

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



**68. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije**
Odbirno tekmovanje, 21. marec 2024

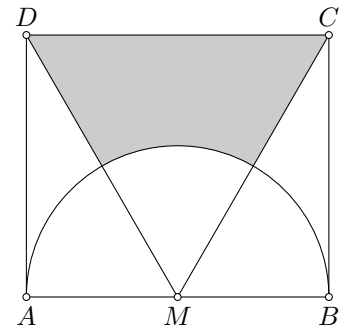
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vse pare celih števil a in b , ki zadoščajo enačbi

$$4a - 2b + 22ab^2 - 11b^3 = 2024.$$

B2. Dan je pravokotnik $ABCD$, za katerega velja $|AB| = 10$ in $|AC| = 5\sqrt{7}$. Središče stranice AB označimo z M . V pravokotnik včrtamo polkrog s premerom AB in trikotnik CDM , nato pa del pravokotnika osenčimo (glej sliko). Izračunaj obseg in ploščino osenčenega lika.





**68. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije**
Odbirno tekmovanje, 21. marec 2024

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

- B1.** Pri deljenju trimestnega števila $\overline{a2b}$ z vsoto njegovih števk dobimo količnik 53 in ostanek 3. Določi števki a in b .

B2. Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo enačbi

$$\sqrt[3]{4x + 1 + 5\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1.$$



68. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Odbirno tekmovanje, 21. marec 2024

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vsa realna števila x , ki zadoščajo enačbi

$$\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \log_{3x}(162\sqrt[3]{2}).$$

Pokaži, da nobena rešitev enačbe ni celo število.

B2. Dan je polinom $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dokaži, da polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$.



68. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Odbirno tekmovanje, 21. marec 2024

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Določi vsa realna števila x , za katera je definiran izraz $\sqrt{\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}}$.

B2. Na koliko različnih načinov lahko na polico v vrsto zložimo 2 enaki fizikalni, 4 enake kemijske in 4 enake matematične knjige, če

- (a) morajo biti vse 4 matematične knjige skupaj,
- (b) nobeni 2 matematični knjigi ne smeta biti skupaj?

Naloge za 1. letnik (rešitve)

1. Izraz na levi strani enačbe lahko razstavimo

$$4a - 2b + 22ab^2 - 11b^3 = 2(2a - b) + 11b^2(2a - b) = (2 + 11b^2)(2a - b),$$

število 2024 pa razcepimo na praštevila $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Dana enačba je torej ekvivalentna enačbi

$$(2 + 11b^2)(2a - b) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Števili $2 + 11b^2$ in $2a - b$ sta iste parnosti, zato sta obe sodi. Ker je $2 + 11b^2$ sodo število, je število b sodo, torej je število $2 + 11b^2$ deljivo z 2 a ne s 4. Hkrati je $2 + 11b^2$ pozitivno število, ki ni deljivo z 11. Torej imamo le dve možnosti, $2 + 11b^2 = 2$ ali $2 + 11b^2 = 2 \cdot 23 = 46$. V prvem primeru je $b = 0$ in $2a - b = 2^2 \cdot 11 \cdot 23 = 1012$, od koder sledi $a = 506$. V drugem primeru je $b^2 = 4$ in $2a - b = 2^2 \cdot 11 = 44$. Če je $b = 2$, je $a = 23$, v nasprotnem primeru pa je $b = -2$ in $a = 21$.

Dani enačbi torej zadoščajo pari $(a, b) = (21, -2), (23, 2), (506, 0)$.

2. način. Kot v prvi rešitvi levo stran enačbe najprej razcepimo

$$(2 + 11b^2)(2a - b) = 2024.$$

Če je b liho število, sta tudi števili $2 + 11b^2$ in $2a - b$ lihi, zato njun produkt ne more biti 2024. Torej je b sodo število. Pišimo $b = 2c$, kjer je c celo število. Ko to upoštevamo v zgornji enačbi, dobimo enačbo $(2 + 44c^2)(2a - 2c) = 2024$, ki jo okrajšamo do

$$(1 + 22c^2)(a - c) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23.$$

Če je $c = 0$, je $b = 0$ in iz enačbe sledi še $a = 506$. V nasprotnem pa je $1 + 22c^2$ liho število, večje od 1, ki ni deljivo z 11, zato imamo le eno možnost in sicer $1 + 22c^2 = 23$. Od tod sledi $c^2 = 1$, torej je $c = 1$ ali $c = -1$. V prvem primeru je $b = 2$ in iz enačbe dobimo $a = 2 \cdot 11 + 1 = 23$, v drugem primeru pa je $b = -2$ in iz enačbe dobimo $a = 2 \cdot 11 - 1 = 21$.

Dani enačbi torej zadoščajo pari $(a, b) = (506, 0), (23, 2), (21, -2)$.

3. način. Kot v prvi rešitvi levo stran enačbe najprej razcepimo

$$(2 + 11b^2)(2a - b) = 2024.$$

Od tod sledi, da je $2 + 11b^2$ pozitiven delitelj števila 2024. Ker je $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, so njegovi pozitivni delitelji 1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024. Z obravnavanjem vseh možnosti ugotovimo, da le v primerih $2 + 11b^2 = 2$ in $2 + 11b^2 = 46$ dobimo celoštevilске rešitve za b . Kot v prvi rešitvi od tod izračunamo rešitve $(a, b) = (21, -2), (23, 2), (506, 0)$.

Opomba. Tekmovalec, ki ugame rešitve in naredi preizkuse, prejme za vsako preverjeno rešitev po 1 točko (skupaj prejme največ 3 točke). Za uganjene rešitve brez preizkusa ne prejme nobene točke.

1. način

Razcep izraza na levi strani enačbe 4 točke

Razcep 2024 1 točka

Ugotovitev, da je b sodo 2 točki

Ugotovitev, da $2 + 11b^2$ ni deljivo z 11	1 točka
Ugotovitev, da je $2 + 11b^2$ deljivo z 2 in ni deljivo s 4	2 točki
Zapis prve možnosti $2 + 11b^2 = 2$	2 točki
Prva rešitev $b = 0, a = 506$	2 točki
Zapis druge možnosti $2 + 11b^2 = 46$	2 točki
Druge rešitev $b = 2, a = 23$	2 točki
Tretja rešitev $b = -2, a = 21$	2 točki

2. način

Razcep izraza na levi strani enačbe	4 točke
Razcep 2024	1 točka
Ugotovitev, da je b sodo	2 točki
Vstavitev $b = 2c$	2 točki
Zapis poenostavljene enačbe $(1 + 22c^2)(a - c) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$	2 točki
Zapis prve rešitve $c = 0, b = 0, a = 506$	2 točki
Utemeljitev, da je $1 + 22c^2$ za $c \neq 0$ liho in ni deljivo z 11, torej je lahko le 23	3 točke
Zapis druge rešitve $c = 1, b = 2, a = 23$	2 točki
Zapis tretje rešitve $c = -1, b = -2, a = 21$	2 točki

3. način

Razcep izraza na levi strani enačbe	4 točke
Razcep 2024	1 točka
Ugotovitev, da je $2 + 11b^2$ pozitiven delitelj	2 točki
Zapis vseh 16 deliteljev števila 2024	2 točki
Obravnavanje vseh 16 možnosti (dve možnosti ... 1 točka)	1+1+1+1+1+1+1+1 točka
Rešitve $(21, -2), (23, 2), (506, 0)$	1+1+1 točka

2. Po Pitagorovem izreku za trikotnik ABC sledi

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{175 - 100} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Iz podatkov naloge sledi $|MB| = \frac{1}{2}|AB| = 5$. Če uporabimo Pitagorov izrek še za trikotnik MBC , dobimo

$$|MC| = \sqrt{|MB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{25 + 75} = 10.$$

Ker je $|MB| = 5 = \frac{1}{2}|MC|$, je pravokotni trikotnik MBC polovica enakostraničnega trikotnika, zato je $\angle BMC = 60^\circ$. Ker je M razpolovišče stranice AB , je tudi $\angle DMA = 60^\circ$. Sledi $\angle CMD = 180^\circ - \angle BMC - \angle DMA = 60^\circ$.

Označimo polmer kroga z $r = 5$. Dolžina spodnje stranice osenčenega lika je enaka $\frac{1}{6}$ obsega kroga s polmerom r , torej $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{5\pi}{3}$. Obseg osenčenega lika je zato enak

$$o = |CD| + 2(|MC| - r) + \frac{5\pi}{3} = 10 + 2 \cdot 5 + \frac{5\pi}{3} = 20 + \frac{5\pi}{3}.$$

Ploščina osenčenega lika je razlika ploščine trikotnika CDM in ploščine krožnega izseka z vrhom v M , ki ga od trikotnika odreže krog s premerom AB . Ker je ta krožni izsek enak $\frac{1}{6}$ celotnega kroga, je njegova ploščina enaka $\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{25\pi}{6}$. Ploščina osenčenega lika je zato enaka

$$p = \frac{|CD| \cdot |BC|}{2} - \frac{25\pi}{6} = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} - \frac{25\pi}{6} = 25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{6}.$$

Izračun $ BC = 5\sqrt{3}$	2 točki
Izračun $ MC = 10$	2 točki

Utemeljitev $\angle BMC = 60^\circ$	4 točke
Utemeljitev $\angle CMD = 60^\circ$	1 točka
Zapis ali uporaba formule za dolžino krožnega loka, $l = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r$	1 točka
Izračun obsega $o = 20 + \frac{5\pi}{3}$	4 točke
Zapis ali uporaba formule za ploščino enakostraničnega trikotnika $S_t = \frac{10^2\sqrt{3}}{4}$	1 točka
Zapis ali uporaba formule za ploščino krožnega izseka $S_i = \frac{1}{6} \cdot \pi r^2$	1 točka
Izračun ploščine $S = 25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{6}$	4 točke
Opomba 1: Če v tretji vrstici točkovnika ni utemeljitve, da gre za polovico enakostraničnega trikotnika, torej $ MB = \frac{1}{2} MC $, tekmovalec ne prejme nobene izmed nadaljnjih točk iz točkovnika.	
Opomba 2: Če v četrti vrstici točkovnika ni utemeljitve $\angle CMD = 180^\circ - \angle BMC - \angle DMA = 60^\circ$, tekmovalec ne prejme nobene izmed nadaljnjih točk iz točkovnika.	

Naloge za 2. letnik (rešitve)

1. Iz podatkov naloge razberemo, da velja $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$. Ker je $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$, sledi

$$100a + 20 + b = 53a + 53b + 109.$$

Enačbo poenostavimo do $47a - 52b = 89$. Ker je b števka, imamo 10 možnosti. Če je $b = 0$, dobimo $a = \frac{89}{47}$, kar ni celo število. Če je $b = 1$, dobimo $a = 3$, kar nam da eno rešitev. Če je $b = 2$, dobimo $a = \frac{193}{47}$, kar spet ni celo število. Če je $b = 3$, je $a = \frac{245}{47}$. Če je $b = 4$, dobimo $a = \frac{297}{47}$. Če je $b = 5$, je $a = \frac{349}{47}$. Če je $b = 6$, sledi $a = \frac{401}{47}$. Če je $b = 7$, dobimo $a = \frac{453}{47}$. Če je $b = 8$, je $a = \frac{505}{47}$. In če je $b = 9$, dobimo $a = \frac{557}{47}$. Opazimo, da smo le v primeru $b = 1$ dobili celoštevilsko rešitev za a , torej je rešitev naloge $b = 1$ in $a = 3$.

2. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo enačbo $47a - 52b = 89$. Enačbo poenostavimo do $47a - 52b = 89$ in izrazimo

$$b = \frac{47a - 89}{52}.$$

Ker je imenovalac sod, mora biti tudi števec sod, zato je a liha števka, torej $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Preverimo vse možnosti in ugotovimo, da je le v primeru $a = 3$ število b naravno in sicer $b = 1$. Rešitev je torej $a = 3$ in $b = 1$.

3. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo $47a - 52b = 89$ in tokrat izrazimo

$$a = \frac{52b + 89}{47} = b + 2 + \frac{5(b - 1)}{47}.$$

Torej mora 47 deliti $5(b - 1)$ in zato 47 deli $b - 1$. Ker pa je b števka in zato manjša od 10, sledi $b - 1 = 0$. Torej je $b = 1$ in $a = 3$.

4. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo $47a - 52b = 89$ in enačbo preuredimo v

$$47(a - b) = 89 + 5b.$$

Torej je število $89 + 5b$ deljivo s 47. Ker je b števka, je $0 \leq 5b \leq 45$, zato je $89 \leq 89 + 5b \leq 134$. Ker pa je $47 < 89$, $2 \cdot 47 = 94$ in $3 \cdot 47 = 141 > 134$, sledi $89 + 5b = 94$ oziroma $b = 1$. Iz zgornje enačbe dobimo še $a - b = 2$, torej je $a = 3$. Preizkus pokaže, da je pri deljenju 321 s 6 res dobimo količnik 53 in ostanek 3. Torej je rešitev $a = 3$ in $b = 1$.

5. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo $47a - 52b = 89$ in enačbo tokrat preuredimo v

$$52(a - b) = 89 + 5a.$$

Ker je a števka, sledi $89 \leq 89 + 5a \leq 134$. Ker je $52 < 89$, $2 \cdot 52 = 104$ in $3 \cdot 52 = 156 > 134$, mora biti $89 + 5a = 104$ oziroma $a = 3$. Iz enačbe dobimo še $a - b = 2$ oziroma $b = 1$.

1. način. Zapis $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$ 4 točke
Zapis $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$ 2 točki
Zapis poenostavljene enačbe npr. $47a - 52b = 89$ 2 točki
Izpis vseh 10 možnosti za $b = 0, 1, \dots, 9$ in izračun števke a (ali izpis vseh 9 možnosti za a in izračun števke b) 10*1 točka

Izpis rešitve $a = 3$ in $b = 1$	2 točki
2. način. Zapis $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$	4 točke
Zapis $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$	2 točki
Zapis poenostavljene enačbe npr. $47a - 52b = 89$	2 točki
Izražena številka $b = \frac{47a-89}{52}$	1 točka
Ugotovitev, da je a liho število	4 točke
Preverba vseh možnosti za $a = 1, 3, 5, 7, 9$	5*1 točka
Izpis rešitve $a = 3$ in $b = 1$	2 točki
3. način. Zapis $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$	4 točke
Zapis $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$	2 točki
Zapis poenostavljene enačbe npr. $47a - 52b = 89$	2 točki
Izražena številka $a = \frac{52b+89}{47}$	1 točka
Preoblikovanje v $a = b + 2 + \frac{5(b-1)}{47}$	3 točke
Ugotovitev, da 47 deli $b - 1$	3 točke
Sklep $b = 1$	3 točke
Izpis rešitve $a = 3$ in $b = 1$	2 točki
4. način. Zapis $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$	4 točke
Zapis $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$	2 točki
Zapis poenostavljene enačbe npr. $47a - 52b = 89$	2 točki
Zapis $47(a - b) = 89 + 5b$	4 točke
Ugotovitev $89 + 5b = 94$	3 točke
Izračun $b = 1$	3 točke
Izpis rešitve $a = 3$ in $b = 1$	2 točki
5. način. Zapis $\overline{a2b} = 53 \cdot (a + b + 2) + 3$	4 točke
Zapis $\overline{a2b} = 100a + 20 + b$	2 točki
Zapis poenostavljene enačbe npr. $47a - 52b = 89$	2 točki
Zapis $52(a - b) = 89 + 5a$	4 točke
Ugotovitev $89 + 5a = 104$	3 točke
Izračun $a = 3$	3 točke
Izpis rešitve $a = 3$ in $b = 1$	2 točki

2. Enačbo preuredimo v

$$\sqrt[3]{4x + 1 + 5\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$$

in jo potenciramo na 3, da dobimo

$$4x + 1 + 5\sqrt{x} = 1 + 3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}.$$

Enačbo sedaj poenostavimo in preuredimo v

$$x = (2 - x)\sqrt{x}.$$

Po kvadriranju dobimo

$$x^2 = (4 - 4x + x^2)x.$$

Če je $x = 0$, je enačba očitno izpolnjena. V nasprotnem lahko enačbo pokrajšamo z x in preuredimo v

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Levo stran razstavimo

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

in razberemo rešitvi $x = 1$ in $x = 4$. Preizkus pokaže, da sta rešitvi osnovne enačbe le $x = 0$ in $x = 4$.

Opomba. Tekmovalec, ki ugame rešitev $x = 0$ ali $x = 4$ in naredi preizkus, dobi 2 točki za vsako preverjeno rešitev, skupaj največ 4 točke. Za uganjeno rešitev brez preizkusa ne prejme nobene točke.

Preureditev enačbe $\sqrt[3]{4x+1} + 5\sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$	1 točka
Potencirana leva stran enačbe $4x + 1 + 5\sqrt{x}$	1 točka
Potencirana desna stran enačbe (vsak člen 1 točko) $1 + 3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}$	1+1+1+1 točka
Preoblikovanje enačbe v $x = (2-x)\sqrt{x}$	1 točka
Kvadriranje enačbe $x^2 = (4-4x+x^2)x$	2 točki
Preoblikovanje enačbe v $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$	2 točki
Izpostavljen skupni faktor $x(x^2 - 5x + 4) = 0$	1 točka
Preverjena rešitev (brez preizkusa samo 1 točka) $x = 0$	2 točki
Razcep $(x-1)(x-4) = 0$	1 točka
Preverjeni rešitvi (brez preizkusa samo 2 točki) $x = 1$ in $x = 4$	4 točke
Zapis rešitev enačbe $x = 0$ in $x = 4$	1 točka

Naloge za 3. letnik (rešitve)

1. Najprej opazimo, da mora biti x pozitivno število, sicer logaritmi niso definirani. Sedaj lahko logaritma v enačbi poenostavimo. S prehodom na novo osnovo dobimo

$$\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \frac{\log(48\sqrt[3]{3})}{\log(2x)} = \frac{\log(2^4 \cdot 3^{\frac{4}{3}})}{\log(2x)}.$$

Z upoštevanjem lastnosti $\log(ab) = \log a + \log b$ in lastnosti $\log(a^c) = c \log a$ dobimo

$$\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \frac{\log(2^4) + \log(3^{\frac{4}{3}})}{\log 2 + \log x} = \frac{4 \log 2 + \frac{4}{3} \log 3}{\log 2 + \log x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log x}.$$

Na podoben način poenostavimo še

$$\log_{3x}(162\sqrt[3]{2}) = \frac{\log(162\sqrt[3]{2})}{\log(3x)} = \frac{\log(3^4 \cdot 2^{\frac{4}{3}})}{\log(3x)} = \frac{4 \log 3 + \frac{4}{3} \log 2}{\log 3 + \log x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \log 3 + \log 2}{\log 3 + \log x}.$$

Torej je dana enačba ekvivalentna enačbi

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \log 3 + \log 2}{\log 3 + \log x}.$$

Enačbo delimo s $\frac{4}{3}$ in pomnožimo z obema imenovalcema, da dobimo

$$(3 \log 2 + \log 3) \log 3 + (3 \log 2 + \log 3) \log x = (3 \log 3 + \log 2) \log 2 + (3 \log 3 + \log 2) \log x,$$

nato pa jo poenostavimo v

$$(2 \log 2 - 2 \log 3) \log x = (\log 2)^2 - (\log 3)^2.$$

Od tod izrazimo $\log x = \frac{(\log 2)^2 - (\log 3)^2}{2(\log 2 - \log 3)}$ in nato še $x = 10^{\frac{(\log 2)^2 - (\log 3)^2}{2(\log 2 - \log 3)}}$, kar je edina rešitev enačbe.

Ker moramo pokazati, da rešitev ni celo število, moramo eksponent poenostaviti. Števec razstavimo kot razliko kvadratov in nato upoštevamo lastnosti logaritma, da dobimo

$$\frac{(\log 2)^2 - (\log 3)^2}{2(\log 2 - \log 3)} = \frac{(\log 2 + \log 3)(\log 2 - \log 3)}{2(\log 2 - \log 3)} = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = \frac{1}{2} \log 6 = \log \sqrt{6}.$$

Torej je $x = \sqrt{6}$, kar ni celo število.

2.način. Označimo $a = \log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \log_{3x}(162\sqrt[3]{2})$, pri čemer je očitno $a \neq 0$. Tedaj je

$$(2x)^a = 48\sqrt[3]{3} = 2^4 \cdot 3^{\frac{4}{3}} \quad \text{in} \quad (3x)^a = 3^4 \cdot 2^{\frac{4}{3}}.$$

Iz prve enačbe izrazimo $2x = 2^{\frac{4}{a}} \cdot 3^{\frac{4}{3a}}$ oziroma $x = 2^{\frac{4}{a}-1} \cdot 3^{\frac{4}{3a}}$, iz druge pa $3x = 3^{\frac{4}{a}} \cdot 2^{\frac{4}{3a}}$ oziroma $x = 3^{\frac{4}{a}-1} \cdot 2^{\frac{4}{3a}}$. Od tod sledi

$$2^{\frac{4}{a}-1} \cdot 3^{\frac{4}{3a}} = 3^{\frac{4}{a}-1} \cdot 2^{\frac{4}{3a}},$$

kar lahko preuredimo do

$$2^{\frac{4}{a}-1-\frac{4}{3a}} = 3^{\frac{4}{a}-1-\frac{4}{3a}}.$$

Ker sta eksponenta enaka, osnovi pa različni, je enakost izpolnjena le, če sta eksponenta enaka 0. Torej je $\frac{4}{a} - 1 - \frac{4}{3a} = 0$. Enakost pomnožimo s $3a$ in jo preuredimo v $8 - 3a = 0$, od koder sledi $a = \frac{8}{3}$. Od tod izračunamo še $x = 2^{\frac{4}{a}-1} \cdot 3^{\frac{4}{3a}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt{6}$, kar je edina rešitev enačbe. Rešitev očitno ni celo število.

1. način

Prehod na osnovo 10 na levi strani enačbe	1 točka
Zapis imenovalca na levi strani kot vsoto logaritmov	1 točka
Zapis števca na levi strani kot linearno kombinacijo logaritmov z logaritmandoma 2 in 3	2 točki
Prehod na osnovo 10 na desni strani enačbe	1 točka
Zapis imenovalca na desni strani kot vsoto logaritmov	1 točka
Zapis števca na desni strani kot linearno kombinacijo logaritmov z logaritmandoma 2 in 3 ..	2 točki
Odpravljeni ulomki v enačbi	2 točki
Izražen $\log x = \frac{(\log 2)^2 - (\log 3)^2}{2(\log 2 - \log 3)}$	2 točki
Izražen $x = 10^{\frac{(\log 2)^2 - (\log 3)^2}{2(\log 2 - \log 3)}}$	2 točki
Razstavljena razlika kvadratov	2 točki
Izračunan $x = \sqrt{6}$	4 točke

Opomba: Če tekmovalec uporabi namesto osnove 10 katerokoli drugo osnovo, točkujemo analogno po zgornjem točkovniku.

2. način

Definicija $a = \log_{2x} 48\sqrt[3]{3}$	2 točki
Zapis $(2x)^a = 48\sqrt[3]{3}$	2 točki
Zapis $(3x)^a = 162\sqrt[3]{2}$	2 točki
Izražen $x = 2^{\frac{4}{a}-1} \cdot 3^{\frac{4}{3a}}$ iz prve enačbe	3 točke
Izražen $x = 3^{\frac{4}{a}-1} \cdot 2^{\frac{4}{3a}}$ iz druge enačbe	3 točke
Enačenje $2^{\frac{4}{a}-1} \cdot 3^{\frac{4}{3a}} = 3^{\frac{4}{a}-1} \cdot 2^{\frac{4}{3a}}$	1 točka
Poenostavitev do $2^{\frac{4}{a}-1-\frac{4}{3a}} = 3^{\frac{4}{a}-1-\frac{4}{3a}}$	1 točka
Zapis $\frac{4}{a} - 1 - \frac{4}{3a} = 0$	1 točka
Izračunan $a = \frac{8}{3}$	1 točka
Izračunan $x = \sqrt{6}$	4 točke

2. Izraz $x^5 - 1$ razcepimo kot razliko lihih potenc in dobimo

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)p(x).$$

V tej enakosti sedaj x nadomestimo z x^3 , da dobimo

$$(x^3 - 1)p(x^3) = (x^3)^5 - 1 = (x^5)^3 - 1.$$

Z uporabo razcepa $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ obe strani enakosti razcepimo

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)p(x^3) = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Če upoštevamo $x^5 - 1 = (x - 1)p(x)$, lahko enačbo delimo z $x - 1$ in dobimo

$$(x^2 + x + 1)p(x^3) = p(x)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Če pokažemo, da sta polinoma $x^2 + x + 1$ in $p(x)$ tuja, bo iz enakosti sledilo, da $p(x)$ deli $p(x^3)$. Največji skupni delitelj polinomov $x^2 + x + 1$ in $p(x)$ deli tudi polinom

$$p(x) - x^2(x^2 + x + 1) = x + 1$$

in posledično tudi polinom $(x^2 + x + 1) - x(x + 1) = 1$. Torej sta si polinoma tuja in zato polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$.

2. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo enakost

$$(x^2 + x + 1)p(x^3) = p(x)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Zadošča pokazati, da polinom $x^2 + x + 1$ deli polinom $x^{10} + x^5 + 1$, saj potem sledi, da polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$. Polinom $x^2 + x + 1$ ima dve različni kompleksni ničli, saj je njegova diskriminanta enaka -3 . Zato je dovolj pokazati, da sta obe njegovi ničli tudi ničli polinoma $x^{10} + x^5 + 1$. Naj bo z katerakoli ničla polinoma $x^2 + x + 1$. Tedaj je $z^2 + z + 1 = 0$ oziroma $z^2 = -z - 1$. Z uporabo te zveze po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} z^4 &= (z^2)^2 = (-z - 1)^2 = z^2 + 2z + 1 = (-z - 1) + 2z + 1 = z, \\ z^5 &= z \cdot z^4 = z \cdot z = z^2 \quad \text{in} \\ z^{10} &= (z^5)^2 = (z^2)^2 = z^4 = z. \end{aligned}$$

Od tod sledi $z^{10} + z^5 + 1 = z + z^2 + 1 = z + (-z - 1) + 1 = 0$, zato je z tudi ničla polinoma $x^{10} + x^5 + 1$. Torej sta obe ničli polinoma $x^2 + x + 1$ tudi ničli polinoma $x^{10} + x^5 + 1$ in s tem je dokaz zaključen.

3. način. Kot v prvi rešitvi izpeljemo enakost

$$(x^2 + x + 1)p(x^3) = p(x)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Zadošča pokazati, da polinom $x^2 + x + 1$ deli polinom $x^{10} + x^5 + 1$. Z direktnim deljenjem polinomov dobimo

$$(x^{10} + x^5 + 1) : (x^2 + x + 1) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1,$$

torej polinom $x^2 + x + 1$ deli polinom $x^{10} + x^5 + 1$ in posledično polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$.

4. način. Z direktnim deljenjem polinom $p(x^3) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ s polinomom $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dobimo

$$(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) : (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

Torej polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$.

5. način. Naj bo z katerakoli kompleksna ničla polinoma $p(x)$. Očitno je $z \neq 1$. Kot v prvi rešitvi izpeljemo $(x - 1)p(x) = x^5 - 1$. Ker je $p(z) = 0$, od tod sledi $z^5 - 1 = 0$ oziroma $z^5 = 1$. Torej je z od 1 različen peti koren enote. Ker so vsi peti koreni enote različni, ima polinom $p(x)$ štiri različne ničle. Torej je dovolj pokazati, da je vsaka ničla polinoma $p(x)$ tudi ničla polinoma $p(x^3)$, saj bo tedaj sledilo, da polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^3)$.

Če je z ničla polinoma $p(x)$, je po zgornjem $z^5 = 1$ in $z \neq 1$. Sledi $(z^3)^5 = (z^5)^3 = 1^3 = 1$, torej je tudi z^3 peti koren enote. Vsi peti koreni enote razen 1 so ničle polinoma $p(x)$. Torej zadošča pokazati, da je $z^3 \neq 1$, saj bo potem sledilo $p(z^3) = 0$ in z bo ničla polinoma $p(x^3)$.

Denimo, da je $z^3 = 1$. Zaradi $z^5 = 1$ tedaj sledi $z^2 = z^5 : z^3 = 1$ in posledično $z = z^3 : z^2 = 1$, kar pa je protislovje. Torej je $z^3 \neq 1$, s čimer je dokaz zaključen.

1. način

Zapis $x^5 - 1 = (x - 1)p(x)$ ali $(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	2 točki
Zapis $x^{15} - 1 = (x^3 - 1)p(x^3)$ ali $x^{15} - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)$	2 točki
Razcep $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	1 točka
Razcep $x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1)$	2 točki
Zapis enakosti $(x^2 + x + 1)p(x^3) = p(x)(x^{10} + x^5 + 1)$	2 točki
Zapis sklepa: Če sta $x^2 + x + 1$ in $p(x)$ tuja, sledi $p(x)$ deli $p(x^3)$	3 točke
Zapis $p(x) - x(x^2 + x + 1) = x + 1$	4 točke
Zapis $(x^2 + x + 1) - x(x + 1) = 1$	4 točke

2. način

Zapis $x^5 - 1 = (x - 1)p(x)$ ali $(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	2 točki
Zapis $x^{15} - 1 = (x^3 - 1)p(x^3)$ ali $x^{15} - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)$	2 točki
Razcep $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	1 točka
Razcep $x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1)$	2 točki
Zapis enakosti $(x^2 + x + 1)p(x^3) = p(x)(x^{10} + x^5 + 1)$	2 točki
Zapis sklepa: ničli polinoma $x^2 + x + 1$ morata biti ničli polinoma $x^{10} + x^5 + 1$	3 točke
Izračun $z^5 = z^2$	3 točke
Izračun $z^{10} = z$	3 točke
Izračun $z^{10} + z^5 + 1 = 0$	2 točki

3. način

Zapis $p(x^3) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$	2 točki
Zapis $p(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$	2 točki
Razcep $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	1 točka
Razcep $x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1)$	2 točki
Zapis $\frac{p(x^3)}{p(x)} = \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1}$	2 točki
Zapis $(x^{10} + x^5 + 1) : (x^2 + x + 1)$	2 točki
Vsaki dve pravilni vrstici deljenja po 1 točka (7*2 vrstici)	7*1 točka
Količnik $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ in ostanek 0	2 točki

4. način

Zapis $p(x^3) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$	2 točki
Zapis $(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) : (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	2 točki
Vsaka pravilna vrstica deljenja (14 vrstic) po 1 točka	14*1 točka
Količnik $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ in ostanek 0	2 točki

5. način

Zapis $x^5 - 1 = (x - 1)p(x)$ ali $(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	2 točki
Ugotovitev, da za poljubno ničlo z polinoma p velja $z^5 = 1$	2 točki
Ničle polinoma $p(x)$ so vsi peti koreni enote razen 1	2 točki
Zapis sklepa: če je vsaka ničla $p(x)$ ničla $p(x^3)$, sledi $p(x)$ deli $p(x^3)$	3 točke
Zapis $(z^3)^5 = (z^5)^3 = 1^3 = 1$ za poljubno ničlo z polinoma p	4 točke
Ugotovitev, da je tudi z^3 peti koren enote	3 točke
Dokaz, da je $z^3 \neq 1$	4 točke

Naloge za 4. letnik (rešitve)

1. Izraz je definiran za tista realna števila x , za katera velja

$$x \neq 3, \quad x \neq -3, \quad \frac{x+2}{x-3} \geq 0, \quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0, \quad \text{in} \quad \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}.$$

Neenačba $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$ je izpolnjena, če je $x+2 \geq 0$ in $x-3 > 0$ ali $x+2 \leq 0$ in $x-3 < 0$. V prvem primeru je $x > 3$, v drugem pa $x \leq -2$, torej je $x \in (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$. Neenačba $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$ je izpolnjena, če je $x-2 \geq 0$ in $x+3 > 0$ ali $x-2 \leq 0$ in $x+3 < 0$. V prvem primeru je $x \geq 2$, v drugem pa $x < -3$, torej je $x \in (-\infty, -3) \cup [2, \infty)$. Če upoštevamo oba pogoja, dobimo $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Neenačbo

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$$

kvadriramo in preoblikujemo v

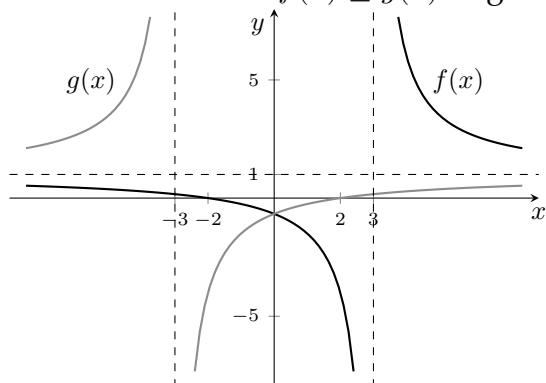
$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+3} \geq 0.$$

Ulomka postavimo na skupni imenovalac, da dobimo

$$\frac{10x}{(x-3)(x+3)} \geq 0.$$

Ker je $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, je $(x-3)(x+3) > 0$, zato sledi $x \geq 0$. Končna rešitev je torej $x \in (3, \infty)$.

2. način. Pomagamo si z izrisom grafov racionalnih funkcij f in g s predpisoma $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ in $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Funkcija f ima ničlo pri $x = -2$, pol pri $x = 3$ in vodoravno asimptoto $y = 1$, funkcija g pa ima ničlo pri $x = 2$, pol pri $x = -3$ in vodoravno asimptoto $y = 1$. Izraz v nalogi je definiran za tiste x , za katere je $f(x) \geq 0$ in $g(x) \geq 0$, hkrati pa mora veljati $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ oziroma ekvivalentno $f(x) \geq g(x)$. Z grafa razberemo, da so to $x \in (3, \infty)$.



1. način.

Zapis pogojev $x \neq 3, \quad x \neq -3$ 1 točka

Zapis pogojev $\frac{x+2}{x-3} \geq 0, \quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0$ 1 točka

Zapis pogoja $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ 1 točka

Obravnava neenačbe $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$ (v celoti pravilen zapis pogojev ali v celoti pravilna grafična

predstavitev)	2 točki
Ugotovitev $x \in (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$	2 točki
Obravnava neenačbe $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$ (v celoti pravilen zapis pogojev ali v celoti pravilna grafična predstavitev)	2 točki
Ugotovitev $x \in (-\infty, -3) \cup [2, \infty)$	2 točki
Zapis skupne rešitve $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$	1 točka
Kvadriranje in preoblikovanje neenačbe $\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+3} \geq 0$	1+1 točka
Preureditev v $\frac{10x}{(x-3)(x+3)} \geq 0$	2 točki
Utemeljen sklep $x \geq 0$	3 točke
Končna rešitev je torej $x \in (3, \infty)$	1 točka

2. način.

Nariše graf funkcije f (ničla 1 točka, pol 1 točka, asimptota 1 točka, vsaka narisana veja 1 točka) 5 točk

Nariše graf funkcije g (ničla 1 točka, pol 1 točka, asimptota 1 točka, vsaka narisana veja 1 točka) 5 točk

Zapis pogoja, da je $f(x) \geq 0$ in $g(x) \geq 0$ 2 točke |

Sklep, da mora biti $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ 2 točke |

Ugotovitev $f(x) \geq g(x)$ 1 točka |

Zapis rešitve $x \in (3, \infty)$ 5 točk |

2. 1. način.

(a) Mislimo si, da je na polici 10 prostih mest za knjige. Najprej postavimo 4 matematične knjige skupaj na 4 zaporedna mesta. Levo od teh knjig je lahko med 0 in 6 prostih mest, torej lahko to storimo na 7 načinov. Na preostalih 6 prostih mest lahko postavimo 2 fizikalni knjigi na $\binom{6}{2} = 15$ načinov. Za postavitev kemijskih knjig nimamo več izbire. Skupaj imamo torej $7 \cdot 15 = 105$ različnih razporeditev.

(b) Najprej preštejmo, na koliko načinov lahko postavimo 4 matematične knjige. Razmišljajmo takole. Na polico najprej skupaj postavimo vse 4 matematične knjige, nato pa med njih razporedimo še 6 prostih mest za ostale knjige. Med vsaki 2 zaporedni matematični knjigi moramo postaviti po 1 prosto mesto, zato da nobeni 2 matematični knjigi ne bosta skupaj. Za preostala 3 prosta mesta imamo 5 možnih pozicij: levo od vseh matematičnih knjig (1 pozicija), med dve zaporedni matematični knjigi (3 pozicije) ali desno od vseh matematičnih knjig (1 pozicija). Torej na 5 pozicij postavljamo 3 prosta mesta, pri čemer lahko na isto pozicijo postavimo več prostih mest (to le pomeni, da bo več prostih mest skupaj). Imamo več možnosti. Če vsa 3 prosta mesta postavimo na isto pozicijo, imamo 5 možnosti. Če 2 prosti mesti postavimo na isto pozicijo, tretje pa na neko drugo, imamo $5 \cdot 4 = 20$ možnosti. Če pa vsa 3 prosta mesta postavimo na različne pozicije, imamo $\binom{5}{3} = 10$ možnosti. Skupaj je torej $5 + 20 + 10 = 35$ možnosti. S tem so vse 4 matematične knjige postavljene, med njimi pa je še 6 prostih mest. Podobno kot v točki (a) preostalih 6 knjig lahko razporedimo na 15 različnih načinov. Skupaj imamo torej $35 \cdot 15 = 525$ različnih razporeditev. **2. način.**

(a) Ker morajo biti vse 4 matematične knjige skupaj, si jih lahko mislimo kot en blok, vsaka kemijska in vsaka fizikalna knjiga pa je svoj blok. Tedaj moramo v vrsto razporediti 7 blokov, 1 matematičnega, 2 fizikalna in 4 kemijske. Ker gre za permutacije s ponavljanjem, je možnih razporeditev $\frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 4!} = 105$.

(b) Obravnavajmo dva možnosti. Denimo najprej, da skrajna desna knjiga ni matematična. Tedaj lahko vsaki matematični knjigi pridružimo prosto mesto na desni strani in ta par obravnavamo kot en blok. Na tem prostem mestu ne sme stati druga matematična knjiga. Torej imamo 4 bloke (s po 2 mesti) in dodatno še 2 prosti mesti, ki jih moramo razporediti v vrsto. Ker gre za permutacije s ponavljanjem, lahko to naredimo na $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ različnih načinov. S tem

smo razporedili matematične knjige in med njih še 6 prostih mest. Na teh 6 prostih mest lahko razporedimo 2 fizikalni in 4 kemijske knjige na $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ različnih načinov, saj gre zopet za permutacije s ponavljanjem. Vseh razporeditev, pri katerih skrajna desna knjiga ni matematična, je torej $15 \cdot 15 = 225$. Preštejmo še razporeditve, pri katerih je skrajna desna knjiga matematična. V tem primeru lahko to knjigo odmislimo in sklepamo podobno kot prej, saj izmed preostalih 9 knjig najbolj desna ne sme biti matematična. Preostalim 3 matematičnim knjigam pridružimo prosto mesto na desni strani, da dobimo 3 bloke, dodatno pa imamo še 3 prosta mesta. Te 3 bloke in 3 prosta mesta lahko razporedimo v vrsto na $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ različnih načinov, nato pa na desni dodamo še zadnjo matematično knjigo. Na preostalih 6 prostih mest lahko razporedimo 2 fizikalni in 4 kemijske knjige na $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ različnih načinov. Vseh razporeditev, pri katerih je skrajna desna knjiga matematična, je torej $20 \cdot 15 = 300$. Vseh pravih razporeditev knjig pa je skupaj $225 + 300 = 525$.

1. način.

- (a) Ugotovitev, da lahko matematične knjige v vrsto postavimo na 7 načinov 2 točki
 Izračun postavitve preostalih knjig $\binom{6}{2} = 15$ načinov (podobno: $\binom{6}{4} = 15$) 2 točki
 Izračun vseh možnih postavitvev $7 \cdot 15 = 105$ 1 točka
 (b) Uporabi tehniko reševanja, zapisano v rešitvah ali tehniko sistematične razporeditve knjig 2 točki
 Ugotovitev, da je število možnosti za postavitev matematičnih knjig 35 8 točk
 (Opomba. Zgornjih 8 točk dobi tudi v primeru, ko si sistematično zapiše vseh 35 možnosti za postavitev matematičnih knjig oz. za vsake 5 zapisanih razporeditev dobi 1 točko ter dodatno točko za zapis števila vseh razporeditev.)
 Preostale knjige lahko razporedimo na 15 načinov 2 točki
 Skupaj je 525 razporeditev 3 točke

2. način.

- (a) $\frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 4!}$ 4 točke
 Izračun števila vseh možnosti 105 1 točka
 (b) Uporabi tehniko reševanja, zapisano v rešitvah 2 točki
 Obravnava prve možnosti $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ 1+1 točka
 Obravnava prve možnosti $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ 1+1 točka
 Izračun 225 razporeditev 1 točka
 Obravnava druge možnosti $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ 1+1 točka
 Obravnava druge možnosti $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ 1+1 točka
 Izračun 300 razporeditev 1 točka
 Skupaj je 525 razporeditev 3 točke