Priprave na MMO 2026 – 5. domača naloga

1. Naj bosta m in n naravni števili, za kateri je $2^m + 3^n$ popoln kvadrat. Dokaži, da je tedaj tudi $2^m \cdot 3^n$ popoln kvadrat.

2. Dokaži, da je za vsako naravno število n število

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

deljivo z 9.

3. Določi vsa naravna števila a, b, c in d, za katera velja

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^{2026}.$$

4. Naj bo $p \geq 3$ praštevilo. Za vsako naravno število $k \leq p - 1$ z a_k označimo število deliteljev števila $kp + 1$, ki so strogo večji od k in manjši od p. Določi vrednost vsote

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **18. 1. 2026** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »5. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a _____ izjavljam, da sem vse naloge reševal/a
ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

_____ Podpis: _____
kraj in datum

Rešitve

1. Število $2^m \cdot 3^n$ je popoln kvadrat natanko tedaj, ko sta števili m in n sodi. Dovolj je torej preveriti, da to velja v primeru, ko je $2^m + 3^n$ popoln kvadrat. Poglejmo si najprej število $2^m + 3^n$ po modulu 3. Ker je $n \geq 1$, velja

$$2^m + 3^n \equiv 2^m \pmod 3.$$

Vemo pa, da je $2^m + 3^n$ popoln kvadrat, torej je lahko kongruenten le 0 ali 1 po modulu 3. Ker 3 ne deli 2^m, število $2^m + 3^n$ ni kongruentno 0 po modulu 3. Sledi, da velja

$$2^m \equiv 1 \pmod 3.$$

Poglejmo si sedaj števila oblike 2^m po modulu 3:

m	$2^m \pmod 3$
1	2
2	1
3	2
4	1
$\vdots$	$\vdots$

Število 2^m je torej kongruentno 1 po modulu 3 natanko takrat, ko je število m sodo.

Pokažimo še, da je tudi število n sodo. Poglejmo si najprej število $2^m + 3^n$ po modulu 4. Ker je m sod, je $m \geq 2$, torej 4 deli 2^m. Sledi, da je

$$2^m + 3^n \equiv 3^n \pmod 4.$$

Ker pa je število $2^m + 3^n$ popoln kvadrat, je kongruentno 0 ali 1 po modulu 4. Število $2^m + 3^n$ je liho, torej ni deljivo s 4. Sledi, da velja

$$3^n \equiv 1 \pmod 4.$$

Zanimajo nas torej ostanki števil oblike 3^n pri deljenju s 4:

n	$3^n \pmod 4$
1	3
2	1
3	3
4	1
$\vdots$	$\vdots$

Opazimo lahko, da je število 3^n kongruentno 1 po modulu 4 natanko tedaj, ko je n sodo število.

Če je $2^m + 3^n$ popoln kvadrat, morata torej biti števili m in n sodi. Tudi število $2^m \cdot 3^n$ je potem popoln kvadrat.

2. Dokazati želimo, da velja

$$n^{n^{n^n}} \equiv n^{n^n} \pmod 9.$$

Ločimo dva primera. Obravnavajmo najprej primer, ko 3 deli n. Ker je tedaj $n \geq 3$, sta obe števili deljivi z 9. Sledi, da je

$$n^{n^{n^n}} \equiv n^{n^n} \equiv 0 \pmod 9.$$

V primeru, da 3 ne deli n, sta n in 9 tuji si števili. Uporabimo lahko torej Eulerjev izrek. Ker je $\phi(9) = 6$, vemo, da velja

$$n^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

Dovolj je sedaj pokazati, da sta eksponenta kongruentna po modulu 6, oziroma

$$n^{n^n} \equiv n^n \pmod 6.$$

Najprej bomo pokazali, da sta števili kongruentni po modulu 2, nato pa še, da sta kongruentni po modulu 3. Ker sta 2 in 3 tuji si števili, lahko nato zaključimo, da sta števili kongruentni tudi po modulu 6.

Ni težko videti, da je

$$n^{n^n} \equiv n^n \pmod 2.$$

Če je n sodo število, sta namreč obe števili sodi, če pa je n lih, sta obe števili lihi. Pokazati moramo le še, da je

$$n^{n^n} \equiv n^n \pmod 3.$$

Ker 3 ne deli n, lahko uporabimo mali Fermatov izrek, ki pravi, da je $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Dovolj je sedaj pokazati, da sta eksponenta kongruentna po modulu 2. Očitno pa velja

$$n^n \equiv n \pmod 2;$$

podobno kot prej lahko namreč sklepamo, da če je n sod, sta obe števili sodi, če pa je n lih, sta obe števili lihi.

3. Poglejmo si enačbo po modulu 8. Velja

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod 8.$$

Za naravno število n nas sedaj zanimajo možni ostanki števila n^2 pri deljenju z 8:

$n \pmod 8$	$n^2 \pmod 8$
0	0
± 1	1
± 2	4
± 3	1
4	0

Če je n liho število, velja torej $n^2 \equiv 1 \pmod 8$. Predpostavimo, da je vsaj eno izmed števil a, b, c in d liho – brez škode za splošnost naj bo to a. Ker je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sodo

število, mora biti vsaj še eno izmed števil b, c in d liho – brez škode za splošnost naj bo to b. Vemo torej

$$a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 8,$$

od koder sledi

$$c^2 + d^2 \equiv 6 \pmod 8.$$

Ni težko ugotoviti, da taki naravni števili c in d ne obstajata, saj sta števili c^2 in d^2 lahko kongruentni le 0, 1 ali 4 po modulu 8. Ker pridemo do protislovja, smo s tem pokazali, da morajo števila a, b, c in d biti soda.

Naj bodo a_1, b_1, c_1 in d_1 taka naravna števila, da je $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ in $d = 2d_1$. Če to vstavimo v začetno enačbo, dobimo

$$4a_1^2 + 4b_1^2 + 4c_1^2 + 4d_1^2 = 7 \cdot 4^{2026},$$

oziroma ekvivalentno

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 7 \cdot 4^{2025}.$$

Opazimo, da je dobljena enačba podobna naši začetni enačbi. Zopet tako velja

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \equiv 0 \pmod 8,$$

iz česar lahko podobno kot prej sklepamo, da so števila a_1, b_1, c_1 in d_1 soda. Enačbo lahko tako spet delimo s 4. Postopek lahko ponavljamo, dokler bo desna stran enačbe še deljiva z 8. Sledi, da so števila a, b, c in d deljiva z 2^{2025}. Ko začetno enačbo na tak način 2025-krat delimo s 4, dobimo

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 7 \cdot 4 = 28,$$

kjer je $x = a_{2025} = \frac{a}{2^{2025}}$, $y = b_{2025} = \frac{b}{2^{2025}}$, $z = c_{2025} = \frac{c}{2^{2025}}$ in $w = d_{2025} = \frac{d}{2^{2025}}$.

Brez škode za splošnost naj velja $x \geq y \geq z \geq w$. Ni težko videti, da mora veljati $x \leq 5$, poleg tega pa velja

$$28 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 4x^2,$$

zato je $x \geq 3$. Ločimo tri primere:

i) Velja $x = 3$. Če je $y \leq 2$, v tem primeru dobimo

$$28 = 9 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 9 + 3 \cdot 2^2 = 21,$$

kar je protislovje. Sledi, da je tudi $y = 3$, enačbo pa lahko prepišemo v $z^2 + w^2 = 10$. Ni težko videti, da je edina možnost $z = 3$ in $w = 1$.

ii) Velja $x = 4$. Enačba se torej prepiše v

$$y^2 + z^2 + w^2 = 12.$$

Seveda je $y \leq 3$. Če je $y = 3$, dobimo $z^2 + w^2 = 3$, kar nima rešitev v naravnih številih. Ker v primeru $y = 1$ zaradi urejenosti velja še $z = w = 1$, tudi tu ne dobimo rešitve. Edina možnost je tako $y = 2$, v tem primeru pa sledi $z^2 + w^2 = 8$. Edina rešitev je očitno $z = w = 2$.

iii) Velja $x = 5$. V tem primeru dobimo

$$y^2 + z^2 + w^2 = 3,$$

kar ima jasno samo eno rešitev $y = z = w = 1$.

Iz zgornjih rešitev sklepamo, da so četverice (a, b, c, d), ki zadoščajo začetni enačbi, natanko $(3 \cdot 2^{2025}, 3 \cdot 2^{2025}, 3 \cdot 2^{2025}, 2^{2025})$, $(2^{2027}, 2^{2026}, 2^{2026}, 2^{2026})$ in $(5 \cdot 2^{2025}, 2^{2025}, 2^{2025}, 2^{2025})$ ter njihove permutacije.

4. Naj bo $2 \leq n \leq p - 1$ naravno število. Ker je p praštevilo, vemo, da sta p in n tuji si števili. Če za neki naravni števili i in j velja

$$ip \equiv jp \pmod{n},$$

lahko torej sklepamo, da je

$$i \equiv j \pmod{n}.$$

Sledi, da so števila $0, p, 2p, \ldots, (n-1)p$ paroma različna po modulu n. Imamo n različnih ostankov, torej obstaja natanko eno naravno število $1 \leq k < n$, za katerega je

$$kp \equiv -1 \pmod{n}.$$

S tem smo pokazali, da za vsako naravno število $2 \leq n \leq p - 1$ obstaja natanko eno naravno število $1 \leq k < n$, da je n delitelj števila $kp + 1$. Sledi, da bomo vsako tako naravno število n v vsoti $a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}$ šteli natanko enkrat. Velja torej

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = p - 2.$$