# Funkcije in funkcijske enačbe

Klemen Šivic
klemen.sivic@fmf.uni-lj.si

# 1 Funkcije

Ogledali si bomo definicijo funkcije in osnovne lastnosti, ki jih funkcija lahko ima (ali pa nima).

**Definicija 1.** Naj bosta $A$ in $B$ podmnožici množice realnih (ali kompleksnih) števil. *Funkcija* $f\colon A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu $a$ množice $A$ priredi natanko en element množice $B$. Ta element označimo s $f(a)$ in ga imenujemo *slika* elementa $a$. Množici $A$ pravimo *definicijsko območje* ali *domena* funkcije $f$, množici $B$ pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* funkcije je množica vseh elementov iz $B$, ki so slika kakšnega elementa iz $A$, torej

$$Z_f = \{b \in B;\ \text{obstaja}\, a \in A,\ \text{da je}\, b = f(a)\}.$$

Funkcijo določajo domena, kodomena in funkcijski predpis. Če domeno ali kodomeno spremenimo, dobimo drugo funkcijo, tudi če je funkcijski predpis podan z isto enačbo. Na primer, funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, podani s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = x^2$, sta različni, ker imata različni kodomeni.

Na funkcijah lahko definiramo več računskih operacij. S pomočjo računskih operacij na številih lahko definiramo vsoto, razliko in produkt funkcij. Na primer, vsota funkcij $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ je funkcija, ki vsak element $x \in A$ preslika v $f(x) + g(x)$. Označimo jo s $f + g$, torej je $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ za vsak $x \in A$. Če kodomena funkcij $f$ in $g$ ne bi bila $\mathbb{R}$, bi bilo treba pri definiciji funkcije $f + g$ paziti na to, ali je vsota $f(x) + g(x)$ res element kodomene. Podobno definiramo tudi funkciji $f - g$ in $f \cdot g$. Lahko definiramo tudi kvocient funkcij $\frac{f}{g}$, a ne na vsej množici $A$, ampak le v tistih številih iz $A$, za katere je $g(x) = 0$.

Poleg operacij na funkcijah, ki jih dobimo iz operacij na številih, je za funkcije značilna še ena operacija, in sicer kompozitum.

**Definicija 2.** *Kompozitum funkcij* $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ je funkcija $g \circ f\colon A \to C$, definirana s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

**Naloga 1.** *Naj bo* $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ *in* $f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ *za* $n \geq 1$. *Poišči predpis za* $f_{2021}$.

**Rešitev.** Po definiciji je $f_1(x) = \frac{x-5}{x-3}$. Izračunajmo še nekaj naslednjih predpisov za $f_n$:

$$\begin{aligned}
f_2(x) = f_1(f_1(x)) &= \frac{\frac{x-5}{x-3} - 5}{\frac{x-5}{x-3} - 3} = \frac{2x-5}{x-2}, \\
f_3(x) = f_1(f_2(x)) &= \frac{\frac{2x-5}{x-2} - 5}{\frac{2x-5}{x-2} - 3} = \frac{3x-5}{x-1}, \\
f_4(x) = f_1(f_3(x)) &= \frac{\frac{3x-5}{x-1} - 5}{\frac{3x-5}{x-1} - 3} = x.
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da za vsak $n$ velja

$$f_{n+4}(x) = f_n(f(f(f(f(x))))) = f_n(f_4(x)) = f_n(x).$$

Z indukcijo od tod lahko dokažemo, da je $f_{n+4k}(x) = f_n(x)$ za vsaka $n$ in $k$. V posebnem primeru je $f_{2021}(x) = f_1(x) = \frac{x-5}{x-3}$.

## 1.1 Lastnosti funkcij

**Definicija 3.** Funkcija $f\colon A \to B$ je:

- *soda*, kadar za vsak $x \in A$ velja $-x \in A$ in $f(x) = f(-x)$,
- *liha*, kadar za vsak $x \in A$ velja $-x \in A$ in $f(x) = -f(-x)$.

Primeri: Kosimus je soda funkcija, sinus pa liha. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = x^m$, je soda, kadar je $m$ sod, in liha, kadar je $m$ lih.

**Definicija 4.** Naj bo $f: A \to B$ funkcija.

- Funkcija $f$ je *injektivna*, kadar različne elemente iz $A$ preslika v različne elemente iz $B$, torej kadar iz $x_1, x_2 \in A$ in $x_1 \neq x_2$ sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekvivalentno, funkcija je injektivna, kadar iz $x_1, x_2 \in A$ in $f(x_1) = f(x_2)$ sledi $x_1 = x_2$.
- Funkcija je *surjektivna*, kadar je vsak element iz $B$ slika nekega elementa iz $A$, torej kadar je $Z_f = B$.
- Funkcija je *bijektivna*, kadar je injektivna in surjektivna hkrati.

Injektivnost in surjektivnost funkcije $f: A \to B$ se enostavno vidi na grafu funkcije. Funkcija $f$ je injektivna natanko takrat, ko vsaka vodoravna predmica seka njen graf največ enkrat. Surjektivna pa je funkcija $f$ natanko takrat, ko vsaka premica z enačbo $y = b$, *kjer je* $b \in B$, seka graf funkcije $f$ vsaj enkrat.

**Definicija 5.** Če je funkcija $f$ bijektivna, obstaja *inverzna funkcija* $f^{-1} : B \to A$. Definiramo jo na naslednji način: Ker je funkcija $f$ surjektivna, za vsak $x \in B$ obstaja $y \in A$, da je $f(y) = x$. Ker je funkcija $f$ injektivna, pa je ta $y$ enolično določen z $x$. Funkcijo $f^{-1}: B \to A$ torej lahko definiramo s predpisom $f^{-1}(x) = y$, kjer je $y \in A$ tisti enolično določen element, za katerega je $x = f(y)$.

Očitno velja $f(f^{-1}(x)) = x$ za vsak $x \in B$ in $f^{-1}(f(x)) = x$ za vsak $x \in A$. Z drugimi besedami, kompozitum $f \circ f^{-1}$ je identiteta na množici $B$, kompozitum $f^{-1} \circ f$ pa identitata na množici $A$.

**Izrek 6.** *Za funkciji $f: A \to B$ in $g: B \to C$ velja:*

1. *Če sta funkciji $f$ in $g$ injektivni, je tudi $g \circ f: A \to C$ injektivna.*
2. *Če sta funkciji $f$ in $g$ surjektivni, je tudi $g \circ f$ surjektivna.*
3. *Če sta funkciji $f$ in $g$ bijektivni, je tudi $g \circ f$ bijektivna.*
4. *Če je funkcija $g \circ f$ injektivna, je $f$ injektivna.*
5. *Če je funkcija $g \circ f$ surjektivna, je $g$ surjektivna.*

**Dokaz.**

1. Naj bosta $f$ in $g$ injektivni in naj bosta $x_1, x_2$ poljubna elementa, za katera je $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. To pomeni, da je $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Zaradi injektivnosti funkcije $g$ najprej sledi $f(x_1) = f(x_2)$ in potem zaradi injektivnosti funkcije $f$ še $x_1 = x_2$. To pa pomeni, da je funkcija $g \circ f$ injektivna.
2. Naj bosta $f$ in $g$ surjektivni in $z \in C$ poljuben. Zaradi surjektivnosti funkcije $g$ obstaja $y \in B$, da je $g(y) = z$, zaradi surjektivnosti funkcije $f$ pa obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$. Torej je $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ v zalogi vrednosti funkcije $g \circ f$. Ker je bil $z \in C$ poljuben, sledi, da je $g \circ f$ surjektivna funkcija.
3. Sledi iz 1 in 2.
4. Naj bo $g \circ f$ injektivna funkcija in naj bosta $x_1, x_2$ poljubna elementa, za katera je $f(x_1) = f(x_2)$. Potem je seveda tudi $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, torej $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Ker je funkcija $g \circ f$ injektivna, je $x_1 = x_2$, to pa dokazuje injektivnost funkcije $f$.
5. Naj bo $g \circ f$ surjektivna funkcija in $z \in C$ poljuben. Zaradi surjektivnosti funkcije $g \circ f$ obstaja $x \in A$, da je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. To pa pomeni tudi, da je $z$ v zalogi vrednosti funkcije $g$. Ker je bil $z \in C$ poljuben, sledi, da je $g$ surjektivna funkcija.

**Definicija 7.** Funkcija $f$ je

- *naraščajoča*, kadar iz $x > y$ sledi $f(x) \geq f(y)$,
- *strogo naraščajoča*, kadar iz $x > y$ sledi $f(x) > f(y)$,

- *padajoča*, kadar iz $x > y$ sledi $f(x) \leq f(y)$
- *strogo padajoča*, kadar iz $x > y$ sledi $f(x) < f(y)$,
- *(strogo) monotona*, kadar je (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča.

Očitno je vsaka strogo monotona funkcija injektivna. Obrat te trditve ne velja. Protiprimer je npr. funkcija $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, definirana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Je pa res, da je vsaka zvezna funkcija, definirana na povezanem območju, ki je injektivna, tudi strogo monotona.

**Definicija 8.** Funkcija $f\colon A \to B$ je *periodična*, kadar obstaja taka konstanta $a \in \mathbb{R}$, da za vse $x \in A$ velja $x + a \in A$ in $f(x + a) = f(x)$. Število $a$ imenujemo *perioda* funkcije $f$.

Primeri: simus, kosinus, $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$.

# 2 Funkcijske enačbe

Pogost primer tekmovalnih nalog so funkcijske enačbe. *Funkcijska enačba* je enačba, v katerih nastopajo neznane funkcije. Naloga od nas zahteva, da poiščemo vse funkcije, ki ustrezajo dani enačbi. Pogosto kakšno rešitev lahko uganemo, težko pa je najti vse, oziroma dokazati, da drugih rešitev ni. Splošnega pravila za reševanje funkcijskih enačb namreč ni. Koristno je narediti čim več vaj, s katerimi se dobi občutek, kako se rešuje nekatere tipe nalog. Ogledali si bomo nekaj najbolj pogostih prijemov, ki jih uporabljamo pri reševanju.

**Ko dobimo vse kandidate za rešitev, moramo obvezno narediti preizkus, če res ustrezajo enačbi.** Če tega na tekmovanju ne naredimo, bomo zagotovo izgubili eno točko.

## 2.1 Reševanje z vstavljanjem

Najbolj osnoven način reševanja funkcijskih enačb je z vstavljanjem. V izraze ponavadi vstavljamo števila 0, 1, nasprotne in obratne vrednosti spremenljivk, $y = f(x)$ in podobne izraze, tako da se enačba poenostavi. Če smo pri tem dovolj spretni, morda lahko pridemo do rešitve.

**Naloga 2.** *Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ zadoščajo enačbi*

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

**Rešitev.** Če v funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = 1$ dobimo $f(1)^2 = f(1)$, torej je $f(1) \in \{0, 1\}$. Obravnavamo obe možnosti:

Če je $f(1) = 0$, v funkcijsko enačbo vstavimo $y = 1$ in dobimo $f(x)x = f(x)$ za vsak $x$, torej je $f(x) = 0$ za vsak $x \neq 1$. Vemo pa že, da je tudi $f(1) = 0$, torej je $f(x) = 0$ za vsak $x$.

Če pa je $f(1) = 1$, v funkcijsko enačbo spet vstavimo $y = 1$ in dobimo $f(x)x = x^2$, torej je $f(x) = x$ za $x \neq 0$. Če v funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = 0$, pa dobimo še $f(0) = 0$. Torej je $f(x) = x$ za vsak $x$.

Za rešitev smo dobili dva kandidata: funkciji, definirani s predpisoma $f(x) = 0$ za vsak $x$ in $f(x) = x$ za vsak $x$. Na koncu moramo še preveriti, da obe funkciji res zadoščata funkcijski enačbi, kar je v tem primeru očitno.

**Naloga 3.** *Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi*

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

*za vse $x, y \in \mathbb{R}$.*

**Rešitev.** V enačbo vstavimo $y = x$, dobljeno enačbo preuredimo in dobimo $xf(x)(f(x) - 1) = 0$. To pomeni, da je

$$f(x) \in \{0, 1\} \quad \text{za} \quad x \neq 0. \tag{1}$$

Če je $f(x) = 0$ za nek $x \neq 0$, potem v funkcijsko enačbo vstavimo ta $x$ in dobimo $f(y) = 0$ za vse $y$. Skupaj z (1) tako dobimo, da je bodisi $f(x) = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$ bodisi $f(x) = 1$ za vse $x \neq 0$. V drugem primeru izračunajmo še $f(0)$. V funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$ in dobimo $xf(0)(f(x) - 1) = 0$ za vsak $x$, kar pa je res ne glede na $f(0)$. Izgleda torej, da je vrednost $f(0)$ lahko poljubna. Kandidati za rešitve so torej funkcije, dane s predpisi $f(x) = 0$ in $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & x \neq 0 \\ a; & x = 0 \end{array} \right.$, kjer je $a$ poljubno realno število. Preveriti je treba še, da te funkcije res zadoščata enačbi, kar prepuščamo bralcu.

## 2.2 Reševanje sistema enačb

V nekaterih primerih lahko zapišemo sistem enačb, od koder izračunamo $f(x)$. To je pogosto mogoče, kadar v funkcijski enačbi nastopata $f(x)$ in eden od izrazov $f(1-x)$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(\frac{1}{1-x})$, $f(\frac{x-1}{x+1})$ ali kaj podobnega.

**Naloga 4.** *Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, za katere velja*

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x \tag{2}$$

*za vse $x \neq \pm 1$.*

**Rešitev.** V funkcijsko enačbo namesto $x$ vstavimo $\frac{x-3}{x+1}$ in dobimo

$$f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) + f(x) = \frac{x-3}{x+1}. \tag{3}$$

Razmislimo, za katera števila $x$ ta enakost velja. Da je izraz $\frac{x-3}{x+1}$ definiran, $x$ ne sme biti enak $-1$. Poleg tega pa iz pogoja naloge sledi, da mora biti izraz $\frac{x-3}{x+1}$, ki smo ga vstavili v enačbo (2) namesto $x$, različen od $\pm 1$. To pa je ekvivalentno $x \neq 1$. Enakost (3) torej velja za vse $x \neq \pm 1$.

V funkcijsko enačbo (2) namesto $x$ vstavimo še $\frac{3+x}{1-x}$ in dobimo

$$f(x) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{3+x}{1-x}. \tag{4}$$

Podobno kot zgoraj lahko ugotovimo, da tudi ta enačba velja za vse $x \neq \pm 1$.

Zdaj pa vidimo, da če seštejemo enačbi (3) in (4) in od rezultata odštejemo (2), na levi strani ostane le $2f(x)$. Dobimo torej

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x-3}{x+1} + \frac{3+x}{1-x} - x\Big) = \frac{x^3+7x}{2-2x^2}$$

za vsak $x \neq \pm 1$. Na koncu je treba še preveriti, da funkcija res zadošča pogojem naloge, kar prepuščamo bralcu.

## 2.3 Funkcija, definirana na racionalnih številih

Če je funkcija $f$, ki jo iščemo, definirana na racionalnih številih, pogosto deluje naslednji postopek: Ugotovimo, koliko je $f(0)$ in $f(1)$, nato poiščemo vrednost funkcije v poljubnem naravnem številu, nato v poljubnem celem številu, poljubnem številu oblike $\frac{1}{n}$ in nazadnje v poljubnem številu oblike $\frac{m}{n}$. Ker je vsako racionalno število take oblike, dobimo predpis za $f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$.

Po enakem postopku lahko pogosto poiščemo tudi predpis za funkcije, definirane na $\mathbb{R}$, za katere lahko dokažemo, da so zvezne ali monotone. Zveznost in monotonost nam namreč omogočata, predpis razširimo z racionalnih na vsa realna števila. Kako to naredimo natančno, si bomo ogledali na drugem primeru spodaj.

**Naloga 5.** *Poišči vse funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, za katere velja $f(x+y) = f(x) + f(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{Q}$.*

Zgornja enačba se imenuje *Cauchyjeva funkcijska enačba.* Ker je njena rešitev znana, jo na tekmovanju lahko kar napišemo, če naletimo nanjo.

**Rešitev.** Iz funkcijske enačbe sledi $f(0) = 0$ in od tod $f(-x) = -f(x)$ za vse $x \in \mathbb{Q}$. Funkcija je torej liha. Zdaj bomo sledili navodilom iz začetka razdelka, pri čemer bomo nekatere korake lahko združili. Najprej z indukcijo dokažimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in \mathbb{Q}$ velja

$$f(nx) = nf(x). \tag{5}$$

Za $n = 1$ je to očitno. Predpostavimo, da enačba (5) velja za nek $n$ in vsak $x \in \mathbb{Q}$. Iz te indukcijske predpostavke in začetne funkcijske enačbe dobimo

$$f((n+1)x) = f(x+nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x),$$

kar pomeni, da enačba (5) velja tudi za $n+1$ in vsak $x \in \mathbb{Q}$. Indukcija je s tem končana.

Zdaj, ko smo dokazali, da enakost (5) velja za vse $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{Q}$, v to enakost vstavljamo različna števila, tako da sledimo navodilom z začetka razdelka. V (5) vstavimo $x = 1$ in dobimo $f(n) = nf(1)$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Naj bosta zdaj $p, q$ poljubni naravni števili. V enačbo (5) vstavimo $x = \frac{p}{q}$ in $n = q$ ter upoštevamo, da že vemo, da je $f(p) = pf(1)$. Dobimo

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} f(p) = \frac{p}{q} f(1).$$

Torej obstaja konstanta $c \in \mathbb{Q}$, da za vsak $x \in \mathbb{Q}^+$ velja $f(x) = cx$. Ker pa je funkcija $f$ liha, velja ta predpis za vsa racionalna števila. Preveriti je treba še, da vsaka dobljena funkcija ustreza nalogi in v tem primeru je to očitno.

**Opomba 9.** Če bi kodomeno zamenjali z $\mathbb{R}$, se postopek reševanja ne bi spremenil. Edina razlika bi bila, da bi bila konstanta $c$ lahko poljubno realno število, ne nujno racionalno.

Situacija pa je bistveno drugačna, če iščemo funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$. Funkcije, definirane s predpisi $f(x) = cx$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, so seveda rešitve te enačbe, a niso to vse rešitve. Drugih rešitev ni preprosto opisati, a obstajajo. To so zelo "divje"funkcije, ki so neomejene na vsakem intervalu.

**Naloga 6.** *Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ zadoščajo enačbama $f(x+y) = f(x)+f(y)$ in $f(xy) = f(x)f(y)$.*

**Rešitev.** Prva enačba je Cauchyjeva funkcijska enačba, zato obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = cx$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$. Najprej ugotovimo, kakšna je konstanta $c$. Če v drugo enačbo vstavimo $x = y = 1$, dobimo $c = c^2$, torej je $c \in \{0, 1\}$ in bodisi $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$ bodisi $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$.

Zgornja dva predpisa bi radi razširili na realna števila. Da bomo to lahko naredili, bomo najprej dokazali, da je funkcija $f$ monotona. Pri dokazovanju monotonosti je običajno (ne pa vedno) bistvenega pomena, da poiščemo izraze, ki so pozitivni. Vemo, da so kvadrati vedno večji ali enaki 0, zato je koristno najti kvadrate. Opazimo, da kvadrate dobimo, če v drugo enačbo vstavimo $y = x$. Dobimo namreč $f(x^2) = f(x)^2$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ta enakost nam pove, da funkcija $f$ slika nenegativna števila v nenegativna števila. Če je namreč $z$ poljubno nenegativno število, potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, da je $z = x^2$ in zato $f(z) = f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$.

Naj bosta zdaj $x \geq y$ poljubni realni števili. Iz $x - y \geq 0$ potem sledi $f(x - y) \geq 0$, torej je $f(x) = f(x - y) + f(y) \geq f(y)$. Sledi, da je funkcija $f$ naraščajoča.

S pomočjo monotonosti bomo zdaj dokazali, da je $f(x) = cx$ (kjer je $c \in \{0, 1\}$) za vsak $x \in \mathbb{R}$. Recimo, da to ni res. Potem obstaja neko realno število $x$, da je $f(x) \neq x$. Oglejmo si, kako pridemo v protislovje, če je $c = 1$ in $f(x) > x$. Realna števila lahko poljubno dobro aproksimiramo z racionalnimi števili (na primer s pomočjo decimalnega zapisa), zato gotovo obstaja *racionalno* število $y$, za katerega velja $x < y < f(x)$. Z upoštevanjem monotnosti in pogoja, da za racionalno število $y$ velja $f(y) = y$, zdaj dobimo

$$f(x) \leq f(y) = y < f(x),$$

kar je očitno protislovje. Predpostavka $f(x) > x$ je bila tako napačna. Podobno v primeru $c = 1$ pridemo v protislovje, če je $f(x) < x$, saj le vse neenakosti v zgornjem razmisleku obrnemo. Pri $c = 1$ je torej edina rešitev dana s predpisom $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Na enak način v primeru, ko je $c = 0$, lahko razmislimo, da mora veljati $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Vsak naj to razmisli sam. Funkciji, podani s predpisoma $f(x) = x$ in $f(x) = 0$, sta torej edina kandidata za rešitvi. Očitno pa obe funkciji res ustrezata pogojem naloge.

## 2.4 Injektivnost, surjektivnost

Pogosto pri reševanju enačbe potrebujemo injektivnost ali surjektivnost funkcije. Injektivnost največkrat dokažemo tako da dokažemo, da iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$. Pomembno je vedeti tudi, da so strogo monotone funkcije vedno injektivne. Kako si lahko pomagamo s podatkom, da je iskana funkcija injektivna? Injektivnost pomeni, da funkcijsko enačbo oblike $f(\cdots) = f(\cdots)$ lahko "krajšamo s $f$" in enačba se s tem poenostavi. Kaj pa nam koristi, če ugotovimo, da je funkcija surjektivna? Surjektivnost pomeni, da namesto $f(x)$ lahko pišemo $y$ in če je enačba veljala za vse $x$, bo veljala tudi za vse $y$ (če funkcija ni surjektivna, pa bo nova enačba veljala le za vse $y$ iz zaloge vrednosti).

**Naloga 7.** *Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tako da za vsaki realni števili $x$ in $y$ velja*

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

**Rešitev.** Zgornja enačba ima zelo veliko členov. V takih primerih je koristno ugotoviti, kdaj sta dva člena enaka, saj se potem enačba poenostavi. Najbolj komplicirana člena v zgornji enačbi sta leva stran $f(x + f(x) + f(y))$ in prvi člen $f(y + f(x))$ na desni. Ali sta ta dva člena kdaj enaka? To se bo gotovo zgodilo vsaj takrat, ko bo $x + f(x) + f(y) = y + f(x)$. Opazimo, da iz te enačbe lahko izrazimo $x = y - f(y)$. V začetno enačbo se nam zato splača vstaviti $x = y - f(y)$. Dobimo

$$f(f(y)) = y \tag{6}$$

za vsak $y \in \mathbb{R}$. Ta enačba nam pove, da je funkcija $f$ bijektivna in sama sebi inverz. Potrebovali fomo injektivnost funkcije $f$.

V začetno funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = 0$ in dobimo $f(2f(0)) = f(0)$. Zaradi injektivnosti to enačbo lahko "krajšamo s $f$"in dobimo $2f(0) = 0$, oziroma $f(0) = 0$. V funkcijsko enačbo zdaj vstavimo $x = 0$ in upoštevamo $f(0) = 0$. Dobimo $f(f(y)) = 2f(y) - f(f(y))$ za vsak $y \in \mathbb{R}$. Iz (6) zdaj sledi $f(y) = y$ za vsak $y$. Preverimo lahko tudi, da ta funkcija res ustreza enačbi.

**Naloga 8.** *Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za katere velja $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$.*

**Rešitev.** V enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo

$$f(f(y)) = f(0)^2 + y. \tag{7}$$

Dokažimo, da iz zgornje enačbe sledi, da je funkcija $f$ bijektivna. Potrebovali bomo samo surjektivnost, za vajo pa dokažimo obe lastnosti. Za dokaz surjektivnosti naj bo $z \in \mathbb{R}$ poljubno število. Potem gotovo obstaja $y \in \mathbb{R}$, da je $z = f(0)^2 + y$. Potem pa je tudi $z = f(f(y))$, kar pomeni, da je $z$ v zalogi vrednosti funkcije $f$. Ker je bil $z$ poljuben, surjektivnost funkcije $f$ sledi. Za dokaz injektivnosti pa predpostavimo, da je $f(x_1) = f(x_2)$ za neka $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Potem je tudi $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ in iz (7) sledi, da je $x_1 = x_2$. Injektivnost funkcije $f$ je s tem dokazana. Ta način dokazovanja injektivnosti je zelo pogost in deluje predvsem v primerih, ko ena od spremenljivk v enačbi "ne leži znotraj nobenega izraza oblike $f(\cdots)$"(kot na primer $y$ na desni strani enačbe (7)).

Uporabimo zdaj surjektivnost funkcije $f$. Zaradi surjektivnosti obstaja $x \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = 0$. Ta $x$ vstavimo v funkcijsko enačbo in dobimo

$$f(f(y)) = y \tag{8}$$

za vsak $y$, kar skupaj s (7) pomeni $f(0) = 0$. V funkcijsko enačbo vstavimo še $y = 0$ in dobimo

$$f(xf(x)) = f(x)^2 \tag{9}$$

za vse $x$. Če v (9) zamenjamo $x$ s $f(x)$ in upoštevamo (8), se leva stran ne spremeni. Dobimo

$$x^2 = f(f(x))^2 = f(f(x)f(f(x))) = f(f(x)x) = f(x)^2$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = x$ ali $f(x) = -x$. To **ne pomeni**, da je $f(x) = x$ za vsak $x$ ali $f(x) = -x$ za vsak $x$. Lahko bi namreč obstajala $u, v \neq 0$, za katera bi veljalo $f(u) = u$ in $f(v) = -v$. Recimo torej, da taka $u$ in $v$ obstajata. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = u$ in $y = v$ in dobimo $f(u^2 - v) = u^2 + v$, torej je $u^2 + v = u^2 - v$ ali $u^2 + v = -u^2 + v$. V prvem primeru dobimo $v = 0$, v drugem pa $u = 0$, kar je oboje v protislovju s predpostavko, da sta $u$ in $v$ neničelna. Torej mora veljati $f(x) = x$ za vse $x$ ali $f(x) = -x$ za vse $x$. Hitro lahko vidimo, da obe funkciji res ustrezata začetni funkcijski enačbi.

# Literatura


[1] Evan Chen: Introduction to functional equations, https://web.evanchen.cc/handouts/FuncEq-Intro/FuncEq-Intro.pdf

[2] Costas Efthimiou: Introduction to functional equations, https://www.msri.org/people/staff/levy/files/MCL/Efthimiou/100914book.pdf

[3] Marko Radovanović: Functional equations, https://www.isinj.com/mt-usamo/Functional%20Equations%20-%20Marko%20Radovanovic.pdf