

Igra povezav, Ramseyeva števila in umetna inteligenca

Boštjan Kuzman

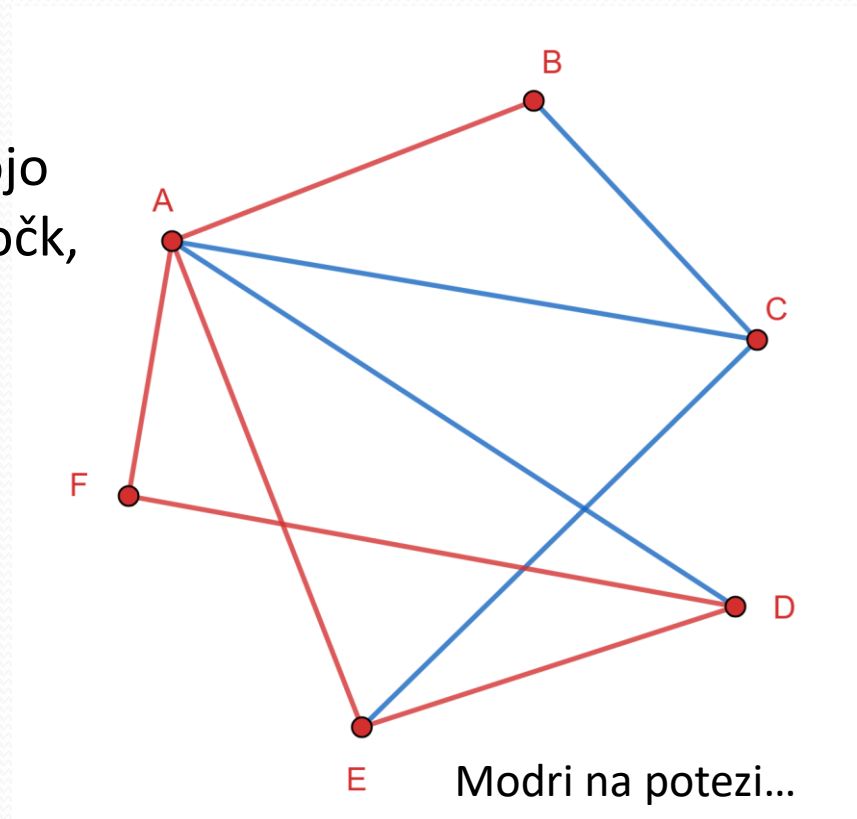
Presekov seminar, 6.10.2026

Igra SIM je preprosta kombinatorična igra za dva igralca.

Narišemo nekaj točk v krožni razporeditvi. Nato igralca vsak s svojo barvo izmenično povezujeta pare točk, ki še niso povezani.

Igro izgubi tisti, ki ne more povezati dveh točk, ne da bi pri tem nastal enobarven 3-cikel.

Odigrajmo nekaj iger...

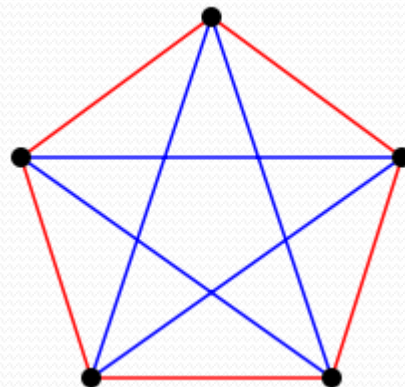


Na zabavi je (vsaj) 6 ljudi. Nekateri se med seboj poznajo. Dokaži, da obstaja trojica oseb, ki poznajo druga drugo, ali pa nobeden od njih ne pozna drugih dveh.

- Izberimo poljubno osebo. Med petimi drugimi osebami potem gotovo obstajajo vsaj trije, ki jih pozna, ali pa vsaj trije, ki jih ne pozna.
 - Če velja prvo in se dve od teh treh oseb poznata, smo našli 3 osebe, ki se poznajo.
 - Če velja prvo in se nobeni dve od teh treh ne poznata, smo našli 3 osebe, ki se med seboj ne poznajo.
 - Podobno sklepamo, če velja druga možnost.

Ozadje naloge: Če ima graf vsaj 6 vozlišč, potem graf ali njegov komplement vedno vsebuje trikotnik.

- Protiprimer za 5 vozlišč:



- Ramseyjevo število $R(n,m)$ je najmanjše število vozlišč, ki zagotavlja, da je v grafu bodisi n vozlišč, ki so vsa povezana med seboj, bodisi m vozlišč, med katerimi ni nobene povezave.
- Dokazali smo, da je $R(3,3)=6$.

Zgodovina problema:

Madžarski sociolog Sandor Szalai je okoli 1950 opazil, da v skupini 20 otrok vedno obstajajo 4, ki so bodisi med seboj vsi prijatelji, ali pa noben od njih ni prijatelj z drugimi tremi.

V bistvu je opazil, da je $R(4,4)$ približno 20.

Hitro je zaslutil, da to ni sociološki, pač pa matematični fenomen, kar so potrdili njegovi kolegi matematiki *P. Erdős*, *P. Turán* in *V. Sós*...

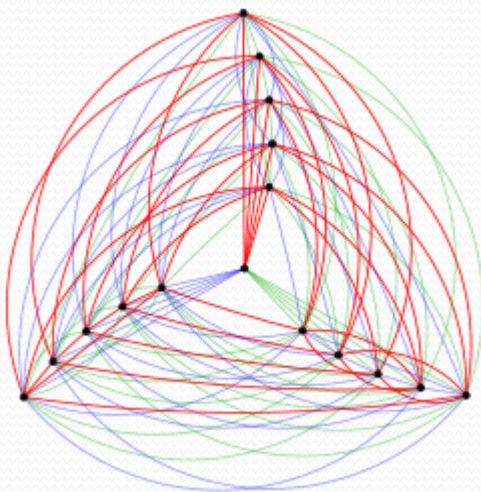
Na zabavi treh dežel se je vsak od 17 gostov pogovarjal z vsemi ostalimi v enem od treh jezikov. Dokaži, da so se trije gostje pogovarjali v istem jeziku.

- Izberemo enega gosta. Ta je govoril z ostalimi 16 gosti v treh možnih jezikih, torej je gotovo enega od jezikov uporabil vsaj 6-krat.
 - Če sta dva od te šesterice govorila v istem jeziku tudi med seboj, imamo iskano trojico.
 - Če med temi šestimi nobena dva med seboj nista govorila v tem jeziku, pa se je ta šesterica med seboj pogovarjala v enem od preostalih dveh jezikov. Po prejšnji nalogi pa je $R(3,3)=6$, torej so se gotovo trije izmed šesterice pogovarjali v istem jeziku.

Ozadje naloge: Dokazali smo, da je $R(3,3,3) \leq 17$.

Torej, če povezave grafa s 17 ali več vozlišči pobarvamo s tremi različnimi barvami, dobimo vsaj en trikotnik iste barve.

- 16 vozlišč ni dovolj. Protiprimer dobimo, če zlepimo 3 kopije Clebschevega grafa v poln graf na 16 vozliščih.



To pomeni, da velja enakost: $R(3,3,3)=17$.

Znano je še, da je 4-barvno število $R_4 = R(3,3,3,3)$ med 51 in 62.

Točna vrednost števil $R_4, R_5, \dots$ ni znana, jasno pa je, da $R_k = R(3,3,\dots,3)$ izredno hitro naraščajo.

Znameniti madžarski matematik Pal Erdos je domneval, da je njihova rast *superekspONENTNA*. To pomeni, da je za vsako konstanto C rast števila $R_k = R(3,\dots,3)$ hitrejša od C^k .

Letos poleti je bila ta domneva dokazana s pomočjo umetne inteligence, ki je sama odkrila utemeljitev. Dokaz je bil nato preverjen s formalnim dokazovalnikom.