

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

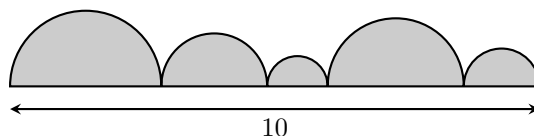
Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 180 minut. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3

1. Figura na sliki je sestavljena iz 5 paroma dotikajočih se polkrogov različnih velikosti. Premeri polkrogov tvorijo daljico dolžine 10 (glej sliko). Koliko je obseg celotne figure?



- (A) 5π (B) 10π (C) $10 + 5\pi$ (D) $10 + 10\pi$
(E) Obseg figure je odvisen od premerov polkrogov.

2. Koliko je ostanek pri deljenju števila $\underbrace{33 \dots 3}_{2025}$ s številom 12?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 9

3. Na velikem ribniku so se zbrale ptice, $\frac{1}{3}$ teh ptic je labodov, preostale pa so race. Kar 70% vseh ptic na ribniku, vključno z vsemi labodi, je belih. Koliko procentov rac na tem ribniku je belih?

- (A) 45 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) $66\frac{2}{3}$

B1. Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo enačbi

$$(2x^2 + 7x + 6)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = (x^2 + 4x + 4)(117x^2 + 128x + 52).$$

B2. Dana je množica $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq a \leq 20\}$. Denimo, da je n naravno število in da so $A_1, A_2, \dots, A_n$ disjunktne množice, katerih unija je enaka A in za katere velja $|A_i| \in A_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, n$. Pri tem $|A_i|$ označuje število elementov množice A_i . Določi najmanjši in največji možen n .

B3. Izbrati želimo množico k praštevil, označimo jo s $\mathcal{P}$, in množico n zaporednih naravnih števil, označimo jo z $\mathcal{N}$, tako da je vsako število $a \in \mathcal{N}$ deljivo z vsaj enim praštevilom $p \in \mathcal{P}$.

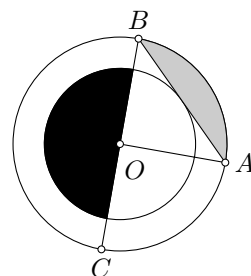
- (a) Določi največji možen n , če je $k = 3$.
- (b) Določi najmanjši možen k , če je $n = 13$.

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 180 minut. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

A1	A2	A3

1. Slika prikazuje dve krožnici s središčem v O . Daljica BC je premer večje krožnice. Tetiva AB večje krožnice se dotika manjše krožnice in velja $\angle BAO = 45^\circ$. Koliko je razmerje med ploščino sivega območja in ploščino črnega območja?



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $1 - \frac{2}{\pi}$ (C) $\frac{\pi-2}{3}$ (D) $\frac{\pi}{8}$ (E) $\frac{2}{5}$

2. Mateja je imela 2 enako visoki sveči, ki gorita enakomerno, a z različnima hitrostma. Rdeča sveča pogori v 4 urah, modra sveča pa v 5 urah. Mateja je obe sveči prižgala istočasno. Koliko ur morata sveči goreti, da bo višina ene od sveč enaka 3-kratniku višine druge sveče?

- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 3 (D) $\frac{12}{5}$ (E) $\frac{40}{11}$

3. Na otoku živi 100 ljudi, nekateri med njimi so resnicoljubi in vedno govorijo resnico, ostali so lažnivci in vedno lažejo. Vsak prebivalec otoka ima rad le en letni čas. Nekega dne je turist vsakega prebivalca otoka vprašal 4 vprašanja:

- (1) "Ali imaš rad zimo?"
- (2) "Ali imaš rad pomlad?"
- (3) "Ali imaš rad poletje?"
- (4) "Ali imaš rad jesen?"

Na prvo vprašanje je pritrdilno odgovorilo 25 prebivalcev otoka, na drugo 25, na tretje 45 in na četrto 45 prebivalcev otoka. Koliko lažnivcev živi na tem otoku?

- (A) 10 (B) 12 (C) 20 (D) 25 (E) 45

B1. Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo neenačbi

$$3\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} < 5.$$

B2. Dana je množica $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq a \leq 20\}$. Denimo, da je n naravno število in da so $A_1, A_2, \dots, A_n$ disjunktne množice, katerih unija je enaka A in za katere velja $|A_i| \in A_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, n$. Pri tem $|A_i|$ označuje število elementov množice A_i . Določi najmanjši in največji možen n .

B3. Izbrati želimo množico k praštevil, označimo jo s $\mathcal{P}$, in množico n zaporednih naravnih števil, označimo jo z $\mathcal{N}$, tako da je vsako število $a \in \mathcal{N}$ deljivo z vsaj enim praštevilom $p \in \mathcal{P}$.

- (a) Določi največji možen n , če je $k = 3$.
- (b) Določi najmanjši možen k , če je $n = 13$.

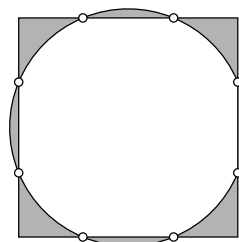
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 180 minut. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

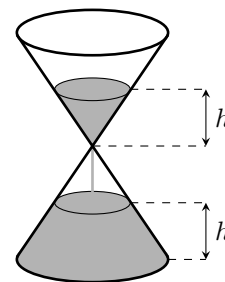
A1	A2	A3

1. Na sliki je prikazanih 8 točk, ki ležijo hkrati na krožnici in na stranicah kvadrata. Poleg tega so te točke oglišča pravilnega 8-kotnika z dolžino stranice 1. Koliko je skupna ploščina vseh osenčenih območij na sliki?

- (A) $\sqrt{2} - 1$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\sqrt{2} + 1$



2. Gost v restavraciji Pečenka dobi brezplačno sladico, če mu ne servirajo kosila v roku 25 minut od njegovega naročila. Na vsaki mizi v restavraciji je peščena ura, katere zgornja in spodnja polovica sta skladna stožca. Ves pesek je v spodnji polovici in spodnja polovica je polna peska. Pesek se iz enega v drugi stožec ure pretaka natanko 25 minut. Ko je Kevin naročil kosilo, je natak ar obrnil njegovo peščeno uro, tako da je bil ves pesek v zgornjem stožcu ure. Ko je Kevin čez nekaj časa pogledal uro, je opazil, da je višina peska v zgornjem stožcu enaka višini peska v spodnjem stožcu (glej sliko). Koliko časa bi moral Kevin še čakati na kosilo, da bi dobil brezplačno sladico?



- (A) Manj kot 3 minute. (B) Med 3 in 4 minute. (C) Med 4 in 5 minut.
(D) Med 5 in 6 minut. (E) Več kot 6 minut.

3. Na ravni dvotirni železniški progi vozita vlaka A in B v nasprotnih smereh z enakomernima hitrostma. Ko se vlaka srečata, potnik na vlaku A skozi okno vidi vlak B natanko 12 sekund, medtem kot potnik na vlaku B skozi okno vidi vlak A le 4 sekunde. Vlak B je dolg 300 m. V nekem trenutku sta zadnja konca vlakov poravnana v isti točki na progi. Koliko metrov bo razdalja med sprednjima koncema obeh vlakov čez 1 minuto po tem trenutku?

- (A) 1500 (B) 1600 (C) 1650 (D) 1800 (E) 1900

B1. Naj bodo a, b, c, x, y in z pozitivna realna števila, za katera velja

$$\log_{a^3b^3} x = 2, \quad \log_{b^2c^2} y = 3 \quad \text{in} \quad \log_{\sqrt{ac}} z = 12.$$

Dokaži, da je tedaj vrednost izraza $\log_{abc}(xyz)$ naravno število.

B2. Dana je množica $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq a \leq 20\}$. Denimo, da je n naravno število in da so $A_1, A_2, \dots, A_n$ disjunktne množice, katerih unija je enaka A in za katere velja $|A_i| \in A_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, n$. Pri tem $|A_i|$ označuje število elementov množice A_i . Določi najmanjši in največji možen n .

B3. Izbrati želimo množico k praštevil, označimo jo s $\mathcal{P}$, in množico n zaporednih naravnih števil, označimo jo z $\mathcal{N}$, tako da je vsako število $a \in \mathcal{N}$ deljivo z vsaj enim praštevilom $p \in \mathcal{P}$.

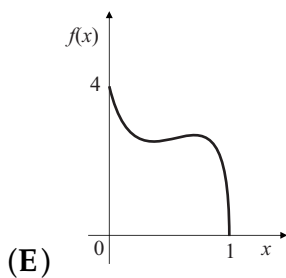
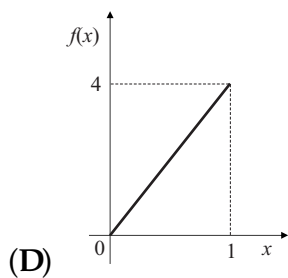
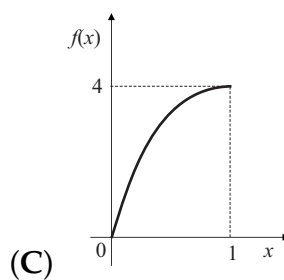
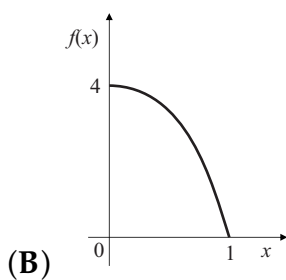
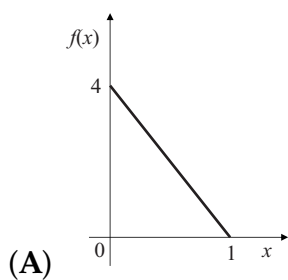
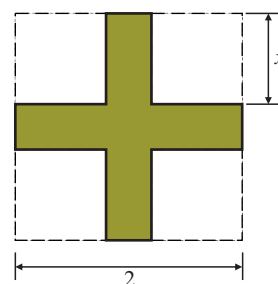
- (a) Določi največji možen n , če je $k = 3$.
- (b) Določi najmanjši možen k , če je $n = 13$.

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 180 minut. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v preglednico na tem listu, rešitve nalog sklopa B pa na liste za reševanje. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.

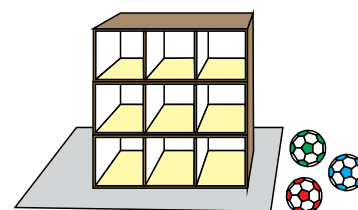
A1	A2	A3

1. Kristina je v vsakem oglišču kvadrata z dolžino stranice 2 odrezala manjši kvadrat z dolžino stranice x , da je dobila lik v obliki znaka + (glej sliko). Ugotovila je, da lahko ploščino dobljenega lika izrazi kot funkcijo f odvisno od x . Katera od spodnjih slik prikazuje graf funkcije f ?



2. Jure ima 3 različne žoge in omaro z 9 prekat (glej sliko). Žoge želi pospraviti v omaro, vsako žogo v svoj prekat, tako da bodo vse 3 žoge na različnih višinah v omari. Na koliko različnih načinov lahko to stori?

- (A) 27 (B) 54 (C) 81 (D) 162 (E) 486



3. Na matematičnem tekmovanju s 30 nalogami so tekmovali 3 učenci. Učitelj je ugotovil, da je vsak učenec pravilno rešil natanko 17 nalog, vsako izmed 30 nalog pa je pravilno rešil vsaj 1 učenec. Učitelj je nalogo proglasil za lahko, če so jo pravilno rešili vsi 3 učenci, in za težko, če jo je pravilno rešil le 1 učenec. Koliko je razlika med številom težkih in številom lahkih nalog na tem tekmovanju?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

B1. Dan je funkcijski predpis $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$.

(a) Določi množico D vseh realnih števil x , za katera je predpis $f(x)$ dobro definiran.

(b) Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo enačbi $f(x) = \sqrt{10}$.

(c) Nariši graf funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.



B2. Dana je množica $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq a \leq 20\}$. Denimo, da je n naravno število in da so $A_1, A_2, \dots, A_n$ disjunktne množice, katerih unija je enaka A in za katere velja $|A_i| \in A_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, n$. Pri tem $|A_i|$ označuje število elementov množice A_i . Določi najmanjši in največji možen n .

B3. Izbrati želimo množico k praštevil, označimo jo s $\mathcal{P}$, in množico n zaporednih naravnih števil, označimo jo z $\mathcal{N}$, tako da je vsako število $a \in \mathcal{N}$ deljivo z vsaj enim praštevilom $p \in \mathcal{P}$.

- (a) Določi največji možen n , če je $k = 3$.
- (b) Določi najmanjši možen k , če je $n = 13$.

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
C	E	B

A1. Označimo polmere polkrogov od leve proti desni z $r_1, r_2, \dots, r_5$. Ker je vsota premerov polkrogov enaka 10, je vsota njihovih polmerov enaka $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 5$. Dolžina polkrožnice z radijem r je enaka πr , torej je obseg figure enak $10 + \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3 + \pi r_4 + \pi r_5 = 10 + \pi(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) = 10 + 5\pi$.

A2. Število $\underbrace{33\dots3}_{2025}$ zapišemo kot $\underbrace{33\dots3}_{2023}00 + 33$. Število $\underbrace{33\dots3}_{2023}00$ je deljivo s 3, ker je vsota njegovih števk deljiva s 3. Hkrati je deljivo tudi s 4, ker je deljivo s 100. Torej je deljivo tudi z 12. Iskani ostanek je torej enak ostanku pri deljenju števila 33 z 12, ki je enak 9, saj je $33 = 2 \cdot 12 + 9$.

A3. $\frac{2}{3}$ ptic na ribniku je rac. Hkrati je $\frac{3}{10}$ ptic na ribniku črnih in vse te ptice so race. Torej je delež rac, ki so črne enak $\frac{3}{10} : \frac{2}{3} = \frac{9}{20}$, delež rac, ki so bele pa je $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20} = \frac{55}{100}$. Torej je 55% rac na ribniku belih.

B1. Izraze v prvih treh oklepajih razcepimo

$$((2x + 3)(x + 2))^3 - ((x + 1)(x + 2))^3 = (x + 2)^2(117x^2 + 128x + 52)$$

in na levi strani enačbe izpostavimo skupni faktor

$$(x + 2)^3((2x + 3)^3 - (x + 1)^3) = (x + 2)^2(117x^2 + 128x + 52).$$

Ena rešitev enačbe je $x = -2$. V nadaljevanju lahko predpostavimo, da je $x \neq -2$, in enačbo okrajšamo z $(x + 2)^2$, da dobimo

$$(x + 2)((2x + 3)^3 - (x + 1)^3) = 117x^2 + 128x + 52.$$

Levo stran enačbe poenostavimo

$$\begin{aligned} & (x + 2)((2x + 3)^3 - (x + 1)^3) \\ &= (x + 2)((8x^3 + 36x^2 + 54x + 27) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)) \\ &= (x + 2)(7x^3 + 33x^2 + 51x + 26) \\ &= 7x^4 + 33x^3 + 51x^2 + 26x + 14x^3 + 66x^2 + 102x + 52 \\ &= 7x^4 + 47x^3 + 117x^2 + 128x + 52. \end{aligned}$$

Ko to upoštevamo v enačbi, lahko enačbo poenostavimo do

$$7x^4 + 47x^3 = 0.$$

Levo stran razcepimo

$$(7x + 47)x^3 = 0$$

in razberemo rešitvi $x = 0$ in $x = -\frac{47}{7}$. Dana enačba ima torej 3 različne rešitve, to so $x = -2$, $x = 0$ in $x = -\frac{47}{7}$.

2. način. Levo stran enačbe razcepimo kot razliko kubov in jo poenostavimo

$$\begin{aligned}
 & (2x^2 + 7x + 6)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 \\
 &= ((2x^2 + 7x + 6) - (x^2 + 3x + 2)) \\
 &\quad \cdot ((2x^2 + 7x + 6)^2 + (2x^2 + 7x + 6)(x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 2)^2) \\
 &= (x^2 + 4x + 4)((4x^4 + 49x^2 + 36 + 28x^3 + 24x^2 + 84x) \\
 &\quad + (2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 7x^3 + 21x^2 + 14x + 6x^2 + 18x + 12) \\
 &\quad + (x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 + 4x^2 + 12x)) \\
 &= (x^2 + 4x + 4)(7x^4 + 47x^3 + 117x^2 + 128x + 52).
 \end{aligned}$$

Rezultat upoštevamo v enačbi in enačbo preoblikujemo do

$$(x^2 + 4x + 4)(7x^4 + 47x^3 + 117x^2 + 128x + 52) - (x^2 + 4x + 4)(117x^2 + 128x + 52) = 0.$$

Na levi strani izpostavimo skupni faktor

$$(x^2 + 4x + 4)(7x^4 + 47x^3) = 0$$

in levo stran razcepimo

$$(x + 2)^2 x^3 (7x + 47) = 0.$$

Od tod razberemo rešitve $x = -2$, $x = 0$ in $x = -\frac{47}{7}$.

3. način. Odpravimo vse oklepaje v enačbi in enačbo poenostavimo do

$$7x^6 + 75x^5 + 216x^4 + 188x^3 = 0.$$

Levo stran enačbe razcepimo

$$x^3(x + 2)^2(7x + 47) = 0$$

in razberemo rešitve $x = 0$, $x = -2$ in $x = -\frac{47}{7}$.

Točkovnik (1. način):

Eden od razcepov $(x + 2)(2x + 3)$ in $(x + 2)(x + 1)$	1 točka
Zapisa $(x + 2)^3(2x + 3)^3$ in $(x + 2)^3(x + 1)^3$	1 točka
Razcep $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$	1 točka
Zapis $(x + 2)^2((2x + 3)^3 - (x + 1)^3 - (117x^2 + 128x + 52))$ ali pravilno krajšanje $(x + 2)^2$ z zapisom, da je $x = -2$ rešitev enačbe	1 točka
Dobljena enačba $(x + 2)^2(7x^4 + 47x^3) = 0$	1 točka
Dobljena enačba $(x + 2)^2 x^3 (7x + 47) = 0$	1 točka
Rešitve $x = 0$, $x = -2$ in $x = -\frac{47}{7}$	1 točka

Točkovnik (2. način):

Ideja razlike kubov, ki je jasno zapisana	1 točka
Dobljen izraz $((2x^2 + 7x + 6) - (x^2 + 3x + 2))((2x^2 + 7x + 6)^2 + (2x^2 + 7x + 6)(x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 2)^2)$	1 točka
Pravilno poenostavljena oba oklepaja v prejšnji točki	1 točka
Dobljena enačba $(x^2 + 4x + 4)(7x^4 + 47x^3) = 0$	2 točki
Dobljena enačba $(x + 2)^2 x^3 (7x + 47) = 0$	1 točka
Rešitve $x = 0$, $x = -2$ in $x = -\frac{47}{7}$	1 točka

Točkovnik (3. način):

Dobljena enačba $7x^6 + 75x^5 + 216x^4 + 188x^3 = 0$ 2 točki
 Z jasnim postopkom dobljena enačba $(x + 2)^2 x^3 (7x + 47) = 0$ 4 točke
 Rešitve $x = 0$, $x = -2$ in $x = -\frac{47}{7}$ 1 točka

B2. Množice

$$A_1 = \{20, -2, -3, -4, \dots, -20\},$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 10\},$$

$$A_3 = \{-1, 0, 11, 12, 13, \dots, 19\}$$

zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 20$, $|A_2| = 10$ in $|A_3| = 11$. Torej je n lahko enak 3.

Množice

$$A_1 = \{1\},$$

$$A_2 = \{2, -20\},$$

$$A_3 = \{3, -19, -18\},$$

$$A_4 = \{4, -17, -16, -15\},$$

$$A_5 = \{5, -14, -13, -12, -11\},$$

$$A_6 = \{6, -10, -9, -8, -7, -6\},$$

$$A_7 = \{7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\},$$

$$A_8 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

prav tako zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$, $|A_4| = 4$, $|A_5| = 5$, $|A_6| = 6$, $|A_7| = 7$ in $|A_8| = 13$. Torej je n lahko enako 8.

Dokažimo, da sta to najmanjši in največji možen n . Množica A ima 41 elementov. Če bi bil $n \leq 2$, bi morala vsaj ena od množic, recimo A_1 , imeti več kot 20 elementov. Toda nobeno število večje od 20 ni element množice A , zato tudi ni element množice A_1 . Množica A_1 bi torej kršila pogoj $|A_1| \in A_1$, kar je protislovje. Sledi, da je $n \geq 3$.

Denimo, da je $n \geq 9$. Ker je $|A_i| \in A_i$, je vsaka množica A_i neprazna. Ker so množice $A_1, A_2, \dots, A_n$ hkrati disjunktne, so $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ različna naravna števila. Torej je

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45,$$

kar pa je protislovje, saj ima množica A le 41 elementov. Torej je $n \leq 8$.

Primer množic A_i za $n = 3$ 1 točka

Primer množic A_i za $n = 8$ 1 točka

Ugotovitev, da je $|A_i| \leq 20$ za vsak indeks i 1 točka

Dokaz spodnje meje $n \geq 3$ 1 točka

Utemeljitev, da imajo množice različna števila elementov 1 točka

Dokaz zgornje meje $n \leq 8$ 2 točki

B3.

(a) Naj bo $k = 3$. Množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ in $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ustrezata pogojem naloge, torej je n lahko enak 5. Pokažimo, da je to največji možen n . Denimo, da je $n \geq 6$ in označimo najmanjše število v množici $\mathcal{N}$ z a . Tedaj množica $\mathcal{N}$ vsebuje števila $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$. Praštevilo 2 deli natanko 3 izmed teh števil, praštevilo 3 deli natanko 2 izmed teh števil, praštevilo 5 deli 1 ali 2 izmed teh števil, vsako praštevilo $p > 5$ pa deli največ 1 izmed teh števil. Torej, če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $2 + 2 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje. Torej je $2 \in \mathcal{P}$. Če izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$ odstranimo tista, ki so deljiva z 2, nam ostanejo 3 zaporedna liha števila. Od teh je kvečjemu 1 deljivo s 3, kvečjemu 1 deljivo s 5 in kvečjemu 1 deljivo s

praštevilom $p > 5$. Torej praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $3 + 1 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje.

- (b) Naj bo $n = 13$. Hitro se prepričamo, da množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 29, 31\}$ in $\mathcal{N} = \{24, 25, 26, \dots, 36\}$ ustrezata pogojem naloge, zato je k lahko enak 5. Dokažimo, da je to najmanjši možen k . Denimo, da je $k \leq 4$. Praštevilo 2 deli največ 7 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 3 deli največ 5 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 5 deli največ 3 števila v $\mathcal{N}$, praštevilo 7 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, praštevilo 11 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, vsako praštevilo $p > 11$ pa deli največ 1 število v $\mathcal{N}$. Če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $5 + 3 + 2 + 2 = 12$ števil iz $\mathcal{N}$, saj je $k \leq 4$. To je protislovje, zato mora biti $2 \in \mathcal{P}$. Preštejmo, koliko lihih števil v $\mathcal{N}$ je lahko deljivih s praštevili v $\mathcal{P}$. Množica $\mathcal{N}$ vsebuje največ 7 lihih števil, ki so avtomatično zaporedna liha števila. Največ 3 izmed njih so deljiva s 3, največ 2 sta deljivi s 5 in največ 1 je deljivo s poljubnim praštevilom $p > 5$. Ker je $2 \in \mathcal{P}$ in $k \leq 4$, množica $\mathcal{P}$ vsebuje največ 3 liha praštevila. Torej je največ $3 + 2 + 1 = 6$ lihih števil v $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. Skupaj je torej največ $7 + 6 = 13$ števil iz $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. To pomeni, da mora množica $\mathcal{N}$ vsebovati 7 sodih števil in 3 liha števila deljiva s 3. To pa ni mogoče, saj če $\mathcal{N}$ vsebuje 7 sodih števil, vsebuje natanko 6 zaporednih lihih števil, med temi pa sta natanko 2 deljivi s 3. Dobili smo protislovje, torej je k vsaj 5.

Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $k = 3$ in $n = 5$ 1 točka
Določeno največje možno število elementov množice $\mathcal{N}$, ki so deljivi z nekim praštevilom p . 1 točka

Dokaz neenakosti $n \leq 5$ 1 točka

Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $n = 13$ in $k = 5$ 1 točka

Dokaz, da je 2 element množice $\mathcal{P}$ v primeru $n = 13$ 1 točka

Določeno največje možno število lihih elementov množice $\mathcal{N}$ s 13 elementi, ki so deljivi z nekim lihim praštevilom $p < 13$ 1 točka

Dokaz neenakosti $k \geq 5$ 1 točka

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
B	E	C

A1. Trikotnik ABO je enakokrak z vrhom pri O . Torej je $\angle OAB = 180^\circ - 2\angle BAO = 90^\circ$. Označimo polmer velike krožnice z $R = |OA|$. Ker je trikotnik ABO polovica kvadrata s stranico R , je polmer male krožnice enak polovici diagonale tega kvadrata, to je $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ploščina sivega območja je torej $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$, ploščina črnega območja pa $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$. Razmerje med njima je zato enako

$$\frac{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

A2. Označimo višino obeh sveč z v . V eni uri pogori $\frac{v}{4}$ rdeče sveče in $\frac{v}{5}$ modre sveče. Po t urah je rdeča sveča visoka $v - t\frac{v}{4}$, modra pa $v - t\frac{v}{5}$. Rdeča sveča gori hitreje kot modra, zato iščemo tak t , da bo

$$v - t\frac{v}{5} = 3\left(v - t\frac{v}{4}\right).$$

Enačbo okrajšamo z v in dobimo $1 - \frac{t}{5} = 3(1 - \frac{t}{4})$. Od tod izrazimo $\frac{11t}{20} = 2$ oziroma $t = \frac{40}{11}$.

A3. Označimo število resnicoljubov z R , število lažnivcev pa z L . Vsak resnicoljub je odgovoril na 1 vprašanje pritrdilno in na 3 nikalno, vsak lažnivec pa je odgovoril na 3 vprašanja pritrdilno in na 1 nikalno. Pritrdilnih odgovorov je bilo skupaj $R + 3L = 25 + 25 + 45 + 45 = 140$. Hkrati pa je $R + L = 100$. Od prve enačbe odštejemo drugo, da dobimo $2L = 40$. Na otoku torej živi $L = 20$ lažnivcev.

B1. Kvadratna korena bosta dobro definirana, če velja $1+x \geq 0$ in $1-x \geq 0$ oziroma $x \in [-1, 1]$. Ker sta obe strani neenačbe nenegativni, smemo neenačbo kvadrirati, da dobimo ekvivalentno neenačbo

$$9(1+x) + 12\sqrt{(1+x)(1-x)} + 4(1-x) < 25.$$

Neenačbo preoblikujemo do

$$12\sqrt{(1+x)(1-x)} < 12 - 5x.$$

Ker je $x \leq 1$, je $12 - 5x \geq 7$, torej sta obe strani neenačbe nenegativni, zato smemo neenačbo ponovno kvadrirati. Dobimo ekvivalentno neenačbo

$$144(1+x)(1-x) < (12 - 5x)^2.$$

Odpravimo oklepaje

$$144 - 144x^2 < 144 - 120x + 25x^2$$

in neenačbo preoblikujemo do

$$169x^2 - 120x > 0.$$

Kvadratna funkcija $169x^2 - 120x = (169x - 120)x$ ima ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{120}{169}$ in pozitiven vodilni koeficient, torej je pozitivna, ko je $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{120}{169}, \infty)$. Ko upoštevamo oba pogoja za x , dobimo končo rešitev

$$x \in ((-\infty, 0) \cup (\frac{120}{169}, \infty)) \cap [-1, 1] = [-1, 0) \cup (\frac{120}{169}, 1].$$

2. način. Kvadratna korena bosta dobro definirana, če velja $1 + x \geq 0$ in $1 - x \geq 0$ oziroma $x \in [-1, 1]$. Rešimo najprej enačbo

$$3\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x} = 5.$$

Enačbo preuredimo v

$$3\sqrt{1+x} = 5 - 2\sqrt{1-x}$$

in jo kvadriramo, da dobimo

$$9(1+x) = 25 - 20\sqrt{1-x} + 4(1-x).$$

Nato jo preuredimo do

$$20\sqrt{1-x} = 20 - 13x$$

in jo zopet kvadriramo

$$400(1-x) = 400 - 520x + 169x^2.$$

Po poenostavljanju dobimo

$$(169x - 120)x = 0.$$

Rešitvi enačbe sta $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{120}{169}$. Rešitvi nam interval $[-1, 1]$ razdelita na tri podintervale, $[-1, 0)$, $(0, \frac{120}{169})$ in $(\frac{120}{169}, 1]$. Pri 0 in pri $\frac{120}{169}$ vzamemo odprto, ker x_1 in x_2 ne ustrezata dani neenačbi. Na vsakem od podintervalov izberemo eno število in preverimo, ali ustreza neenačbi. Na primer, število $x = -1 \in [-1, 0)$ ustreza neenačbi, saj dobimo $2\sqrt{2} < 5$, kar je po kvadriranju ekvivalentno $8 < 25$. Število $x = \frac{3}{5} \in (0, \frac{120}{169})$ ne ustreza neenačbi, saj dobimo $3\sqrt{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{\frac{2}{5}} = 6\sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{2}{5}} = 8\sqrt{\frac{2}{5}} < 5$, kar je po kvadriranju ekvivalentno $64 \cdot \frac{2}{5} < 25$ oziroma $128 < 125$. Število $x = 1 \in (\frac{120}{169}, 1]$ ustreza neenačbi, saj dobimo $3\sqrt{2} < 5$, kar je po kvadriranju ekvivalentno $18 < 25$. Rešitev dane neenačbe je torej unija prvega in tretjega podintervala, tj. $x \in [-1, 0) \cup (\frac{120}{169}, 1]$.

Opomba. Enačbo lahko rešimo tudi tako, da jo preoblikujemo v $2\sqrt{1-x} = 5 - 3\sqrt{1+x}$ in postopamo na enak način.

Zapisano definicijsko območje obeh korenov 1 točka
 Preoblikovana neenačba v $12\sqrt{(1+x)(1-x)} < 12 - 5x$ 1 točka
 Obrazložitev, da je ta oblika ekvivalentna začetni 1 točka
 Zapis $169x^2 - 120x > 0$ 1 točka
 Obrazložitev, da so rešitve ekvivalentne začetni 1 točka
 Zapis končne rešitve $[-1, 0) \cup (\frac{120}{169}, 1]$. Tekmovalcu se odbije 1 točka, če pozabi vključiti rešitvi 1 ali -1 2 točki

2. način: Zapisano definicijsko območje obeh korenov 1 točka
 Preoblikovanje do enačbe $(169x - 120)x = 0$ 2 točki
 Izbira pravih intervalov in argumentacija 2 točki
 Zapis končne rešitve $[-1, 0) \cup (\frac{120}{169}, 1]$. Tekmovalcu se odbije 1 točka, če pozabi vključiti rešitvi 1 ali -1 2 točki

B2. Množice

$$A_1 = \{20, -2, -3, -4, \dots, -20\},$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 10\},$$

$$A_3 = \{-1, 0, 11, 12, 13, \dots, 19\}$$

zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 20$, $|A_2| = 10$ in $|A_3| = 11$. Torej je n lahko enak 3.

Množice

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, \\ A_2 &= \{2, -20\}, \\ A_3 &= \{3, -19, -18\}, \\ A_4 &= \{4, -17, -16, -15\}, \\ A_5 &= \{5, -14, -13, -12, -11\}, \\ A_6 &= \{6, -10, -9, -8, -7, -6\}, \\ A_7 &= \{7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}, \\ A_8 &= \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \end{aligned}$$

prav tako zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$, $|A_4| = 4$, $|A_5| = 5$, $|A_6| = 6$, $|A_7| = 7$ in $|A_8| = 13$. Torej je n lahko enako 8.

Dokažimo, da sta to najmanjši in največji možen n . Množica A ima 41 elementov. Če bi bil $n \leq 2$, bi morala vsaj ena od množic, recimo A_1 , imeti več kot 20 elementov. Toda nobeno število večje od 20 ni element množice A , zato tudi ni element množice A_1 . Množica A_1 bi torej kršila pogoj $|A_1| \in A_1$, kar je protislovje. Sledi, da je $n \geq 3$.

Denimo, da je $n \geq 9$. Ker je $|A_i| \in A_i$, je vsaka množica A_i neprazna. Ker so množice $A_1, A_2, \dots, A_n$ hkrati disjunktne, so $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ različna naravna števila. Torej je

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45,$$

kar pa je protislovje, saj ima množica A le 41 elementov. Torej je $n \leq 8$.

Primer množic A_i za $n = 3$	1 točka
Primer množic A_i za $n = 8$	1 točka
Ugotovitev, da je $ A_i \leq 20$ za vsak indeks i	1 točka
Dokaz spodnje meje $n \geq 3$	1 točka
Utemeljitev, da imajo množice različna števila elementov	1 točka
Dokaz zgornje meje $n \leq 8$	2 točki

B3.

- (a) Naj bo $k = 3$. Množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ in $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ustrezata pogojem naloge, torej je n lahko enak 5. Pokažimo, da je to največji možen n . Denimo, da je $n \geq 6$ in označimo najmanjše število v množici $\mathcal{N}$ z a . Tedaj množica $\mathcal{N}$ vsebuje števila $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$. Praštevilo 2 deli natanko 3 izmed teh števil, praštevilo 3 deli natanko 2 izmed teh števil, praštevilo 5 deli 1 ali 2 izmed teh števil, vsako praštevilo $p > 5$ pa deli največ 1 izmed teh števil. Torej, če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $2 + 2 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje. Torej je $2 \in \mathcal{P}$. Če izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$ odstranimo tista, ki so deljiva z 2, nam ostanejo 3 zaporedna liha števila. Od teh je kvečjemu 1 deljivo s 3, kvečjemu 1 deljivo s 5 in kvečjemu 1 deljivo s praštevilom $p > 5$. Torej praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $3 + 1 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje.
- (b) Naj bo $n = 13$. Hitro se prepričamo, da množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 29, 31\}$ in $\mathcal{N} = \{24, 25, 26, \dots, 36\}$ ustrezata pogojem naloge, zato je k lahko enak 5. Dokažimo, da je to najmanjši možen k . Denimo, da je $k \leq 4$. Praštevilo 2 deli največ 7 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 3 deli največ 5 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 5 deli največ 3 števila v $\mathcal{N}$, praštevilo 7 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, praštevilo 11 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, vsako praštevilo $p > 11$ pa deli največ 1 število v $\mathcal{N}$. Če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $5 + 3 + 2 + 2 = 12$ števil iz $\mathcal{N}$, saj je $k \leq 4$. To je protislovje, zato mora biti $2 \in \mathcal{P}$. Preštejmo, koliko lihih števil v $\mathcal{N}$ je lahko deljivih s praštevilom v $\mathcal{P}$.

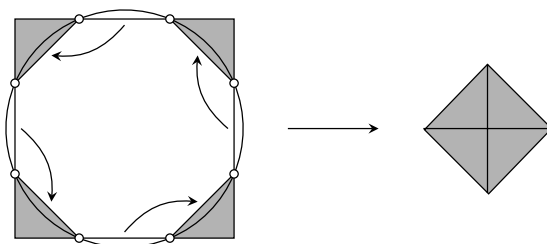
Množica $\mathcal{N}$ vsebuje največ 7 lihih števil, ki so avtomatično zaporedna liha števila. Največ 3 izmed njih so deljiva s 3, največ 2 sta deljivi s 5 in največ 1 je deljivo s poljubnim praštevilom $p > 5$. Ker je $2 \in \mathcal{P}$ in $k \leq 4$, množica $\mathcal{P}$ vsebuje največ 3 liha praštevila. Torej je največ $3 + 2 + 1 = 6$ lihih števil v $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. Skupaj je torej največ $7 + 6 = 13$ števil iz $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. To pomeni, da mora množica $\mathcal{N}$ vsebovati 7 sodih števil in 3 liha števila deljiva s 3. To pa ni mogoče, saj če $\mathcal{N}$ vsebuje 7 sodih števil, vsebuje natanko 6 zaporednih lihih števil, med temi pa sta natanko 2 deljivi s 3. Dobili smo protislovje, torej je k vsaj 5.

Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $k = 3$ in $n = 5$	1 točka
Določeno največje možno število elementov množice $\mathcal{N}$, ki so deljivi z nekim praštevilom p . 1 točka	
Dokaz neenakosti $n \leq 5$	1 točka
Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $n = 13$ in $k = 5$	1 točka
Dokaz, da je 2 element množice $\mathcal{P}$ v primeru $n = 13$	1 točka
Določeno največje možno število lihih elementov množice $\mathcal{N}$ s 13 elementi, ki so deljivi z nekim lihim praštevilom $p < 13$	1 točka
Dokaz neenakosti $k \geq 5$	1 točka

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
C	B	E

A1. Če premaknemo 4 osenčena območja zunaj kvadrata v notranjost, kot je prikazano na sliki, dobimo 4 enakokrake pravokotne trikotnike s hipotenuzo dolžine 1. Iz teh 4 trikotnikov lahko nato sestavimo kvadrat s stranico dolžine 1. Skupna ploščina vseh osenčenih območij na sliki je torej 1.



A2. Naj bo H višina posameznega stožca ure in R polmer osnovne ploske stožca. Skupna prostornina peska v uri je torej $V = \frac{1}{3}H\pi R^2$, saj ves pesek ravno zapolni en stožec ure. Ko je Kevin pogledal uro, je bila višina preostalega peska v zgornjem stožcu $h = \frac{H}{2}$ in zato je bil polmer osnovne ploskve preostalega peska $\frac{R}{2}$. Prostornina preostalega peska v zgornjem stožcu ure je bila takrat enaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{V}{8}$. V zgornji polovici ure je torej ostala $\frac{1}{8}$ vsega peska. Da bi dobil brezplačno sladico, bi moral Kevin na kosilo čakati še $\frac{1}{8} \cdot 25 = 3\frac{1}{8}$ minut, torej med 3 in 4 minute.

A3. Relativna hitrost vlakov je $\frac{300}{12}$ m/s. Vlak A je dolg $\frac{300}{12} \cdot 4 = 100$ m. Čez 1 minuto oz. 60 sekund bo razdalja med zadnjima koncema vlakov enaka $\frac{300}{12} \cdot 60 = 1500$ metrov, razdalja med sprednjima koncema pa $1500 + 300 + 100 = 1900$ metrov.

B1. Po definiciji logaritma je

$$\begin{aligned} x &= (a^3b^3)^2 = a^6b^6, \\ y &= (b^2c^2)^3 = b^6c^6 \quad \text{in} \\ z &= (\sqrt{ac})^{12} = a^6c^6. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$xyz = a^6b^6 \cdot b^6c^6 \cdot a^6c^6 = a^{12}b^{12}c^{12} = (abc)^{12}.$$

Po definiciji logaritma je torej $\log_{abc}(xyz) = 12$, kar je naravno število.

2. način. Z upoštevanjem pravil za logaritme izpeljemo

$$\begin{aligned} 2 &= \log_{a^3b^3} x = \frac{\log x}{\log((ab)^3)} = \frac{\log x}{3 \log(ab)}, \\ 3 &= \log_{b^2c^2} y = \frac{\log y}{\log((bc)^2)} = \frac{\log y}{2 \log(bc)}, \\ 12 &= \log_{\sqrt{ac}} z = \frac{\log z}{\log((ac)^{\frac{1}{2}})} = \frac{\log z}{\frac{1}{2} \log(ac)}. \end{aligned}$$

Od tod izrazimo

$$\log x = 6 \log(ab) = 6(\log a + \log b),$$

$$\log y = 6 \log(bc) = 6(\log b + \log c),$$

$$\log z = 6 \log(ac) = 6(\log a + \log c).$$

Torej je

$$\begin{aligned} \log_{abc}(xyz) &= \frac{\log(xyz)}{\log(abc)} = \frac{\log x + \log y + \log z}{\log a + \log b + \log c} \\ &= \frac{6(\log a + \log b) + 6(\log b + \log c) + 6(\log a + \log c)}{\log a + \log b + \log c} \\ &= \frac{12(\log a + \log b + \log c)}{\log a + \log b + \log c} = 12, \end{aligned}$$

kar je naravno število.

1. način. Ugotovitev, da je $x = a^6 b^6$ 2 točki

Ugotovitev, da je $y = b^6 c^6$ 2 točki

Ugotovitev, da je $z = a^6 c^6$ 2 točki

Sklep, da je $\log_{abc}(xyz) = 12$ 1 točka

2. način. Ugotovitev, da je $\log_{a^3 b^3} x = \frac{\log x}{\log((ab)^3)} = \frac{\log x}{3 \log(ab)}$ 1 točka

Ugotovitev, da je $\log_{b^2 c^2} y = \frac{\log y}{\log((bc)^2)} = \frac{\log y}{2 \log(bc)}$ 1 točka

Ugotovitev, da je $\log_{\sqrt{ac}} z = \frac{\log z}{\log((ac)^{\frac{1}{2}})} = \frac{\log z}{\frac{1}{2} \log(ac)}$ 1 točka

Sklep, da je $\log_{abc}(xyz) = 12$ 4 točke

B2. Množice

$$A_1 = \{20, -2, -3, -4, \dots, -20\},$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 10\},$$

$$A_3 = \{-1, 0, 11, 12, 13, \dots, 19\}$$

zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 20$, $|A_2| = 10$ in $|A_3| = 11$. Torej je n lahko enak 3.

Množice

$$A_1 = \{1\},$$

$$A_2 = \{2, -20\},$$

$$A_3 = \{3, -19, -18\},$$

$$A_4 = \{4, -17, -16, -15\},$$

$$A_5 = \{5, -14, -13, -12, -11\},$$

$$A_6 = \{6, -10, -9, -8, -7, -6\},$$

$$A_7 = \{7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\},$$

$$A_8 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

prav tako zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$, $|A_4| = 4$, $|A_5| = 5$, $|A_6| = 6$, $|A_7| = 7$ in $|A_8| = 13$. Torej je n lahko enako 8.

Dokažimo, da sta to najmanjši in največji možen n . Množica A ima 41 elementov. Če bi bil $n \leq 2$, bi morala vsaj ena od množic, recimo A_1 , imeti več kot 20 elementov. Toda nobeno število večje od 20 ni element množice A , zato tudi ni element množice A_1 . Množica A_1 bi torej kršila pogoj $|A_1| \in A_1$, kar je protislovje. Sledi, da je $n \geq 3$.

Denimo, da je $n \geq 9$. Ker je $|A_i| \in A_i$, je vsaka množica A_i neprazna. Ker so množice $A_1, A_2, \dots, A_n$ hkrati disjunktne, so $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ različna naravna števila. Torej je

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45,$$

kar pa je protislovje, saj ima množica A le 41 elementov. Torej je $n \leq 8$.

Primer množic A_i za $n = 3$	1 točka
Primer množic A_i za $n = 8$	1 točka
Ugotovitev, da je $ A_i \leq 20$ za vsak indeks i	1 točka
Dokaz spodnje meje $n \geq 3$	1 točka
Utemeljitev, da imajo množice različna števila elementov	1 točka
Dokaz zgornje meje $n \leq 8$	2 točki

B3.

- (a) Naj bo $k = 3$. Množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ in $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ustrezata pogojem naloge, torej je n lahko enak 5. Pokažimo, da je to največji možen n . Denimo, da je $n \geq 6$ in označimo najmanjše število v množici $\mathcal{N}$ z a . Tedaj množica $\mathcal{N}$ vsebuje števila $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$. Praštevilo 2 deli natanko 3 izmed teh števil, praštevilo 3 deli natanko 2 izmed teh števil, praštevilo 5 deli 1 ali 2 izmed teh števil, vsako praštevilo $p > 5$ pa deli največ 1 izmed teh števil. Torej, če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $2 + 2 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje. Torej je $2 \in \mathcal{P}$. Če izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$ odstranimo tista, ki so deljiva z 2, nam ostanejo 3 zaporedna liha števila. Od teh je kvečjemu 1 deljivo s 3, kvečjemu 1 deljivo s 5 in kvečjemu 1 deljivo s praštevilom $p > 5$. Torej praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $3 + 1 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje.
- (b) Naj bo $n = 13$. Hitro se prepričamo, da množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 29, 31\}$ in $\mathcal{N} = \{24, 25, 26, \dots, 36\}$ ustrezata pogojem naloge, zato je k lahko enak 5. Dokažimo, da je to najmanjši možen k . Denimo, da je $k \leq 4$. Praštevilo 2 deli največ 7 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 3 deli največ 5 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 5 deli največ 3 števila v $\mathcal{N}$, praštevilo 7 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, praštevilo 11 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, vsako praštevilo $p > 11$ pa deli največ 1 število v $\mathcal{N}$. Če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $5 + 3 + 2 + 2 = 12$ števil iz $\mathcal{N}$, saj je $k \leq 4$. To je protislovje, zato mora biti $2 \in \mathcal{P}$. Preštejmo, koliko lihih števil v $\mathcal{N}$ je lahko deljivih s praštevili v $\mathcal{P}$. Množica $\mathcal{N}$ vsebuje največ 7 lihih števil, ki so avtomatično zaporedna liha števila. Največ 3 izmed njih so deljiva s 3, največ 2 sta deljivi s 5 in največ 1 je deljivo s poljubnim praštevilom $p > 5$. Ker je $2 \in \mathcal{P}$ in $k \leq 4$, množica $\mathcal{P}$ vsebuje največ 3 liha praštevila. Torej je največ $3 + 2 + 1 = 6$ lihih števil v $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. Skupaj je torej največ $7 + 6 = 13$ števil iz $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. To pomeni, da mora množica $\mathcal{N}$ vsebovati 7 sodih števil in 3 liha števila deljiva s 3. To pa ni mogoče, saj če $\mathcal{N}$ vsebuje 7 sodih števil, vsebuje natanko 6 zaporednih lihih števil, med temi pa sta natanko 2 deljivi s 3. Dobili smo protislovje, torej je k vsaj 5.

Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $k = 3$ in $n = 5$	1 točka
Določeno največje možno število elementov množice $\mathcal{N}$, ki so deljivi z nekim praštevilom p .	1 točka
Dokaz neenakosti $n \leq 5$	1 točka
Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $n = 13$ in $k = 5$	1 točka
Dokaz, da je 2 element množice $\mathcal{P}$ v primeru $n = 13$	1 točka
Določeno največje možno število lihih elementov množice $\mathcal{N}$ s 13 elementi, ki so deljivi z nekim lihim praštevilom $p < 13$	1 točka
Dokaz neenakosti $k \geq 5$	1 točka

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
B	D	E

A1. Ploščina dobljenega lika je enaka $f(x) = 4 - 4x^2$. Funkcija f je kvadratna funkcija z začetno vrednostjo 4 in ničlo 0. Njen graf je prikazan na sliki **(B)**.

A2. Prvo žogo lahko Jure postavi kateregakoli izmed 9 prekatov, za drugo žogo mu ostane na voljo 6 prekatov, za tretjo pa 3 prekati. Jure lahko žoge pospravi v omaro na $9 \cdot 6 \cdot 3 = 162$ različnih načinov.

A3. Označimo število težkih nalog s T , število lahkih nalog z L , število ostalih nalog pa s S . Vsako težko nalogo je pravilno rešil 1 učenec, vsako lahko 3 učenci, preostale naloge pa sta pravilno rešila 2 učenca. Število pravilnih rešitev je bilo torej $T + 2S + 3L = 3 \cdot 17 = 51$, saj je vsak učenec pravilno rešil 17 nalog. Vseh nalog na tekmovanju je bilo $T + S + L = 30$. Če drugo enačbo pomnožimo z 2 in od nje odštejemo prvo enačbo, dobimo

$$T - L = 2(T + S + L) - (T + 2S + 3L) = 2 \cdot 30 - 51 = 9.$$

B1.

(a) Veljati mora $2x - 1 \geq 0$, $x + \sqrt{2x - 1} \geq 0$ in $x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$. Prva neenačba ima rešitve $x \geq \frac{1}{2}$, druga neenačba je zato avtomatično izpolnjena, tretja neenačba pa je ekvivalentna

$$x \geq \sqrt{2x - 1}.$$

Ker sta obe strani neenačbe pozitivni, lahko neenačbo kvadriramo in dobimo ekvivalentno neenačbo

$$x^2 \geq 2x - 1.$$

Neenačbo preuredimo v $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ oziroma $(x - 1)^2 \geq 0$, kar velja za vse x . Torej je $D = [\frac{1}{2}, \infty)$.

(b) Enačbo $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{10}$ kvadriramo, da dobimo

$$x + \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{(x + \sqrt{2x - 1})(x - \sqrt{2x - 1})} + x - \sqrt{2x - 1} = 10.$$

Nato jo poenostavimo do

$$2x + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} = 10$$

oziroma

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 5 - x.$$

Sedaj jo ponovno kvadriramo, da dobimo

$$x^2 - 2x + 1 = 25 - 10x + x^2,$$

kar lahko preoblikujemo v $8x = 24$. Sledi $x = 3$ in ker je $3 \in D$, je to res rešitev.

- (c) Pišimo $y = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} \geq 0$. Enačbo podobno kot v točki (b) kvadriramo

$$y^2 = x + \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{(x + \sqrt{2x - 1})(x - \sqrt{2x - 1})} + x - \sqrt{2x - 1}$$

in poenostavimo do

$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)}.$$

Izraz pod korenem razcepimo in dobimo

$$y^2 = 2x + 2\sqrt{(x - 1)^2} = 2x + 2|x - 1|.$$

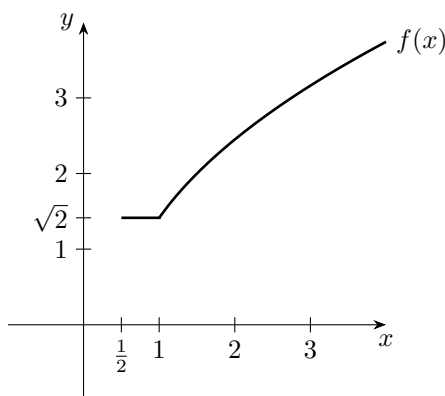
Sledi

$$y^2 = \begin{cases} 4x - 2, & x \geq 1, \\ 2, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

oziroma

$$y = \begin{cases} \sqrt{4x - 2}, & x \geq 1, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

saj je $y \geq 0$. Graf funkcije je prikazan na spodnji sliki.



- (a) Zapis vseh pogojev $2x - 1 \geq 0$, $x + \sqrt{2x - 1} \geq 0$ in $x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$ 1 točka
Izračun $D = [\frac{1}{2}, \infty)$ 1 točka
- (b) Zapis ekvivalentne enačbe po prvem kvadriranju $2x + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} = 10$ 1 točka
Zapis ekvivalentne enačbe brez kvadratnega korena po drugem kvadriranju $x^2 - 2x + 1 = 25 - 10x + x^2$ 1 točka
Izračunana in preverjena rešitev $x = 3$ 1 točka
(Če kandidat ni preveril rešitve ali preveril pogoja, da rešitev leži v definicijskem območju, točke za odgovor ne dobi).
- (c) Zapisan predpis funkcije f z obema predpisoma 1 točka
Iz grafa je razvidno, da je funkcija na intervalu $[1/2, 1]$ konstantno enaka $\sqrt{2}$ in da je funkcija na intervalu $[1, \infty]$ del parabole, naraščajoča in konkavna, hkrati pa poteka skozi dve ustrezni točki, npr. $(1, \sqrt{2})$ in $(3, \sqrt{10})$ 1 točka

(Če tekmovalec koordinatnega sistema ne opremi z ustreznimi oznakami, lahko dobi za graf funkcije največ 1 točko.)

B2. Množice

$$A_1 = \{20, -2, -3, -4, \dots, -20\},$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 10\},$$

$$A_3 = \{-1, 0, 11, 12, 13, \dots, 19\}$$

zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 20$, $|A_2| = 10$ in $|A_3| = 11$. Torej je n lahko enak 3.

Množice

$$A_1 = \{1\},$$

$$A_2 = \{2, -20\},$$

$$A_3 = \{3, -19, -18\},$$

$$A_4 = \{4, -17, -16, -15\},$$

$$A_5 = \{5, -14, -13, -12, -11\},$$

$$A_6 = \{6, -10, -9, -8, -7, -6\},$$

$$A_7 = \{7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\},$$

$$A_8 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

prav tako zadoščajo pogojem naloge, saj je $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$, $|A_4| = 4$, $|A_5| = 5$, $|A_6| = 6$, $|A_7| = 7$ in $|A_8| = 13$. Torej je n lahko enako 8.

Dokažimo, da sta to najmanjši in največji možen n . Množica A ima 41 elementov. Če bi bil $n \leq 2$, bi morala vsaj ena od množic, recimo A_1 , imeti več kot 20 elementov. Toda nobeno število večje od 20 ni element množice A , zato tudi ni element množice A_1 . Množica A_1 bi torej kršila pogoj $|A_1| \in A_1$, kar je protislovje. Sledi, da je $n \geq 3$.

Denimo, da je $n \geq 9$. Ker je $|A_i| \in A_i$, je vsaka množica A_i neprazna. Ker so množice $A_1, A_2, \dots, A_n$ hkrati disjunktne, so $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ različna naravna števila. Torej je

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45,$$

kar pa je protislovje, saj ima množica A le 41 elementov. Torej je $n \leq 8$.

Primer množic A_i za $n = 3$	1 točka
Primer množic A_i za $n = 8$	1 točka
Ugotovitev, da je $ A_i \leq 20$ za vsak indeks i	1 točka
Dokaz spodnje meje $n \geq 3$	1 točka
Utemeljitev, da imajo množice različna števila elementov	1 točka
Dokaz zgornje meje $n \leq 8$	2 točki

B3.

(a) Naj bo $k = 3$. Množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ in $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ustrezata pogojem naloge, torej je n lahko enak 5. Pokažimo, da je to največji možen n . Denimo, da je $n \geq 6$ in označimo najmanjše število v množici $\mathcal{N}$ z a . Tedaj množica $\mathcal{N}$ vsebuje števila $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$. Praštevilo 2 deli natanko 3 izmed teh števil, praštevilo 3 deli natanko 2 izmed teh števil, praštevilo 5 deli 1 ali 2 izmed teh števil, vsako praštevilo $p > 5$ pa deli največ 1 izmed teh števil. Torej, če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $2 + 2 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje. Torej je $2 \in \mathcal{P}$. Če izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$ odstranimo tista, ki so deljiva z 2, nam ostanejo 3 zaporedna liha števila. Od teh je kvečjemu 1 deljivo s 3, kvečjemu 1 deljivo s 5 in kvečjemu 1 deljivo s praštevilom $p > 5$. Torej praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $3 + 1 + 1 = 5$ izmed števil $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5$, kar je protislovje.

- (b) Naj bo $n = 13$. Hitro se prepričamo, da množici $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 29, 31\}$ in $\mathcal{N} = \{24, 25, 26, \dots, 36\}$ ustrezata pogojem naloge, zato je k lahko enak 5. Dokažimo, da je to najmanjši možen k . Denimo, da je $k \leq 4$. Praštevilo 2 deli največ 7 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 3 deli največ 5 števil v $\mathcal{N}$, praštevilo 5 deli največ 3 števila v $\mathcal{N}$, praštevilo 7 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, praštevilo 11 deli največ 2 števili v $\mathcal{N}$, vsako praštevilo $p > 11$ pa deli največ 1 število v $\mathcal{N}$. Če $2 \notin \mathcal{P}$, tedaj praštevila iz $\mathcal{P}$ delijo največ $5 + 3 + 2 + 2 = 12$ števil iz $\mathcal{N}$, saj je $k \leq 4$. To je protislovje, zato mora biti $2 \in \mathcal{P}$. Preštejmo, koliko lihih števil v $\mathcal{N}$ je lahko deljivih s praštevili v $\mathcal{P}$. Množica $\mathcal{N}$ vsebuje največ 7 lihih števil, ki so avtomatično zaporedna liha števila. Največ 3 izmed njih so deljiva s 3, največ 2 sta deljivi s 5 in največ 1 je deljivo s poljubnim praštevilom $p > 5$. Ker je $2 \in \mathcal{P}$ in $k \leq 4$, množica $\mathcal{P}$ vsebuje največ 3 liha praštevila. Torej je največ $3 + 2 + 1 = 6$ lihih števil v $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. Skupaj je torej največ $7 + 6 = 13$ števil iz $\mathcal{N}$ deljivih s praštevili iz $\mathcal{P}$. To pomeni, da mora množica $\mathcal{N}$ vsebovati 7 sodih števil in 3 liha števila deljiva s 3. To pa ni mogoče, saj če $\mathcal{N}$ vsebuje 7 sodih števil, vsebuje natanko 6 zaporednih lihih števil, med temi pa sta natanko 2 deljivi s 3. Dobili smo protislovje, torej je k vsaj 5.

Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $k = 3$ in $n = 5$	1 točka
Določeno največje možno število elementov množice $\mathcal{N}$, ki so deljivi z nekim praštevilom p .	1 točka
Dokaz neenakosti $n \leq 5$	1 točka
Primer množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ za $n = 13$ in $k = 5$	1 točka
Dokaz, da je 2 element množice $\mathcal{P}$ v primeru $n = 13$	1 točka
Določeno največje možno število lihih elementov množice $\mathcal{N}$ s 13 elementi, ki so deljivi z nekim lihim praštevilom $p < 13$	1 točka
Dokaz neenakosti $k \geq 5$	1 točka