

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poišči vse pare realnih števil x in y , ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned}\frac{x}{6} + \frac{4}{y} &= 2, \\ \frac{18}{x} + \frac{y}{2} &= 5.\end{aligned}$$

B2. Poišči vsa trimestna števila $\overline{abc}$, deljiva z 9, za katera velja

$$\overline{abc} = a^6 + b^2 + c^3.$$

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Naj bosta a in b različni pozitivni realni števili. Označimo

$$A = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a - b} - \frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \quad \text{in} \quad B = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Pokaži, da sta A in B obratni si števili.

B2. Dan je trikotnik ABC . Točke P , R in S ležijo zaporedoma na stranicah AB , BC in CA , tako da velja $|AP| : |PB| = |BR| : |RC| = |CS| : |SA| = 3 : 1$. Dokaži, da težišči trikotnikov ABC in PRS sovpadata.

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Naj bo a realno število. Označimo rešitvi enačbe $x^2 + 2\sqrt{3}ax - x = -3a^2 + 4a$ z x_1 in x_2 .

- (a) Določi vrednost realnega števila a , tako da bo $x_1 = x_2$. Rezultat izrazi z racionaliziranim ulomkom.
- (b) Določi vrednost realnega števila a , pri katerem bo produkt x_1x_2 najmanjši možen.

B2. Dan je pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri A in hipotenuzo dolžine $|BC| = 1$. Točki T_1 in T_2 razdelita hipotenuzo BC na tri enake dele, pri čemer T_1 leži med B in T_2 .

(a) Dokaži, da je $|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{5}{9}$.

(b) Izračunaj $|AT_1|$, če je AT_1T_2 pravokotni trikotnik s pravim kotom pri T_1 .



**69. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije**
Odbirno tekmovanje, 20. marec 2025

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Naj bo a_n zaporedje, za katerega velja $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ in $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ za vsako naravno število n .

(a) Izračunaj a_7 .

(b) Dokaži, da je zaporedje a_n aritmetično.

(c) Izračunaj $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025}$ in rezultat zapiši z naravnim številom.

B2. Hkrati vržemo n poštenih igralnih kock, kjer je n neko naravno število.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da padeta natanko 2 šestici, če je $n = 5$? Verjetnost izrazi z okrajšanim ulomkom.
- (b) Koliko naj bo n , da bo verjetnost, da pade natanko 1 šestica, največja možna?

Naloge za 1. letnik (rešitve)

1. V obeh enačbah odpravimo ulomke in dobimo ekvivalenten sistem enačb

$$xy + 24 = 12y,$$

$$xy + 36 = 10x.$$

Od druge enačbe odštejemo prvo, da dobimo $12 = 10x - 12y$. Od tod izrazimo $x = \frac{12+12y}{10} = \frac{6}{5}y + \frac{6}{5}$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo $\frac{6}{5}y^2 + \frac{6}{5}y + 24 = 12y$. Enačbo pomnožimo s $\frac{5}{6}$, da dobimo $y^2 + y + 20 = 10y$, in jo preuredimo v $y^2 - 9y + 20 = 0$. Izraz na levi strani enačbe razcepimo $(y - 4)(y - 5) = 0$ in razberemo rešitvi $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$. Iz enačbe za x izračunamo še $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$.

Sistem enačb torej rešita para $x_1 = 6, y_1 = 4$ in $x_2 = \frac{36}{5}, y_2 = 5$.

2. način. V obeh enačbah odpravimo ulomke in dobimo ekvivalenten sistem enačb

$$xy + 24 = 12y,$$

$$xy + 36 = 10x.$$

Od druge enačbe odštejemo prvo, da dobimo $12 = 10x - 12y$. Od tod izrazimo $y = \frac{10x-12}{12} = \frac{5}{6}x - 1$. Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo $\frac{5}{6}x^2 - x + 36 = 10x$. Enačbo pomnožimo s 6, da dobimo $5x^2 - 6x + 216 = 60x$, in jo preuredimo v $5x^2 - 66x + 216 = 0$. Izraz na levi strani enačbe razcepimo $(5x - 36)(x - 6) = 0$ in razberemo rešitvi $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$. Iz enačbe za y izračunamo še $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$.

Sistem enačb torej rešita para $x_1 = 6, y_1 = 4$ in $x_2 = \frac{36}{5}, y_2 = 5$.

3. način. Iz prve enačbe izrazimo $x = 12 - \frac{24}{y} = \frac{12y-24}{y}$ in to vstavimo v drugo enačbo, da dobimo

$$\frac{18y}{12y-24} + \frac{y}{2} = 5.$$

Enačbo pomnožimo z $12y - 24$ in dobimo

$$18y + y(6y - 12) = 5(12y - 24)$$

oziroma

$$6y^2 + 6y = 60y - 120.$$

Enačbo delimo s 6 in jo preuredimo do $y^2 - 9y + 20 = 0$. Od tu dalje postopamo kot v prvi rešitvi.

4. način. Iz druge enačbe izrazimo $y = 10 - \frac{36}{x} = \frac{10x-36}{x}$ in to vstavimo v prvo enačbo, da dobimo

$$\frac{x}{6} + \frac{4x}{10x-36} = 2.$$

Enačbo pomnožimo s $6(10x - 36)$ in dobimo

$$x(10x - 36) + 24x = 12(10x - 36)$$

oziroma

$$10x^2 - 12x = 120x - 432.$$

Enačbo delimo z 2 in jo preuredimo do $5x^2 - 66x + 216 = 0$. Od tu dalje postopamo kot v drugi rešitvi.

Odprava ulomkov v obeh enačbah	2 točki
Zapis enačbe $12 = 10x - 12y$	2 točki
Izražena neznanka x	1 točka
Zamenjava neznanke x v prvi enačbi	2 točki
Preureditev enačbe v $y^2 - 9y + 20 = 0$	3 točke
Razcep $(y - 4)(y - 5) = 0$ in rešitvi $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$	4+2 točki
Izračun $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$	2+2 točki

2. način. Odprava ulomkov v obeh enačbah	2 točki
Zapis enačbe $12 = 10x - 12y$	2 točki
Izražena neznanka y	1 točka
Zamenjava neznanke y v drugi enačbi	2 točki
Preureditev enačbe v $5x^2 - 66x + 216 = 0$	3 točke
Razcep $(5x - 36)(x - 6) = 0$ in rešitvi $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$	4+2 točki
Izračun $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$	2+2 točki

3. način. Iz prve enačbe izražena neznanka x	2 točki
Zamenjava neznanke x v drugi enačbi	2 točki
Odprava ulomkov, preoblikovanje do $18y + y(6y - 12) = 5(12y - 24)$	3 točke
Preureditev enačbe v $y^2 - 9y + 20 = 0$	3 točke
Razcep $(y - 4)(y - 5) = 0$ in rešitvi $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$	4+2 točki
Izračun $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$	2+2 točki

4. način. Iz prve enačbe izražena neznanka y	2 točki
Zamenjava neznanke y v prvi enačbi	2 točki
Odprava ulomkov, preoblikovanje do $x(10x - 36) + 24x = 12(10x - 36)$	3 točke
Preureditev enačbe v $5x^2 - 66x + 216 = 0$	3 točke
Razcep $(5x - 36)(x - 6) = 0$ in rešitvi $x_1 = 6$ in $x_2 = \frac{36}{5}$	4+2 točki
Izračun $y_1 = 4$ in $y_2 = 5$	2+2 točki

2. Ker je število $\overline{abc}$ deljivo z 9, je vsota $a + b + c$ deljiva z 9. Enačbo lahko preoblikujemo v $\overline{ab0} = a^6 + b^2 + c^3 - c$. Ker sta c in c^3 enake parnosti, je $c^3 - c$ sodo število. Ker je $\overline{ab0}$ prav tako sodo število, mora biti tudi $a^6 + b^2$ sodo število. Torej sta a in b enake parnosti.

Če je $a \geq 3$, potem je $a^6 \geq 3^6 = 729$. Sledi $\overline{abc} \geq 729$ in zato je $a \geq 7$. Toda potem je $a^6 \geq 7^6 \geq 1000 > \overline{abc}$, kar je protislovje. Torej je $a = 1$ ali $a = 2$.

Denimo, da je $a = 1$. Tedaj je tudi b liha številka.

- Če je $b = 1$, mora biti $c = 7$, da bo $a + b + c$ deljivo z 9. Toda to ni rešitev, saj je $c^3 = 343 > 200 > \overline{abc}$.
- Če je $b = 3$, mora biti $c = 5$, da bo $a + b + c$ deljivo z 9. To je rešitev, saj je $a^6 + b^2 + c^3 = 1 + 9 + 125 = 135$.
- Če je $b = 5$, na enak način sklepamo, da je $c = 3$, kar pa ni rešitev saj je $a^6 + b^2 + c^3 = 1 + 25 + 27 < 100 \leq \overline{abc}$.
- Če je $b = 7$, sledi $c = 1$, kar ni rešitev, saj je $a^6 + b^2 + c^3 = 1 + 49 + 1 < 100 \leq \overline{abc}$.
- Če je pa $b = 9$, dobimo $c = 8$, kar zopet ni rešitev, saj je $c^3 = 512 > 200 > \overline{abc}$.

Denimo, da je $a = 2$. Tedaj je tudi b soda številka. Sklepamo podobno kot prej.

- Če je $b = 0$, mora biti $c = 7$, kar nam da protislovje $c^3 = 343 > 300 > \overline{abc}$.

- Če je $b = 2$, sledi $c = 5$, kar ni rešitev, saj je $a^6 + b^2 + c^3 = 64 + 4 + 125 = 193 < 200 \leq \overline{abc}$.
- Če je $b = 4$, je $c = 3$, kar zopet ni rešitev, saj je $a^6 + b^2 + c^3 = 64 + 16 + 27 = 107 < 200 \leq \overline{abc}$.
- Če je $b = 6$, sledi $c = 1$, kar vodi v protislovje $a^6 + b^2 + c^3 = 64 + 36 + 1 = 101 < 200 \leq \overline{abc}$.
- Če pa je $b = 8$, je $c = 8$, kar zopet vodi v protislovje $c^3 = 512 > 300 > \overline{abc}$.

Edina rešitev naloge je torej število 135 oziroma $a = 1, b = 3$ in $c = 5$.

2. način. Izraz a^6 lahko zavzame vrednosti 0, 1, 64, 729, 4096.... Številka a ne more biti enaka 0, saj tedaj število $\overline{abc}$ ni trimestno. Številka a ne more biti enaka 3, saj je tedaj vsota $a^6 + b^2 + c^3$ večja ali enaka 729 in ne more biti oblike $\overline{3bc}$. Številka a tudi ne more biti večja od 3, saj je tedaj vsota $a^6 + b^2 + c^3$ večja ali enaka 4096 in zato ni trimestno število. Preostaneta dve možnosti, $a = 1$ ali $a = 2$. Pri vsaki izmed njiju sistematično preverimo vse možne vrednosti številke c . Ko je številka c izbrana, številko b določimo iz pogoja, da je število $\overline{abc}$ deljivo z 9, kar pomeni, da je vsota $a + b + c$ deljiva z 9. Nato izračunamo levo in desno stran enakosti, $L = \overline{abc}$ in $D = a^6 + b^2 + c^3$, ter preverimo, ali sta enaki.

Naj bo $a = 1$.

- Če je $c = 0$, je $b = 8$, $L = 180$ in $D = 1^6 + 8^2 + 0^3 = 65$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 1$, je $b = 7$, $L = 171$ in $D = 1^6 + 7^2 + 1^3 = 51$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 2$, je $b = 6$, $L = 162$ in $D = 1^6 + 6^2 + 2^3 = 45$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 3$, je $b = 5$, $L = 153$ in $D = 1^6 + 5^2 + 3^3 = 53$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 4$, je $b = 4$, $L = 144$ in $D = 1^6 + 4^2 + 4^3 = 81$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 5$, je $b = 3$, $L = 135$ in $D = 1^6 + 3^2 + 5^3 = 135$. V tem primeru je $L = D$, kar nam da rešitev $\overline{abc} = 135$.
- Če je $c \geq 6$, je $D \geq 216$ in zato ne more biti oblike $\overline{1bc}$.

Naj bo $a = 2$.

- Če je $c = 0$, je $b = 7$, $L = 270$ in $D = 2^6 + 7^2 + 0^3 = 113$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 1$, je $b = 6$, $L = 261$ in $D = 2^6 + 6^2 + 1^3 = 101$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 2$, je $b = 5$, $L = 252$ in $D = 2^6 + 5^2 + 2^3 = 97$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 3$, je $b = 4$, $L = 243$ in $D = 2^6 + 4^2 + 3^3 = 107$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 4$, je $b = 3$, $L = 234$ in $D = 2^6 + 3^2 + 4^3 = 137$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 5$, je $b = 2$, $L = 225$ in $D = 2^6 + 2^2 + 5^3 = 193$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c = 6$, je $b = 1$, $L = 216$ in $D = 2^6 + 1^2 + 6^3 = 281$. V tem primeru je $L \neq D$.
- Če je $c \geq 7$, je $D \geq 343$ in zato ne more biti oblike $\overline{2bc}$.

Edina rešitev naloge je torej število 135 oziroma $a = 1, b = 3$ in $c = 5$.

Zapis $a + b + c$ je deljivo z 9	1 točka
Preoblikovanje enačbe v $\overline{ab0} = a^6 + b^2 + c^3 - c$	2 točki
Sklep, da je $c^3 - c$ sodo število	1 točka
Ugotovitev, da sta a in b enake parnosti	2 točki
Utemeljena ugotovitev, da a ne more biti večji od tri	3 točke
Sistematično preveri vse možnosti za $a = 1$	1+1+1+1 točka
Sistematično preveri vse možnosti za $a = 2$	1+1+1+1 točka
Zapis rešitev je število 135 oziroma $a = 1, b = 3$ in $c = 5$	1 točka
Opomba. V primeru, da tekmovalec najprej utemelji, da je $a = 1$ ali $a = 2$ in nato sistematično preveri vse možnosti za b in c , prav tako dobi vse točke.	

2. način.

Utemeljitev, da a ne more biti 3 ali več	4 točke
Vsaka preverjena možnost po 1 točko	15 točk
Zapisan odgovor	1 točka

Naloge za 2. letnik (rešitve)

1. Ulomka v izrazu za B postavimo na skupni imenovalec in dobimo

$$B = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}.$$

V izrazu za A najprej potence zapišemo s koreni

$$A = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Drugi ulomek razširimo s $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, da dobimo

$$A = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

Ulomka postavimo na skupni imenovalec in števec poenostavimo

$$\begin{aligned} A &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - (a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \\ &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} \\ &= \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b}. \end{aligned}$$

V števcu izpostavimo $\sqrt{ab}$ imenovalec pa zopet razcepimo kot razliko kvadratov

$$A = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}.$$

Ker je $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, lahko ulomek okrajšamo in dobimo

$$A = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{B}.$$

Torej sta A in B obratni si števili.

2. način. Na enak način kot v prvi rešitvi izrazimo

$$B = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}.$$

V izrazu za A potence zapišemo s koreni nekoliko drugače

$$A = \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{a - b} - \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Sedaj izraz $(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3$ razcepimo kot vsoto kubov, izraz $a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$ pa kot razliko kvadratov, da dobimo

$$A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Ker je $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, lahko ulomka okrajšamo in izraz poenostavimo

$$\begin{aligned} A &= \frac{a - \sqrt{a}\sqrt{b} + b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\ &= \frac{a - \sqrt{a}\sqrt{b} + b - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{a - \sqrt{a}\sqrt{b} + b - a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Od tod sledi $AB = 1$, torej sta A in B obratni si števili.

Zapis $B = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 3 točke

Zapis s koreni $A = \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, razširitev na enaka imenovalca $A = \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
3+3 točke

Izračun $A = \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$, razcep števca $A = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ in izračun $A = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 3+3+3 točke

Ugotovitev $A = \frac{1}{B}$ 2 točki

2. način.

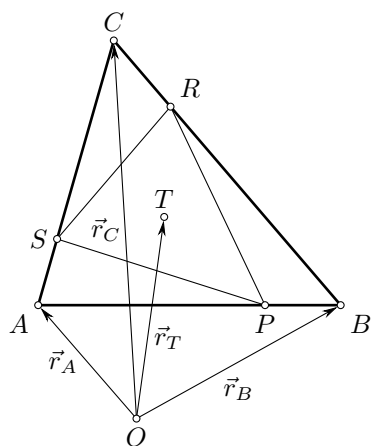
Zapis $B = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 3 točke

Zapis $A = \frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{a-b} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 4 točke

Razcep števca in razcep imenovalca $A = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})((\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.. 4+4 točke

Izračun $A = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 3 točke

Ugotovitev $A = \frac{1}{B}$ 2 točki



2.

Označimo s T težišče trikotnika ABC in s T' težišče trikotnika PRS . Z uporabo krajevnih vektorjev izrazimo

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Za krajevni vektor točke P velja

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{AB}.$$

Z uporabo zveze $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ dobimo

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{3}{4}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B.$$

Na podoben način izrazimo še

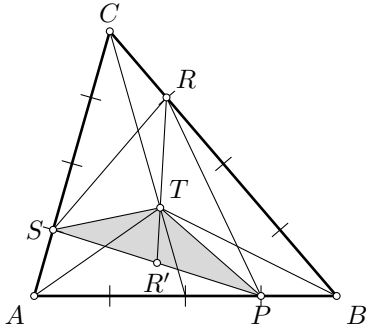
$$\begin{aligned}\vec{r}_R &= \vec{r}_B + \frac{3}{4}\vec{BC} = \vec{r}_B + \frac{3}{4}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \frac{1}{4}\vec{r}_B + \frac{3}{4}\vec{r}_C, \\ \vec{r}_S &= \vec{r}_C + \frac{3}{4}\vec{CA} = \vec{r}_C + \frac{3}{4}(\vec{r}_A - \vec{r}_C) = \frac{1}{4}\vec{r}_C + \frac{3}{4}\vec{r}_A.\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\vec{r}_{T'} = \frac{1}{3}(\vec{r}_P + \vec{r}_R + \vec{r}_S) = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Torej je $\vec{r}_T = \vec{r}_{T'}$ oziroma $T = T'$.

2. način.



Označimo s T težišče trikotnika ABC . Ker težišče razdeli težiščnico v razmerju 1 : 2, sta višini trikotnikov ABT in ABC na stranico AB v razmerju 1 : 3, zato sta tudi njuni ploščini v razmerju $p_{ABT} : p_{ABC} = 1 : 3$. Ker je $|AP| : |PB| = 1 : 3$, je $|AP| : |AB| = 3 : 4$, zato je tudi $p_{APT} : p_{ABT} = 3 : 4$, saj imata trikotnika APT in ABT skupno višino skozi oglišče T . Od tod sledi

$$p_{APT} = \frac{3}{4}p_{ABT} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}p_{ABC} = \frac{1}{4}p_{ABC}.$$

Na podoben način sklepamo, da je

$$p_{ATS} = \frac{1}{4}p_{ATC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}p_{ABC} = \frac{1}{12}p_{ABC}$$

in

$$p_{APS} = \frac{3}{4}p_{ABS} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}p_{ABC} = \frac{3}{16}p_{ABC}.$$

Torej je

$$p_{SPT} = p_{APT} + p_{ATS} - p_{APS} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{3}{16}\right)p_{ABC} = \frac{7}{48}p_{ABC}.$$

Zaradi simetrije na enak način sledi še $p_{PRT} = p_{RST} = \frac{7}{48}p_{ABC}$. Označimo z R' presečišče premic RT in SP . Ker imata trikotnika PRT in RST skupno stranico RT in enaki ploščini, imata tudi enaki višini na stranico RT . Ti dve višini sta hkrati tudi višini trikotnikov PRR' in RSR' na skupno stranico RR' . Torej sta ploščini teh dveh trikotnikov enaki. Ker pa imata trikotnika tudi skupno višino skozi oglišče R , sta njuni stranici PR' in SR' enako dolgi. Torej je R' razpolovišče daljice PS in zato je premica RT težiščnica trikotnika PRS . Na enak način sklepamo, da sta tudi premici ST in PT težiščnici trikotnika PRS , torej je T težišče tega trikotnika.

3. način. Uporabimo koordinatni sistem in točke zapišimo s koordinatami. Označimo $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ in $C(c_1, c_2)$. Tedaj ima težišče T trikotnika ABC koordinate

$$T\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Razpolovišče K daljice AB ima koordinate $K\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$, točka P pa je razpolovišče daljice KB , zato ima koordinate

$$P\left(\frac{\frac{a_1+b_1}{2} + b_1}{2}, \frac{\frac{a_2+b_2}{2} + b_2}{2}\right) = P\left(\frac{a_1 + 3b_1}{4}, \frac{a_2 + 3b_2}{4}\right).$$

Podobno sklepamo, da ima razpolovišče L daljice BC koordinate $L\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$ in točka R koordinate

$$R\left(\frac{b_1+3c_1}{4}, \frac{b_2+3c_2}{4}\right),$$

ter da ima razpolovišče M daljice CA koordinate $M\left(\frac{c_1+a_1}{2}, \frac{c_2+a_2}{2}\right)$ in točka S koordinate

$$S\left(\frac{c_1+3a_1}{4}, \frac{c_2+3a_2}{4}\right).$$

Težišča T' trikotnika PRS ima torej koordinate

$$T'\left(\frac{\frac{a_1+3b_1}{4} + \frac{b_1+3c_1}{4} + \frac{c_1+3a_1}{4}}{3}, \frac{\frac{a_2+3b_2}{4} + \frac{b_2+3c_2}{4} + \frac{c_2+3a_2}{4}}{3}\right) = T'\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

Od tod sledi $T = T'$.

Uporaba vektorjev in zapis $\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$ 1+2 točki
 Zapis $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{AB}$ in izračun $\vec{r}_P = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B$ 1+3 točke
 Zapis $\vec{r}_R = \vec{r}_B + \frac{3}{4}\vec{BC}$ in izračun $\vec{r}_R = \frac{1}{4}\vec{r}_B + \frac{3}{4}\vec{r}_C$ 1+3 točke
 Zapis $\vec{r}_S = \vec{r}_C + \frac{3}{4}\vec{CA}$ in izračun $\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$ 1+3 točke
 Zapis $\vec{r}_{T'} = \frac{1}{3}(\vec{r}_P + \vec{r}_R + \vec{r}_S)$ in izračun $\vec{r}_{T'} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$ 1+4 točke

2. način.

Upoštevanje, da težišče razdeli težiščnico v razmerju 1 : 2 in $p_{ABT} : p_{ABC} = 1 : 3$ 1+2 točki
 Izračun $p_{APT} = \frac{3}{4}p_{ABT} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}p_{ABC} = \frac{1}{4}p_{ABC}$ 3 točke
 Izračun $p_{ATS} = \frac{1}{4}p_{ATC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}p_{ABC} = \frac{1}{12}p_{ABC}$ 3 točke
 Izračun $p_{APS} = \frac{3}{4}p_{ABS} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}p_{ABC} = \frac{3}{16}p_{ABC}$ 3 točke
 Izračun $p_{SPT} = \frac{7}{48}p_{ABC}$ 3 točke
 Zapis $p_{PRT} = p_{RST} = \frac{7}{48}p_{ABC}$ 1 točka
 Ugotovitev, da sta ploščini trikotnikov PRR' in RSR' enaki in $|PR'| = |SR'|$ in, da je RT težiščnica trikotnika PRS 1+1+1 točka
 Sklep, da so RT , ST in PT težiščnice trikotnika PRS , torej je T težišče tega trikotnika. 1 točka

3. način.

Zapis točk A, B, C s koordinatami in zapis $T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ 1+2 točki
 Zapis razpolovišča $K\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$ daljice AB in izračun $P\left(\frac{a_1+3b_1}{4}, \frac{a_2+3b_2}{4}\right)$ 1+3 točke
 Zapis razpolovišča $L\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$ daljice BC in izračun $R\left(\frac{b_1+3c_1}{4}, \frac{b_2+3c_2}{4}\right)$ 1+3 točke
 Zapis razpolovišča $M\left(\frac{c_1+a_1}{2}, \frac{c_2+a_2}{2}\right)$ daljice CA in izračun $S\left(\frac{c_1+3a_1}{4}, \frac{c_2+3a_2}{4}\right)$ 1+3 točke
 Uporaba formule za težišče trikotnika PRS in izračun $T'\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ 1+4 točke

Naloge za 3. letnik (rešitve)**1.**

- (a) Enačbo preoblikujemo v $x^2 + (2\sqrt{3}a - 1)x + (3a^2 - 4a) = 0$. Ker je to kvadratna enačba, sta njeni rešitvi enaki natanko tedaj, ko je njena diskriminanta enaka 0, torej

$$(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a) = 0.$$

Odpravimo oklepaje $12a^2 - 4\sqrt{3}a + 1 - 12a^2 + 16a = 0$ in enačbo poenostavimo do $(16 - 4\sqrt{3})a + 1 = 0$. Od tod izrazimo

$$a = -\frac{1}{16 - 4\sqrt{3}} = -\frac{1}{4(4 - \sqrt{3})} = -\frac{4 + \sqrt{3}}{52}.$$

- (b) Ker sta rešitvi enačbe x_1 in x_2 , vodilni koeficient kvadratne funkcije na levi strani enačbe pa je 1, je enačba ekvivalentna enačbi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ oziroma $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$. Torej je $x_1x_2 = 3a^2 - 4a$. Izraz $3a^2 - 4a$ predstavlja kvadratno funkcijo v spremenljivki a , zato doseže najmanjšo vrednost v temenu. Ker je

$$3a^2 - 4a = 3\left(a^2 - \frac{4}{3}a\right) = 3\left(\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right),$$

je najmanjša vrednost dosežena, ko je $a = \frac{2}{3}$.

2. način.

- (a) Enačbo preoblikujemo v $x^2 + (2\sqrt{3}a - 1)x + (3a^2 - 4a) = 0$. Po formuli za rešitvi kvadratne enačbe dobimo

$$x_{1,2} = \frac{-(2\sqrt{3}a - 1) \pm \sqrt{(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a)}}{2}.$$

Iz $x_1 = x_2$ sledi $(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a) = 0$. Enačbo rešimo na enak način kot v prvi rešitvi.

- (b) Produkt x_1x_2 je enak

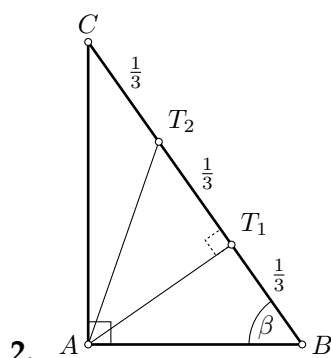
$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-(2\sqrt{3}a - 1) + \sqrt{(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a)}}{2} \cdot \frac{-(2\sqrt{3}a - 1) - \sqrt{(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a)}}{2} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}a - 1)^2 - ((2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a))}{4} \\ &= \frac{4(3a^2 - 4a)}{4} = 3a^2 - 4a. \end{aligned}$$

Ker je x_1x_2 kvadratna funkcija v spremenljivki a , doseže najmanjšo vrednost v temenu. Ker sta ničli funkcije $3a^2 - 4a = a(3a - 4)$ enaki $a_1 = 0$ in $a_2 = \frac{4}{3}$, je njeno teme v točki $\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2}{3}$. Produkt x_1x_2 bo najmanjši možen, ko je $a = \frac{2}{3}$.

- (a) Enačenje z nič, npr. $x^2 + (2\sqrt{3}a - 1)x + (3a^2 - 4a) = 0$ 1 točka
 Ugotovitev $D = 0$ ter zapis $(2\sqrt{3}a - 1)^2 - 4(3a^2 - 4a) = 0$ 3+1 točka
 Izračun $a = -\frac{1}{16-4\sqrt{3}}$ in zapis $a = -\frac{4+\sqrt{3}}{52}$ 3+4 točke
- (b) Ugotovitev $x_1x_2 = 3a^2 - 4a$ 3 točke
 Zapis $3a^2 - 4a = 3((a - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9})$ ali izračun $p = \frac{2}{3}$ 3 točke
 Odgovor $a = \frac{2}{3}$ 2 točki

2. način.

- (a) Enačenje z nič, npr. $x^2 + (2\sqrt{3}a - 1)x + (3a^2 - 4a) = 0$ 1 točka
 Zapis $x_{1,2} = \frac{-(2\sqrt{3}a-1) \pm \sqrt{(2\sqrt{3}a-1)^2 - 4(3a^2-4a)}}{2}$ in enačenje $x_1 = x_2$ 1+3 točke
 Izračun $a = -\frac{1}{16-4\sqrt{3}}$ in zapis $a = -\frac{4+\sqrt{3}}{52}$ 3+4 točke
- (b) Izračun $x_1x_2 = 3a^2 - 4a$ 3 točke
 Zapis $3a^2 - 4a = 3((a - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9})$ ali izračun $p = \frac{2}{3}$ 3 točke
 Odgovor $a = \frac{2}{3}$ 2 točki



- (a) Označimo notranji kot trikotnika ABC pri oglišču B z β . Po kosinusnem izreku za trikotnik ABT_1 je

$$|AT_1|^2 = |AB|^2 + |BT_1|^2 - 2|AB| \cdot |BT_1| \cos \beta.$$

Ker je $|BT_1| = \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3}$ in $\cos \beta = \frac{|AB|}{|BC|} = |AB|$, sledi

$$|AT_1|^2 = |AB|^2 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}|AB|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}|AB|^2.$$

Podobno po kosinusnem izreku za trikotnik ABT_2 velja

$$|AT_2|^2 = |AB|^2 + |BT_2|^2 - 2|AB| \cdot |BT_2| \cos \beta.$$

Z upoštevanjem $|BT_2| = \frac{2}{3}$ in $\cos \beta = |AB|$ dobimo

$$|AT_2|^2 = |AB|^2 + \frac{4}{9} - \frac{4}{3}|AB|^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}|AB|^2.$$

Obe izpeljani enačbi seštejemo in dobimo

$$|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

(b) Po Pitagorovem izreku za trikotnik AT_1T_2 velja

$$|AT_2|^2 = |AT_1|^2 + |T_1T_2|^2 = |AT_1|^2 + \frac{1}{9}.$$

Ko slednje vstavimo v enakost iz točke (a), dobimo $|AT_1|^2 + |AT_1|^2 + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ oziroma $2|AT_1|^2 = \frac{4}{9}$. Od tod sledi $|AT_1| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. način.

(a) Točko (a) dokažemo kot v prvi rešitvi.

(b) Trikotnika ABT_1 in CBA sta podobna, saj se ujemata v dveh kotih. Torej je

$$\frac{|AB|}{|BT_1|} = \frac{|BC|}{|AB|},$$

od koder sledi $|AB|^2 = |BC| \cdot |BT_1| = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ oziroma $|AB| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Iz Pitagorovega izreka za trikotnik ABC sledi

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Iz podobnosti trikotnikov ABT_1 in CBA sledi tudi

$$\frac{|AT_1|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

od koder izrazimo

$$|AT_1| = \frac{|AC| \cdot |AB|}{|BC|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. način.

(a) Točko (a) dokažemo kot v prvi rešitvi.

(b) Ker je premica AT_1 pravokotna na stranico BC , je AT_1 višina trikotnika ABC skozi oglišče A . Ker je trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri A , po višinskem izreku velja

$$|AT_1|^2 = |BT_1| \cdot |T_1C| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Torej je $|AT_1| = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(a) Zapis $|AT_1|^2 = |AB|^2 + |BT_1|^2 - 2|AB| \cdot |BT_1| \cos \beta$, zapis $\cos \beta = \frac{|AB|}{|BC|} = |AB|$, izračun $|AT_1|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}|AB|^2$ 2+2+2 točki
Zapis $|AT_2|^2 = |AB|^2 + |BT_2|^2 - 2|AB| \cdot |BT_2| \cos \beta$ in izračun $|AT_2|^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}|AB|^2$ 2+2 točki
Izračun $|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 4 točke

(b) Zapis $|AT_2|^2 = |AT_1|^2 + \frac{1}{9}$ 2 točki
Vstavitev $|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{5}{9}$ in izračun $|AT_1| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 2+2 točki

2. način.

- (a) Rešitev naloge (a) točkujemo po 1. načinu.
- (b) Ugotovitev, da sta ABT_1 in CBA podobna, zapis $\frac{|AB|}{|BT_1|} = \frac{|BC|}{|AB|}$, in izračun $|AC| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 1+1+1$ točka
 Zapis $\frac{|AT_1|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ in izračun $|AT_1| = \frac{|AC| \cdot |AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dots\dots\dots 1+1+1$ točka

3. način.

- (a) Rešitev naloge (a) točkujemo po 1. načinu.
- (b) Zapis višinskega izreka $\dots\dots\dots 2$ točki
 Vstavitev podatkov v višinski izrek in izračun $|AT_1| = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dots\dots\dots 2+2$ točki

Naloge za 4. letnik (rešitve)

1.

(a) S pomočjo rekurzivne formule po vrsti izračunamo

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 10 - 3 = 7,$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 14 - 5 = 9,$$

$$a_5 = 2a_4 - a_3 = 18 - 7 = 11,$$

$$a_6 = 2a_5 - a_4 = 22 - 9 = 13,$$

$$a_7 = 2a_6 - a_5 = 26 - 11 = 15.$$

(b) Rekurzivno formulo preoblikujemo v $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. To pomeni, da je diferenca med dvema zaporednima členoma zaporedja konstantna, zato je zaporedje aritmetično.

(c) Vsota prvih $n = 2025$ členov aritmetičnega zaporedja z diferenco $d = a_2 - a_1 = 2$ je enaka

$$\frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d) = \frac{2025}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 2024 \cdot 2) = \frac{2025}{2} \cdot 2 \cdot 2027 = 2025 \cdot 2027 = 4\,104\,675.$$

2. način.

(a) Na enak način kot v prvi rešitvi po vrsti računamo člene zaporedja in dobimo $a_7 = 15$.

(b) Dokažimo, da je $a_n = 2n + 1$ na vsa naravna števila n . Uporabili bomo indukcijo. Pri $n = 1$ je $a_1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$, pri $n = 2$ pa $a_2 = 5 = 2 \cdot 2 + 1$, torej formula velja za prva dva člena in baza indukcije je izpolnjena. Denimo, da formula velja za neki dve zaporedni naravni števili n in $n + 1$, torej $a_n = 2n + 1$ in $a_{n+1} = 2(n + 1) + 1$. Tedaj iz rekurzivne formule sledi

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (2(n + 1) + 1) - (2n + 1) = 2 \cdot (2n + 3) - (2n + 1) \\ &= 4n + 6 - 2n - 1 = 2n + 5 = 2(n + 2) + 1, \end{aligned}$$

torej formula velja tudi za naslednje naravno število. Po indukciji sledi, da formula velja za vsa naravna števila n . Ker je $a_n = 2n + 1$ za vsa naravna števila n , je zaporedje a_n aritmetično z diferenco 2.

(c) Z upoštevanjem $a_n = 2n + 1$ dobimo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2025} = \sum_{n=1}^{2025} (2n + 1) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{2025} n + 2025.$$

Vsota prvih 2025 naravnih števil je enaka

$$\sum_{n=1}^{2025} n = \frac{2025 \cdot 2026}{2},$$

torej je

$$\sum_{n=1}^{2025} (2n + 1) = 2 \cdot \frac{2025 \cdot 2026}{2} + 2025 = 2025 \cdot 2026 + 2025 = 2025 \cdot 2027 = 4\,104\,675.$$

- (a) Izračun $a_3 = 7, a_4 = 9, a_5 = 11, a_6 = 13$ in $a_7 = 15$ 2+1+1+1+1 točka
- (b) Preoblikovanje rekurzivne formule ali izračun v $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 3 točke
 Utemeljitev, da je zaporedje aritmetično, ker je razlika dveh sosednjih členov konstantna 4 točke
- (c) Uporaba formule za izračun vsote (vstavi $a_1 = 3, d = 2$ in $n = 2025$) 4 točke
 Izračun vsote 4 104 675 3 točke

2. način.

- (a) Izračun $a_3 = 7, a_4 = 9, a_5 = 11, a_6 = 13$ in $a_7 = 15$ 2+1+1+1+1 točka
- (b) Ugotovitev, da je splošni člen zaporedja $a_n = 2n + 1$ 3 točke
 Dokaz za $n = 1$ in $n = 2$ 2 točki
 Dokaz implikacije 2 točki
- (c) Zapis vsote $\sum_{n=1}^{2025} (2n + 1)$ 2 točki
 Upoštevanje $\sum_{n=1}^{2025} n = \frac{2025 \cdot 2026}{2}$ 2 točki
 Izračun vsote 4 104 675 3 točke

2.

- (a) Mislimo si, da so kocke med seboj različne. Tedaj imamo $\binom{5}{2}$ možnosti, kako izmed 5 kock določiti 2, na katerih padeta šestici. Vsaka od teh možnosti je enako verjetna, namreč, na izbranih 2 kockah mora pasti šestica, kar se zgodi z verjetnostjo $\left(\frac{1}{6}\right)^2$, na preostalih 3 kockah pa mora pasti med 1 in 5 pik, kar se zgodi z verjetnostjo $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Verjetnost vsake izmed možnosti je tako enaka $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$. Torej je verjetnost, da pri metu 5 igralnik kock padeta natanko 2 šestici, enaka

$$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{5^3}{6^5} = \frac{625}{3888}.$$

- (b) Označimo s P_n verjetnost, da pri metu n poštenih igralnih kock pade natanko 1 šestica. Možnosti, kako pade natanko 1 šestica, je n , verjetnost vsake od teh možnosti pa je $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Torej je

$$P_n = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Iščemo n , pri katerem bo P_n največja možna, torej iščemo maksimum zaporedja P_n . Zaporedje P_n narašča, ko je $P_n \leq P_{n+1}$ oziroma

$$\frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{n+1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}.$$

Neenakost je ekvivalentna $\frac{n}{5} \leq \frac{n+1}{5} \cdot \frac{5}{6}$ oziroma $n \leq 5$. Enačaja velja le pri $n = 5$. Torej, zaporedje P_n strogo narašča do člena P_5 , člena P_5 in P_6 sta enaka, od člena P_6 naprej pa zaporedje strogo pada. Verjetnost P_n je največja možna, ko je $n = 5$ ali $n = 6$.

2. način.

- (a) Mislimo si, da so kocke med seboj različne. Tedaj je število vseh možnih izidov pri metu 5 kock enako 6^5 . Preštejmo, število izidov, pri katerih padeta natanko 2 šestici. Imamo $\binom{5}{2}$ možnosti, kako izmed 5 kock izberemo 2, na katerih padeta šestici. Na preostalih 3 kockah mora pasti med 1 in 5 pik, kar se lahko zgodi na 5^3 načinov. Skupaj imamo torej $\binom{5}{2} \cdot 5^3$ izidov, pri katerih padeta natanko 2 šestici. Verjetnost dogodka, da pri metu 5 igralnih kock padeta natanko 2 šestici, je torej enaka

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot 5^3}{6^5} = \frac{10 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{625}{3888}.$$

- (b) Označimo s P_n verjetnost, da pri metu n poštenih igralnih kock pade natanko 1 šestica. Vseh možnih izidov pri metu n kock je 6^n . Izide, pri katerih pade natanko 1 šestica, preštejemo podobno kot v točki (a). Kocko, na kateri pade šestica lahko izberemo na n načinov. Na preostalih $n - 1$ kockah pa mora pasti med 1 in 5 pik, kar se lahko zgodi na 5^{n-1} načinov. Izidov, pri katerih pade natanko 1 šestica, je torej $n \cdot 5^{n-1}$, zato je

$$P_n = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Nadaljujemo na enak način kot v prvi rešitvi.

- (a) Zapis $\binom{5}{2}$ možnosti 2 točki
 Zapis verjetnosti, da na dveh kockah pade šestica $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ 2 točki
 Zapis verjetnosti, da na preostalih treh kockah ne pade šestica $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ 2 točki
 Zapis, da je verjetnost enaka $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$ 2 točki
 Izračun $\frac{625}{3888}$ 2 točki
- (b) Zapis $P_n = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ 2+2+2 točki
 Utemeljena ugotovitev $n = 5$ ali $n = 6$ 4 točke

2. način.

- (a) Zapis števila vseh izidov 6^5 2 točki
 Zapis števila ugodnih izidov $\binom{5}{2} \cdot 5^3$ 2 + 2 točki
 Zapis verjetnosti $\frac{\binom{5}{2} \cdot 5^3}{6^5}$ 2 točki
 Izračun $\frac{625}{3888}$ 2 točki
- (b) Zapis števila vseh izidov 6^n 1 točka
 Zapis števila ugodnih izidov $n \cdot 5^{n-1}$ 2+2 točki
 Zapis $P_n = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n}$ 1 točka
 Utemeljena ugotovitev $n = 5$ ali $n = 6$ 4 točke