje, pri katerem dobimo zapis A .

(b) Opazimo, da se vsota vseh zapisanih števil pri prepogibu papirja ne spremeni, zato je na vseh korakih enaka. Ker je vsota števil na začetku enaka 64, mora biti tudi vsota števil na koncu enaka 64. Toda pri zapisu B je vsota vseh števil enaka $3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 72$, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

(c) Na začetku je vsota števil v vsaki vrsti oz. stolpcu enaka 8, torej je deljiva z 8. Pri vsakem prepogibu papirja se vsota vrstice oz. stolpca bodisi ohrani ali pa se poveča za vsoto neke druge vrstice oz. stolpca. Torej je tudi po vsakem prepogibu papirja vsota vsake vrstice oz. stolpca deljiva z 8. Toda pri zapisu C je vsota tretje vrstice enaka $6 + 8 + 4 = 18$ in ni deljiva z 8, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

2. način. Točki (b) in (c) lahko dokažemo tudi drugače. Na vrhu in ob levi strani karirastega papirja dodamo karirasta trakova velikosti 1×8 , ki ju prepogibamo hkrati z listom papirja (kot da bi bila prilepljena nanj). V vsak njun kvadrater na začetku zapišemo število 1, nato pa podobno kot na listu papirja po vsakem prepogibu seštejmo števila v posameznem kvadratu. Opazimo, da na vsakem koraku velja naslednja lastnost: število v posameznem kvadratu karirastega lista je enako produktu števila v isti vrstici na levem traku in števila v istem stolpcu na zgornjem traku. Na začetku je to očitno res, saj je $1 = 1 \cdot 1$, ob vsakem prepogibu papirja pa se ta lastnost ohrani, kot je razvidno s slike.



Torej lahko na koncu Timotej dobi le zapise, ki so oblike

x	y	z
-----	-----	-----

a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

Opazimo, da za 4 kvadratke v zgornjem levem vogalu velja $ax \cdot by = ay \cdot bx$. Od tod sledi, da Timotej ni mogel dobiti niti zapisa B niti zapisa C , saj pri zapisu B velja $12 \cdot 6 \neq 12 \cdot 12$ in pri zapisu C velja $12 \cdot 8 \neq 6 \cdot 6$.

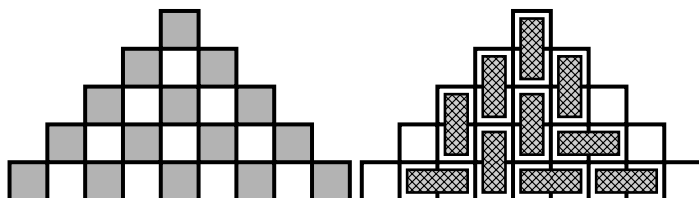
Podano pravilno prepogibanje za zapis A 2 točki
 Poljubna pravilna utemeljitev, da zapisa B ni možno dobiti 2 točki
 Poiskana lastnost, ki se pri prepogibanju ohranja, vendar je zapis C nima 1 točka
 Dokaz, da se ta lastnost pri prepogibanju res ohranja 1 točka
 Dokaz, da zapisa C ne moremo dobiti 1 točka

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
B	C	E

A1. Ker je $p_{ADC} = \frac{1}{4}p_{ABC}$, je $|CD| = \frac{1}{4}|CB| = 30$ cm in $|BD| = 90$ cm. Ker je $p_{EBF} = \frac{1}{2}p_{EBD}$, je $|BF| = \frac{1}{2}|BD| = 45$ cm.

A2. Kvadratke Aleševe risbe pobarvamo po vzorcu šahovnice, kot prikazuje leva slika. Opazimo, da vsaka ploščica velikosti 2×1 prekrije 1 belo polje in 1 črno polje. Ker pa je belih polj le 10, lahko Aleš na risbo položi največ 10 ploščic. Kako lahko Aleš na risbo položi 10 ploščic, prikazuje desna slika.



A3. Starosti prijateljic so enake n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ in $n + 4$ za neko naravno število n . Vsota njihovih starosti je $5n + 10$, vsota starosti najstarejših dveh pa je $2n + 7$. Torej velja $\frac{2n+7}{5n+10} = \frac{2070}{4950} = \frac{23}{55}$. Enakost preublikujemo do $55(2n + 7) = 23(5n + 10)$ in izrazimo $5n = 155$. Torej je $n = 31$, kar je starost najmlajše prijateljice.

B1. Iz razmerja kotov sledi, da obstaja tak t , da je $\alpha = 2t$, $\beta = 3t$ in $\gamma = 4t$. Ker je vsota notranjih kotov v vsakem trikotniku enaka 180° , mora biti $2t + 3t + 4t = 180^\circ$, od koder izračunamo $t = 20^\circ$. Torej je $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ in $\gamma = 80^\circ$. Z uporabo sinusnega izreka izrazimo

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

Po formuli za sinus dvojnega kota je $\sin 80^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ$, torej je

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{2 \cos 40^\circ}.$$

Z upoštevanjem zveze $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, dobimo

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos 60^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 60^\circ \cos 40^\circ + \cos 60^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}.$$

V imenovalcu ponovno upoštevamo zvezo $\sin 80^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ$, v števcu pa formulo $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, da dobimo

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{\sin 100^\circ}{\frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{2 \sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

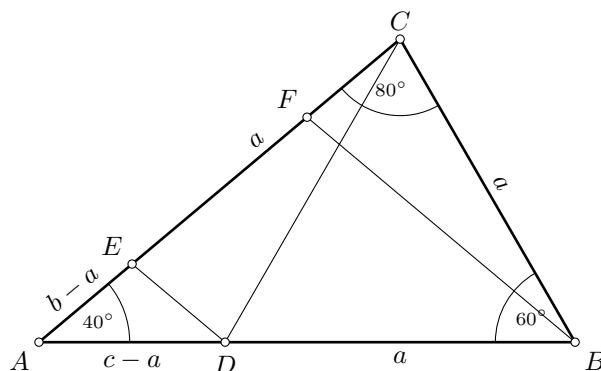
Iz formule $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ sledi $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$, torej je

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = 2.$$

2. način. Enakost, ki jo moramo dokazati, pomnožimo z ac , da dobimo $bc + a^2 = 2ac$, in jo zapišemo v obliki $bc - ac = ac - a^2$. Nato na obeh straneh izpostavimo skupni faktor $(b - a)c = a(c - a)$ in enakost preuredimo v

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{c}{a}.$$

Opazimo, da je to enakost dveh razmerij, zato jo bomo dokazali s pomočjo podobnih trikotnikov.



Kot v prvi rešitvi najprej izpeljemo $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ in $\gamma = 80^\circ$. Torej je $a < b < c$. Naj bo D taka točka na stranici AB , da je $|BD| = a$, in E taka točka na stranici AC , da je $|CE| = a$. Tedaj je $|AD| = c - a$ in $|AE| = b - a$. Naj bo F taka točka na stranici AC , da je premica BF vzporedna premici DE . Tedaj sta trikotnika ADE in ABF podobna, zato je

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{c}{|AF|}.$$

Torej je dovolj pokazati, da je $|AF| = a$.

Ker je $|BC| = |BD| = a$ in $\beta = 60^\circ$, je BCD enakostranični trikotnik, zato je tudi $|CD| = a$. Torej je trikotnik ECD enakokrak z vrhom pri C in kotom

$$\angle ECD = \angle ACB - \angle DCB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Od tod izračunamo

$$\angle CDE = \angle DEC = \frac{180^\circ - \angle ECD}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Sledi

$$\angle EDA = 180^\circ - \angle BDC - \angle CDE = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ.$$

Zaradi vzporednosti premic BF in DE , je tudi $\angle FBA = 40^\circ$. Od tod sledi, da je trikotnik BFA enakokrak z vrhom pri F , zato velja $|AF| = |FB|$. Hkrati je

$$\angle BFC = 180^\circ - \angle AFB = \angle BAF + \angle FBA = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ.$$

Torej je tudi trikotnik FBC enakokrak z vrhom pri B , zato je $|FB| = |BC| = a$. Iz obojega sledi $|AF| = a$, kar je bilo treba dokazati.

Preoblikovanje drugega ulomka v $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ 1 točka
 Preoblikovanje drugega ulomka v $\frac{1}{2 \cos 40^\circ}$ 1 točka
 Preoblikovanje drugega ulomka v $\frac{\cos 60^\circ}{\cos 40^\circ}$ 2 točki

Preoblikovanje izraza v $\frac{2 \sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}$ 2 točki
Izračun vsote. 1 točka

2. način. Preoblikovanje cilja v $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$ 1 točka

Definiranje točk D, E 1 točka

Definirana točka F . Zapis $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{|AF|}$ in ugotovitev, da je dovolj pokazati enakost $|AF| = a$. . 1 točka

Ugotovitev, da je ECD enakokrak z vrhom v C 1 točka

Izračun kota $\angle FBA$ in ugotovitev, da je BFA enakokrak. 1 točka

Izračun kota $\angle BFC$ in ugotovitev, da je FBC enakokrak. 1 točka

Izračun $|AF| = |FB| = |BC| = a$ 1 točka

B2. Naj bo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Pogoji naloge pove, da p_n deli $S - p_n$ za vsak $n \leq 5$. To pomeni, da p_n deli tudi S za vsak $n \leq 5$. Torej je S deljiv s produktom vseh različnih praštevil p_n . Ločimo primere, glede na to, koliko različnih praštevil je med p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

- Če je vseh 5 praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 enakih p , potem je pogoj iz naloge očitno izpolnjen, saj p deli $4p$.
- Če sta med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 natanko 2 različni praštevili p in q , kjer je $p < q$, potem pq deli S . Ker so praštevila urejena, imamo naslednje 4 možnosti. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, q, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = p + 4q$. Od tod sledi, da q deli p , kar pa ni mogoče, saj sta praštevili p in q različni. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = 2p + 3q$. Ker sta praštevili p in q različni od tod sledi, da p deli 3 in q deli 2. Torej je $p = 3$ in $q = 2$, kar pa je v protislovju s predpostavko $p < q$. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, q, q)$, tedaj pq deli $S = 3p + 2q$. Podobno kot prej, od tod sledi, da p deli 2 in q deli 3, zato je $p = 2$ in $q = 3$. Tako dobimo rešitev $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$, ki res ustreza pogoju naloge. Če pa je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, q)$, tedaj pq deli $S = 4p + q$. Od tod sklepamo, da p deli q , kar pa ni mogoče, ker sta praštevili p in q različni.
- Če so med praštevili p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 vsaj 3 različna praštevila, označimo največja 3 izmed njih s p, q in r , kjer je $p < q < r$. Tedaj pqr deli S , zato je $pqr \leq S \leq 5r$. Toda $p \geq 2$ in $q \geq 3$, zato je $pqr \geq 6r$, kar nam da protislovje $6r \leq 5r$. V tem primeru zato ni rešitev.

Vse rešitve naloge so torej $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$, kjer je p poljubno praštevilo, in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$.

2. način. Enako kot v prvi rešitvi sklepamo, da vsaka peterica enakih praštevil ustreza pogoju naloge. Sedaj predpostavimo, da niso vsa praštevila enaka. Iz pogoja o velikostih tako dobimo $p_1 < p_5$ in torej $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 < 4p_5$. Ker pa p_5 deli to vsoto, je ta vsota lahko samo $p_5, 2p_5$ ali $3p_5$. Tako dobimo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq 3p_5$. Tako kot v prvi rešitvi označimo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Vidimo, da je $p_5 < S \leq 4p_5$. Ker pa p_5 deli vsoto ostalih štirih praštevil, to pomeni, da p_5 deli tudi S , zato lahko S zavzame samo vrednosti $2p_5, 3p_5$ in $4p_5$. Ker mora tudi p_1 deliti S , je torej p_1 lahko samo 2 ali 3. Opazimo tudi, da sta v vseh primerih p_1 in p_5 pravzaprav edini praštevili, ki delita S . Tako lahko sklepamo, da je vsako izmed praštevil p_2, p_3 in p_4 enako ali p_1 ali p_5 , saj tudi ta delijo S . Sedaj ločimo primere glede na vrednost p_1 , nato pa še glede na to, koliko praštevil je enakih p_1 in koliko je enakih p_5 .

1. Velja $p_1 = 2$.

- Če je $p_1 = 2 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 2 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 2, kar ni mogoče, saj je $2 = p_1 < p_5$.
- Če je $p_1 = p_2 = 2 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 4 + 3p_5$. Dobimo, da p_5 deli 4, kar je znova protislovje, saj je p_5 praštevilo in $2 = p_1 < p_5$.

- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 2 < p_4 = p_5$, je $S = 6 + 2p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je praštevilo $p_5 > 2$, je edina možnost kar $p_5 = 3$. Preizkus pokaže, da peterica $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ res zadošča pogoju naloge.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2 < p_5$, je $S = 8 + p_5$, torej p_5 deli 8. Ker je p_5 praštevilo, mora tako biti enako 2, kar pa ni mogoče zaradi neenakosti $2 = p_1 < p_5$.

2. Velja $p_1 = 3$.

- (a) Če je $p_1 = 3 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 3 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 3, kar je protislovje, saj je $3 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 3 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 6 + 3p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je p_5 praštevilo, sta edini možnosti tako $p_5 = 2$ in $p_5 = 3$. Nobena izmed teh pa ni mogoča, saj velja $3 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 3 < p_4 = p_5$, je $S = 9 + 2p_5$, zato p_5 deli 9. Ker je p_5 praštevilo, je enako 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$, kar ni mogoče.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3 < p_5$, je $S = 12 + p_5$, torej p_5 deli 12. Podobno kot v prejšnjih primerih smo prišli do protislovja, saj je p_5 praštevilo, torej je lahko enako samo 2 ali 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$.

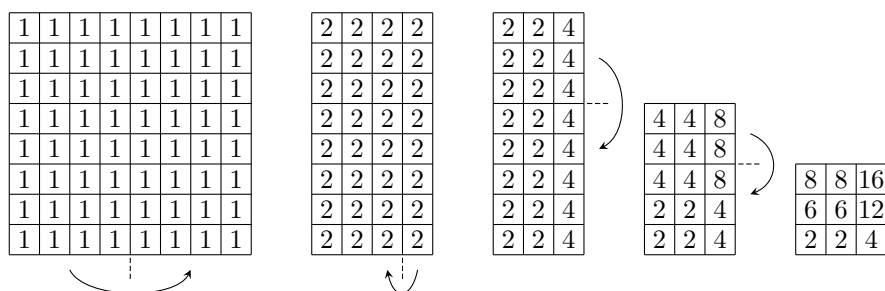
S tem smo ugotovili, da je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ edina rešitev, v kateri niso vsa praštevila v peterici enaka. To pomeni, da so edine rešitve ravno $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$ za poljubno praštevilo p .

Utemeljitev, da vsako izmed praštevil deli S 1 točka
 Dokaz, da v peterici nastopata kvečjemu dve različni praštevili 2 točki
 Zapis rešitve (p, p, p, p, p) za vsako praštevilo p 1 točka
 Pravilna obravnava vsaj enega izmed preostalih primerov glede na to, katera praštevila so med seboj enaka 1 točka
 Pravilna obravnava vseh primerov, ko v peterici nastopata natanko dve različni praštevili .. 1 točka

Jasno zapisana rešitev $(2, 2, 2, 3, 3)$ 1 točka

B3. Na vsak kvadratega karirastega papirja zapišimo število 1, po vsakem prepogibu papirja pa seštejmo števila v posameznem kvadratu in vsoto zapišimo v ta kvadratega. Tedaj nam zapisana števila na vsakem koraku povejo, koliko slojev papirja je v posameznem kvadratu. Na koncu tako dobimo enak zapis kot Timotej.

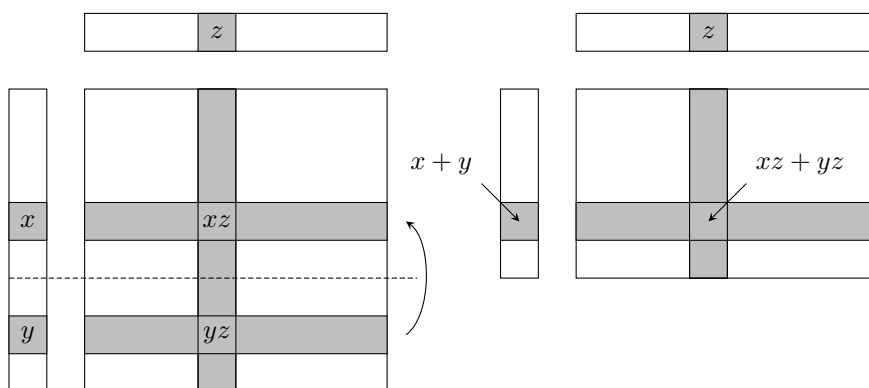
- (a) Primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A , je prikazan nasliki.



Omeniti velja, da to ni edino možno prepogibanje, pri katerem dobimo zapis A .

- (b) Opazimo, da se vsota vseh zapisanih števil pri prepogibu papirja ne spremeni, zato je na vseh korakih enaka. Ker je vsota števil na začetku enaka 64, mora biti tudi vsota števil na koncu enaka 64. Toda pri zapisu B je vsota vseh števil enaka $3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 72$, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.
- (c) Na začetku je vsota števil v vsaki vrsti oz. stolpcu enaka 8, torej je deljiva z 8. Pri vsakem prepogibu papirja se vsota vrstice oz. stolpca bodisi ohrani ali pa se poveča za vsoto neke druge vrstice oz. stolpca. Torej je tudi po vsakem prepogibu papirja vsota vsake vrstice oz. stolpca deljiva z 8. Toda pri zapisu C je vsota tretje vrstice enaka $6 + 8 + 4 = 18$ in ni deljiva z 8, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

2. način. Točki (b) in (c) lahko dokažemo tudi drugače. Na vrhu in ob levi strani karirastega papirja dodamo karirasta trakova velikosti 1×8 , ki ju prepogibamo hkrati z listom papirja (kot da bi bila prilepljena nanj). V vsak njun kvadratega na začetku zapišemo število 1, nato pa podobno kot na listu papirja po vsakem prepogibu seštejmo števila v posameznem kvadratu. Opazimo, da na vsakem koraku velja naslednja lastnost: število v posameznem kvadratu karirastega lista je enako produktu števila v isti vrstici na levem traku in števila v istem stolpcu na zgornjem traku. Na začetku je to očitno res, saj je $1 = 1 \cdot 1$, ob vsakem prepogibu papirja pa se ta lastnost ohrani, kot je razvidno s slike.



Torej lahko na koncu Timotej dobi le zapise, ki so oblike

	x	y	z
a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

Opazimo, da za 4 kvadratke v zgornjem levem vogalu velja $ax \cdot by = ay \cdot bx$. Od tod sledi, da Timotej ni mogel dobiti niti zapisa B niti zapisa C , saj pri zapisu B velja $12 \cdot 6 \neq 12 \cdot 12$ in pri zapisu C velja $12 \cdot 8 \neq 6 \cdot 6$.

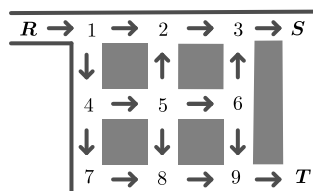
Podano pravilno prepogibanje za zapis A 2 točki
 Poljubna pravilna utemeljitev, da zapisa B ni možno dobiti 2 točki
 Poiskana lastnost, ki se pri prepogibanju ohranja, vendar je zapis C nima 1 točka
 Dokaz, da se ta lastnost pri prepogibanju res ohranja 1 točka
 Dokaz, da zapisa C ne moremo dobiti 1 točka

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
B	D	B

A1. Za izpis datuma 11/11, potrebuje Marta 4 ploščice s števk 1. Za izpis datuma 22/12, potrebuje 3 ploščice s števk 2, hkrati pa noben datum ne vsebuje 4 števka 2. Vse preostale števke, vključno s števk 0, nastopijo v kateremkoli datumu največ 2-krat, enkrat v dnevu in enkrat v mesecu. Za vsako izmed števk 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 zato Marta potrebuje 2 ploščici s to števk 0. Za izpis datuma vsak dan v letu torej Marta potrebuje vsaj $4 + 3 + 8 \cdot 2 = 23$ magnetnih ploščic.

A2.



Označimo križišča v centru mesta, kot je prikazano na sliki. Možne poti skozi center mesta od točke R do točke T so tedaj $R14569T$, $R14589T$ in $R14789T$. Verjetnosti, da Ana izbere posamezno od teh poti so po vrsti enake $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Verjetnost, da Ana zapusti center mesta v točki T je zato enaka $\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

A3. Iz podatkov razberemo $p_{ABF} : p_{BCF} = 2 : 6 = 1 : 3$ in $p_{DEF} : p_{CDF} = 4 : 8 = 1 : 2$, torej je $p_{ABF} = \frac{1}{3}p_{BCF}$ in $p_{DEF} = \frac{1}{2}p_{CDF}$. Od tod sledi $p_{ACD} = p_{ABF} + p_{BCF} + p_{CDF} = \frac{4}{3}p_{BCF} + p_{CDF}$, po drugi strani pa je $p_{ACD} = \frac{|AC| \cdot |CD|}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$. Podobno je $p_{BCE} = p_{BCF} + p_{CDF} + p_{DEF} = p_{BCF} + \frac{3}{2}p_{CDF}$ in hkrati $p_{BCE} = \frac{|BC| \cdot |CE|}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$. Torej velja

$$\frac{4}{3}p_{BCF} + p_{CDF} = 32,$$

$$p_{BCF} + \frac{3}{2}p_{CDF} = 36.$$

Iz obeh enakosti izračunamo $p_{BCF} = 12$ in $p_{CDF} = 16$, torej je ploščina štirikotnika $BCDF$ enaka $p_{BCF} + p_{CDF} = 12 + 16 = 28$ kvadratnih centimetrov.

B1. Oba izraza na levi strani enačb sta geometrijski vrsti s kvocientom $\sin^2 x$. Če je $\sin x = \pm 1$, vrsti divergirata, zato nimamo rešitev. Če je $\sin x \neq \pm 1$, tedaj je $0 \leq \sin^2 x < 1$, zato obe vrsti konvergirata in ju lahko seštejemo, da dobimo

$$\frac{1}{1 - \sin^2 x} = y + \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6},$$

$$\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} = |y| + \frac{3\sqrt{2} - 4}{6}.$$

Obravnavajmo dva primera.

Denimo najprej, da je $y \geq 0$. Tedaj je $|y| = y$. Enačbi odštejemo, da se y pokrajša, in dobimo

$$\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{12 - 6\sqrt{2}}{6}.$$

Ker je $1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$ in $1 - \sin x \neq 0$, lahko enačbo poenostavimo do

$$\frac{1}{1 + \sin x} = 2 - \sqrt{2}$$

in od tod izrazimo

$$\sin x = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - 1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rešitve te enačbe so $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ in $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Iz prve enačbe sistema izrazimo še

$$y = \frac{1}{1 - \sin^2 x} - \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6} = 2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

kar je res nenegativno število.

Denimo sedaj, da je $y < 0$. Tedaj je $|y| = -y$, zato enačbi sistema seštejemo, da dobimo

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{4}{6}.$$

S podobnim razmislekom kot v prvem primeru enačbo poenostavimo do

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{2}{3}$$

in nato izrazimo $\sin x = -\frac{1}{2}$. Toda v tem primeru iz prve enačbe sistema dobimo

$$y = \frac{1}{1 - \sin^2 x} - \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{8 - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

kar je pozitivno število. Dobili smo protislovje s predpostavko, da je $y < 0$, zato v tem primeru nimamo rešitev.

Rešitve naloge so torej pari (x, y) , kjer je $y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $x \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Zapis pogoja za konvergenco geom. vrste $\sin x \neq \pm 1$ 1 točka

Izračunani vsoti obeh geom. vrst 1 točka

V obravnavi primera $y \geq 0$ izračunana vrednost izraza $\frac{1}{1 + \sin x} = 2 - \sqrt{2}$ 1 točka

Zapis rešitev $y \geq 0$ in $(x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ali $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$) in $y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 točka

V obravnavi primera $y < 0$ izračunana vrednost $\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{2}{3}$ 1 točka

Argument, da rešitev za $y < 0$ ni 1 točka

Zapis končnih rešitev 1 točka.

B2. Naj bo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Pogoj naloge pove, da p_n deli $S - p_n$ za vsak $n \leq 5$. To pomeni, da p_n deli tudi S za vsak $n \leq 5$. Torej je S deljiv s produktom vseh različnih praštevil p_n . Ločimo primere, glede na to, koliko različnih praštevil je med p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

1. Če je vseh 5 praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 enakih p , potem je pogoj iz naloge očitno izpolnjen, saj p deli $4p$.

2. Če sta med praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 natanko 2 različni praštevili p in q , kjer je $p < q$, potem pq deli S . Ker so praštevila urejena, imamo naslednje 4 možnosti. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, q, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = p + 4q$. Od tod sledi, da q deli p , kar pa ni mogoče, saj sta praštevili p in q različni. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, q, q, q)$, tedaj pq deli $S = 2p + 3q$. Ker sta praštevili p in q različni od tod sledi, da p deli 3 in q deli 2. Torej je $p = 3$ in $q = 2$, kar pa je v protislovju s predpostavko $p < q$. Če je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, q, q)$, tedaj pq deli $S = 3p + 2q$. Podobno kot prej, od tod sledi, da p deli 2 in q deli 3, zato je $p = 2$ in $q = 3$. Tako dobimo rešitev $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$, ki res ustreza pogoju naloge. Če pa je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, q)$, tedaj pq deli $S = 4p + q$. Od tod sklepamo, da p deli q , kar pa ni mogoče, ker sta praštevili p in q različni.
3. Če so med praštevil p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 vsaj 3 različna praštevila, označimo največja 3 izmed njih s p, q in r , kjer je $p < q < r$. Tedaj pqr deli S , zato je $pqr \leq S \leq 5r$. Toda $p \geq 2$ in $q \geq 3$, zato je $pqr \geq 6r$, kar nam da protislovje $6r \leq 5r$. V tem primeru zato ni rešitev.

Vse rešitve naloge so torej $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$, kjer je p poljubno praštevilo, in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$.

2. način. Enako kot v prvi rešitvi sklepamo, da vsaka peterica enakih praštevil ustreza pogoju naloge. Sedaj predpostavimo, da niso vsa praštevila enaka. Iz pogoja o velikostih tako dobimo $p_1 < p_5$ in torej $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 < 4p_5$. Ker pa p_5 deli to vsoto, je ta vsota lahko samo $p_5, 2p_5$ ali $3p_5$. Tako dobimo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq 3p_5$. Tako kot v prvi rešitvi označimo $S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Vidimo, da je $p_5 < S \leq 4p_5$. Ker pa p_5 deli vsoto ostalih štirih praštevil, to pomeni, da p_5 deli tudi S , zato lahko S zavzame samo vrednosti $2p_5, 3p_5$ in $4p_5$. Ker mora tudi p_1 deliti S , je torej p_1 lahko samo 2 ali 3. Opazimo tudi, da sta v vseh primerih p_1 in p_5 pravzaprav edini praštevili, ki delita S . Tako lahko sklepamo, da je vsako izmed praštevil p_2, p_3 in p_4 enako ali p_1 ali p_5 , saj tudi ta delijo S . Sedaj ločimo primere glede na vrednost p_1 , nato pa še glede na to, koliko praštevil je enakih p_1 in koliko je enakih p_5 .

1. Velja $p_1 = 2$.

- (a) Če je $p_1 = 2 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 2 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 2, kar ni mogoče, saj je $2 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 2 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 4 + 3p_5$. Dobimo, da p_5 deli 4, kar je znova protislovje, saj je p_5 praštevilo in $2 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 2 < p_4 = p_5$, je $S = 6 + 2p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je praštevilo $p_5 > 2$, je edina možnost kar $p_5 = 3$. Preizkus pokaže, da peterica $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ res zadošča pogoju naloge.
- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2 < p_5$, je $S = 8 + p_5$, torej p_5 deli 8. Ker je p_5 praštevilo, mora tako biti enako 2, kar pa ni mogoče zaradi neenakosti $2 = p_1 < p_5$.

2. Velja $p_1 = 3$.

- (a) Če je $p_1 = 3 < p_2 = p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 3 + 4p_5$. Tako sledi, da p_5 deli 3, kar je protislovje, saj je $3 = p_1 < p_5$.
- (b) Če je $p_1 = p_2 = 3 < p_3 = p_4 = p_5$, je $S = 6 + 3p_5$, torej p_5 deli 6. Ker je p_5 praštevilo, sta edini možnosti tako $p_5 = 2$ in $p_5 = 3$. Nobena izmed teh pa ni mogoča, saj velja $3 = p_1 < p_5$.
- (c) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = 3 < p_4 = p_5$, je $S = 9 + 2p_5$, zato p_5 deli 9. Ker je p_5 praštevilo, je enako 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$, kar ni mogoče.

- (d) Če je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3 < p_5$, je $S = 12 + p_5$, torej p_5 deli 12. Podobno kot v prejšnjih primerih smo prišli do protislovja, saj je p_5 praštevilo, torej je lahko enako samo 2 ali 3, hkrati pa velja $3 = p_1 < p_5$.

S tem smo ugotovili, da je $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ edina rešitev, v kateri niso vsa praštevila v peterici enaka. To pomeni, da so edine rešitve ravno $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ in $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p, p, p, p, p)$ za poljubno praštevilo p .

Utemeljitev, da vsako izmed praštevil deli S 1 točka

Dokaz, da v peterici nastopata kvečjemu dve različni praštevili 2 točki

Zapis rešitve (p, p, p, p, p) za vsako praštevilo p 1 točka

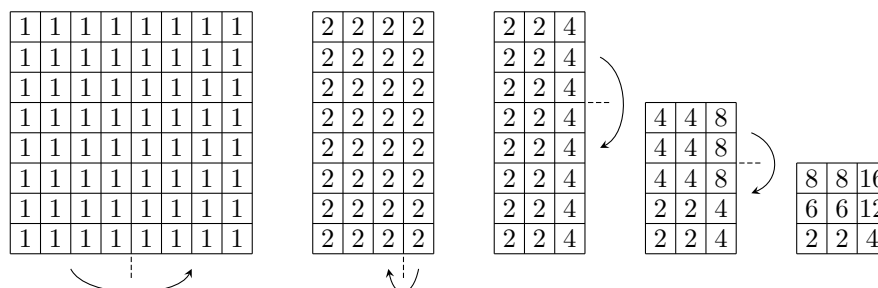
Pravilna obravnava vsaj enega izmed preostalih primerov glede na to, katera praštevila so med seboj enaka 1 točka

Pravilna obravnava vseh primerov, ko v peterici nastopata natanko dve različni praštevili .. 1 točka

Jasno zapisana rešitev $(2, 2, 2, 3, 3)$ 1 točka

B3. Na vsak kvadratega karirastega papirja zapišemo število 1, po vsakem prepogibu papirja pa seštejmo števila v posameznem kvadratu in vsoto zapišemo v ta kvadratega. Tedaj nam zapisana števila na vsakem koraku povejo, koliko slojev papirja je v posameznem kvadratu. Na koncu tako dobimo enak zapis kot Timotej.

- (a) Primer prepogibanja papirja, pri katerem bi Timotej dobil zapis A , je prikazan nasliki.

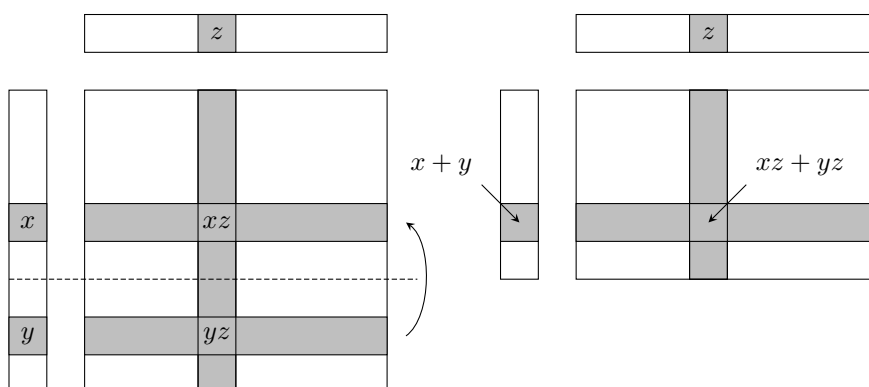


Omeniti velja, da to ni edino možno prepogibanje, pri katerem dobimo zapis A .

- (b) Opazimo, da se vsota vseh zapisanih števil pri prepogibu papirja ne spremeni, zato je na vseh korakih enaka. Ker je vsota števil na začetku enaka 64, mora biti tudi vsota števil na koncu enaka 64. Toda pri zapisu B je vsota vseh števil enaka $3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 72$, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.
- (c) Na začetku je vsota števil v vsaki vrsti oz. stolpcu enaka 8, torej je deljiva z 8. Pri vsakem prepogibu papirja se vsota vrstice oz. stolpca bodisi ohrani ali pa se poveča za vsoto neke druge vrstice oz. stolpca. Torej je tudi po vsakem prepogibu papirja vsota vsake vrstice oz. stolpca deljiva z 8. Toda pri zapisu C je vsota tretje vrstice enaka $6 + 8 + 4 = 18$ in ni deljiva z 8, zato tega zapisa Timotej ni mogel dobiti.

2. način. Točki (b) in (c) lahko dokažemo tudi drugače. Na vrhu in ob levi strani karirastega papirja dodamo karirasta trakova velikosti 1×8 , ki ju prepogibamo hkrati z listom papirja (kot da bi bila prilepljena nanj). V vsak njun kvadratega na začetku zapišemo število 1, nato pa podobno kot na listu papirja po vsakem prepogibu seštejmo števila v posameznem kvadratu. Opazimo, da na vsakem koraku velja naslednja lastnost: število v posameznem kvadratu karirastega lista je enako produktu števila v isti vrstici na levem traku in števila v istem stolpcu na zgornjem traku. Na začetku je to očitno res, saj je $1 = 1 \cdot 1$, ob vsakem prepogibu papirja pa se ta lastnost ohrani, kot je razvidno s slike.

Rešitve nalog za 4. letnik



Torej lahko na koncu Timotej dobi le zapise, ki so oblike

x	y	z
-----	-----	-----

a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

Opazimo, da za 4 kvadratke v zgornjem levem vogalu velja $ax \cdot by = ay \cdot bx$. Od tod sledi, da Timotej ni mogel dobiti niti zapisa B niti zapisa C , saj pri zapisu B velja $12 \cdot 6 \neq 12 \cdot 12$ in pri zapisu C velja $12 \cdot 8 \neq 6 \cdot 6$.

Podano pravilno prepogibanje za zapis A 2 točki
 Poljubna pravilna utemeljitev, da zapisa B ni možno dobiti 2 točki
 Poiskana lastnost, ki se pri prepogibanju ohranja, vendar je zapis C nima 1 točka
 Dokaz, da se ta lastnost pri prepogibanju res ohranja 1 točka
 Dokaz, da zapisa C ne moremo dobiti 1 točka